

## 異質圓環으로 補強된 圓形구멍 周圍에서의 應力分布

任 尙 缺\*

## The Stress Distribution around a Circular Hole Reinforced by a Ring of Different Material in a Plate under Biaxial Loading

by  
S. J. Yim

## ABSTRACT

The effect of a circular hole reinforced by a ring of different material in a plate under biaxial loadings is considered. In this problem, an infinitely large flat plate is assumed. The reinforcing ring is of uniform rectangular cross-section of same thickness as the plate. The outer boundary of the ring is cemented to the inner boundary of the hole in the plate. The plate is subjected to hydrostatic tension and pure shear loadings.

The stress distribution around the hole is obtained by means of the two-dimensional theory of elasticity.

To conform the validities of above solutions, a series of photo-elastic stress analysis for a composite model was carried out. Fair agreements were observed between two sets of values.

The conclusions arrived at are as follows:

- 1) The theoretical solutions are exact ones for the case of infinitely large flat plate.
- 2) The solutions can be used for most cases of engineering problems if the bonding between the plate and ring is perfect.
- 3) If the ratio of Young's moduli of the ring and the plate is increased, the stresses in the plate decrease whereas those in the ring increase.
- 4) The stress concentration near the hole has localized effect.
- 5) Under hydrostatic tension, maximum principal stress and maximum shear stress increase as the ratio of inner and outer diameters of the ring increases.
- 6) Under pure shear, the stresses depend upon angular orientations of the points and maximum principal stress and maximum shear stress appear at 45 degree. They increase as the ratio of inner and outer diameters of the ring increases.

## 記 號

$t$  : 平板과 補強環의 두께 (thickness of the plate and the reinforcing ring)

$a$  : 補強環의 内部半徑 (inner radius of the reinforcing ring)

$b$  : 補強環의 外部半徑 (outer radius of the reinforcing ring)

接受日字 1969年 5月 20日

\* 正會員, 서울大學校 工科大学

圓形구멍의 半徑 (radius of the circular hole)

$$m = a / b$$

$\mu_1$  : 平板의 Poisson 比 (Poisson's ratio of the plate)

$\mu_2$  : 環의 Poisson 比 (Poisson's ratio of the ring)

$E_1$  : 板의 彈性係數 (Young's modulus of the plate)

$E_2$  : 環의 彈性係數 (Young's modulus of the ring)

$$n = E_2 / E_1$$

$f_T$  : 均一 2軸引張荷重 (intensity of hydrostatic tensile load) (psi)

$f_S$  : 純粹剪斷荷重 (intensity of pure shear load) (psi)

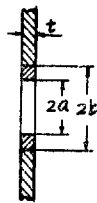
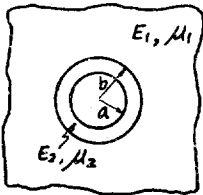
$r, \theta$  : 極座標 (polar co-ordinates)

### 1. 緒 論

構造物의 板部材에 구멍이 있으면 그 周圍에 應力集中現像이 일어난다는 것은 周知의 事實이며, 여러가지 荷重狀態에서 圓形, 橢圓形, 矩形 및 三角形等 구멍 周圍에서의 應力分布에 대하여 많은 研究가 이룩되어 있다 [5], [7], [8], [9].

船舶, 航空機 및 其他 構造物에 있어서는 應力集中에 不拘하고 구멍을 뚫어야 할 경우가 흔히 있으며, 應力 分布를 改善하기 위하여 구멍의 가장자리에 테를 둘러 補強하는 方法이 흔히 쓰이고 있다.

Gurney는 均一矩形斷面의 環으로 補強된 圓形 구멍을 갖는 無限平板에서의 應力分布를 實應力函數를 使用하여 解析하였고 [1], Wittrick는 補強된 橢圓形구멍 周圍에서의 應力分布를 複素應力函數를 使用하여 解析하였으며 [3], Heller는 補強된 圓形구멍을 갖는 보 속에서의 應力分布를 實驗的으로 解析한바 있다 [10].



Mansfield는 實應力函數를 使用하여 Neutral hole (나머지 部分의 應力分布에 影響을 주지 않도록 設計된 구멍)의 모양과 補強環의 材料의 分布에 관해서 研究한 바 있다 [4].

이들 理論解法은 無限한 크기의 平板에 대한 것이지만, 구멍直徑의 數倍을 넘는 有限크기의 板, 구멍直徑의 數倍을 넘는 曲率半徑을 갖는 曲面板에 대해서도 實用의 目的下에서는 適用할 수 있다.

Fig. 1. Circular hole reinforced by a ring of different material

上記의 解析들은 모두 母板과 補強環의 材料가 같은 경우를 다루고 있다. 著者は Fig. 1에 보인 것과 같이, 無限平板의 中央에 두께는 같고 材料가 다른 補強環을 붙인 경우를 取扱하였다.

여기서는 이와 같은 平板이 그 平面內에서의 2軸均一引張荷重과 純粹剪斷荷重을 받는 2가지 基本的인 경우에 대하여 2次元 彈性理論을 使用하여 板과 環에서의 應力分布를 일었다.

다음에 2種의 材料로 Fig. 1과 같은 模型을 만들어 光彈性實驗을 하여 應力分布를 求하였고, 이를 위의 理論으로부터 계산한 값과 比較하였다.

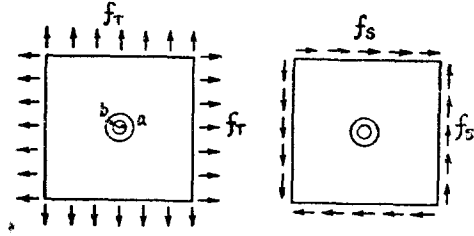
### 2. 理論的 解析

#### 2-1. 基礎理論

異質材料의 均一矩形斷面의 環으로 補強된 圓形구멍을 갖는 無限平板이 다음의 2가지 荷重을 받는 경우를 생각한다 :

\* [ ] 안의 數字는 本論文의 末尾에 掲載한 參考文獻의 番號인.

- (1) 均一 2 軸引張荷重 (Fig. 2-a),
- (2) 純粹剪斷荷重 (Fig. 2-b).



(a) Hydrostatic tension (b) Pure shear

Fig. 2. Biaxial loading

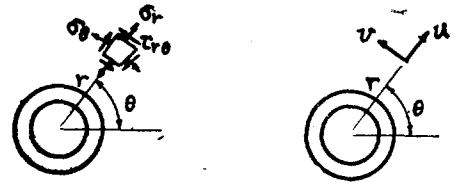


Fig. 3. Polar co-ordinates

Fig. 3 에 보인 것과 같은 極座標 \$(r, \theta)\$ 를 設定하면, 이들 境界條件은 다음과 같이 表示된다:

- (1) 구멍의 中心으로 부터 멀리 떨어진 곳에서의 應力狀態는 다음과 같다:

即 \$r = \infty\$ 에서

- a) 均一 2 軸引張의 경우

$$\sigma_\theta = f_T, \sigma_r = f_T, \tau_{r\theta} = 0,$$

- b) 純粹剪斷의 경우

$$\sigma_\theta = -f_S \sin 2\theta, \sigma_r = f_S \sin 2\theta, \tau_{r\theta} = f_S \cos 2\theta.$$

- (2) 구멍의 內面에는 아무런 外力도 作用하지 않는다.

即 \$r = a\$ 에서 \$\sigma\_r = \tau\_{r\theta} = 0\$.

- (3) 補強環과 母板과의 接着面에서는 環과 板이 주고 받는 힘이 서로 같다.

- (4) 補強環과 母板과의 接着面에서는 環과 板의 變位가 서로 같다.

한편, 應力函數를 \$\phi\$ 라고 하면 應力成分들은 다음과 같이 表示된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2-1-1. 均一 2 軸引張狀態

이 경우에는 應力分布가 回轉對稱이므로 應力函數 \$\phi\$ 는 \$r\$ 만의 函數로 되고 따라서 適合條件式은 다음 꼴로 된다:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

이 方程式의 一般解는

$$\phi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D \quad (3)$$

의 꼴로 되고 [1], [2], [11], 따라서 應力成分들은 다음과 같이 表示된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1+2 \log r) + 2C, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(3+2 \log r) + 2C, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

이들 식은, 積分常數만 달리하면, 板과 環에 對하여 適用되는 것이므로, 板과 環에서의 應力分布를 각각 다음과 같이 表示할 수 있다:

板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_1}{r^2} + B_1(1+2 \log r) + 2C_1, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A_1}{r^2} + B_1(3+2 \log r) + 2C_1, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_2}{r^2} + B_2(1+2 \log r) + 2C_2, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A_2}{r^2} + B_2(3+2 \log r) + 2C_2, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

다음에 境界條件들을 利用하여 積分常數들을 決定한다. 여기서는 演算을 간단히 하기 위하여 無限遠點에서의 均一引張力  $f_r$  를 1로 잡는다.

境界條件 (1):  $r = \infty$  에서  $\sigma_r = \sigma_\theta = 1, \tau_{r\theta} = 0$

이라는 條件을 式 (5)에 代入하면,

$$B_1 = 0, \quad 2C_1 = 1 \quad (a)$$

을 얻고, 따라서  $r = b$  와  $r = \infty$  사이의 板속의 應力分布를 表示하는 式 (5)는 다음 꼴로 된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_1}{r^2} + 1, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A_1}{r^2} + 1, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

境界條件 (2):  $r = a$  에서  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  이라는 條件을 式 (6)에 代入하면,

$$\frac{A_2}{a^2} + B_2(1+2 \log a) + 2C_2 = 0 \quad (b)$$

을 얻는데, 여기서는  $B_2 = 0$  으로 놓아야 모든 境界條件이 滿足되며, 따라서 環속에서의 應力分布를 表示하는 式 (6)은 다음 꼴로 된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_2}{r^2} + 2C_2, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A_2}{r^2} + 2C_2, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

境界條件 (3): 板과 環의 두께를 각각  $t$  라 하고, 式 (7) 및 (8)을 利用하면, 板과 環의 接着面( $r=b$ )에서의 힘의 平衡條件은 다음과 같이 表示된다:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{A_1}{b^2} + 1 = -\frac{A_2}{b^2} + 2C_2, \\ 0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

境界條件 (4): 板과 環의 彈性係數 및 Poisson 比를 각각  $E_1, E_2$  및  $\mu_1, \mu_2$  라 하고, 板과 環의 接着面 ( $r=b$ )에서의 變位를 成分別로 等置하면 다음의 關係式을 얻는다:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_1} \left[ -(1+\mu_1) \frac{A_1}{b} + (1-\mu_1)b \right] = \frac{1}{E_2} \left[ -(1+\mu_2) \frac{A_2}{b} + 2(1-\mu_2)C_2b \right], \\ 0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$E_2/E_1=n$  으로 놓고, 式 (b), (c) 및 (d)를 聯立하여 풀면,  $A_1, A_2$  및  $C_2$ 가 決定되고, 그 값들을 式 (7) 및 (8)에 넣으면 板과 環 속에서의 應力分布가 完全히 決定된다.

以上の 結果를 均一 2軸引張荷重이  $f_T$  인 경우에 對하여 整理하면 다음과 같다:

板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = f_T \left( \frac{A_1}{r^2} + 1 \right), \\ \sigma_\theta = f_T \left( -\frac{A_1}{r^2} + 1 \right), \\ \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = f_T \left( \frac{A_2}{r^2} + 2C_2 \right), \\ \sigma_\theta = f_T \left( -\frac{A_2}{r^2} + 2C_2 \right), \\ \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

但

$$\left. \begin{aligned} A_1 = \frac{(1-\mu_1)(1-m^2)n - (1+\mu_2)m^2 - (1-\mu_2)}{(1+\mu_1)(1-m^2)n + (1+\mu_2)m^2 + (1-\mu_2)} \cdot b^2, \\ A_2 = \frac{-2m^2n}{(1+\mu_1)(1-m^2)n + (1+\mu_2)m^2 + (1-\mu_2)} \cdot b^2, \\ C_2 = \frac{n}{(1+\mu_1)(1-m^2)n + (1+\mu_2)m^2 + (1-\mu_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2-1-2. 純粹剪斷狀態

이 경우에는 應力分布가  $r$  과  $\theta$  의 函數이므로 應力 函數  $\phi$  도  $r$  과  $\theta$  의 函數로 되고, 適合條件式은

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (12)$$

의 形式으로 되고, 그 一般解를 다음 꼴로 쓸 수 있다 [1], [2], [11]:

$$\phi = (hr^2 + \frac{k}{r^2} + pr^4 + q) \sin 2\theta, \quad (13)$$

여기서  $h, k, p$  및  $q$ 는 積分常數이다. 따라서 應力成分들은 다음 꼴로 表示된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(-2h - \frac{4q}{r^2} - \frac{6k}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \left(12pr^2 + 2h + \frac{6k}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \left(-6pr^2 - 2h + \frac{2q}{r^2} + \frac{6k}{r^4}\right) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

이들 式은, 積分常數만 달리하면, 板과 環에 대하여 適用되는 것이므로, 板과 環에서의 應力分布를 각각 다음과 같이 表示할 수 있다:

板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(-2e - \frac{4d}{r^2} - \frac{6c}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \left(12fr^2 + 2e + \frac{6c}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \left(-6fr^2 - 2e + \frac{2d}{r^2} + \frac{6c}{r^4}\right) \cos 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(-2B - \frac{4D}{r^2} - \frac{6C}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \left(12Fr^2 + 2B + \frac{6C}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \left(-6Fr^2 - 2B + \frac{2D}{r^2} + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

다음에 境界條件들을 利用하여 積分常數들을 決定한다. 여기서도 演算을 간단히 하기 爲하여 無限遠點에서의 均一剪斷應力  $f_s$  를 1 로 잡는다.

境界條件 (1):  $r = \infty$  에서  $\sigma_r = \sin 2\theta$ ,  $\sigma_\theta = -\sin 2\theta$ ,  $\tau_{r\theta} = \cos 2\theta$  라는 條件을 式 (15)에 代入하면,

$$f=0, \quad 2e=-1 \quad (e)$$

을 얻고, 따라서 板 속의 應力成分을 表示하는 式 (15)는 다음 꼴로 된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(1 - \frac{4d}{r^2} - \frac{6c}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \left(-1 + \frac{6c}{r^4}\right) \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \left(1 + \frac{2d}{r^2} + \frac{6c}{r^4}\right) \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

境界條件 (2):  $r = a$  에서  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  이라는 條件을 式 (16)에 代入하면,

$$\left. \begin{aligned} C &= Ba^4 + 2Fa^6, \\ D &= -2Ba^2 - 3Fa^4 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

을 얻고, 이것을 式 (16)에 代入하면 環 속에서의 應力分布가 다음 꼴로 表示된다:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left[ B \left( -2 + \frac{8a^2}{r^2} - \frac{6a^4}{r^4} \right) + F \left( \frac{12a^4}{r^2} - \frac{12a^6}{r^4} \right) \right] \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \left[ B \left( 2 + \frac{6a^4}{r^4} \right) + F \left( 12r^2 + \frac{12a^6}{r^4} \right) \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \left[ B \left( -2 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{6a^4}{r^4} \right) + F \left( -6r^2 - \frac{6a^4}{r^2} + \frac{12a^6}{r^4} \right) \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

境界條件 (3): 板과 環의 接着面 ( $r=b$ )에서의 힘의 平衡條件은 다음과 같이 표시된다:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{4d}{b^2} - \frac{6c}{b^4} &= B \left( -2 + \frac{8a^2}{b^2} - \frac{6a^4}{b^4} \right) + F \left( \frac{12a^4}{b^2} - \frac{12a^6}{b^4} \right), \\ 1 + \frac{2d}{b^2} + \frac{6c}{b^4} &= B \left( -2 - \frac{4a^2}{b^2} + \frac{6a^4}{b^4} \right) + F \left( -6b^2 - \frac{6a^4}{b^2} + \frac{12a^6}{b^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

境界條件 (4): 板과 環의 接着面 ( $r=b$ )에서의 變位를 成分別로 等置하면 다음의 關係式을 얻는다:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_1} \left\{ (1+\mu_1) + \frac{4d}{b^2} + 2(1+\mu_1) \frac{c}{b^4} \right\} &= \frac{1}{E_2} \left\{ B \left[ -2(1+\mu_2) - \frac{8a^2}{b^2} + 2(1+\mu_2) \frac{a^4}{b^4} \right] \right. \\ &\quad \left. + F \left[ -4\mu_2 b^2 - \frac{12a^4}{b^2} + 4(1+\mu_2) \frac{a^6}{b^4} \right] \right\}, \\ \frac{1}{E_1} \left\{ (1+\mu_1) + 2(1-\mu_1) \frac{d}{b^2} - 2(1+\mu_1) \frac{c}{b^4} \right\} &= \frac{1}{E_2} \left\{ B \left[ -2(1+\mu_2) - 4(1-\mu_2) \frac{a^2}{b^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(1+\mu_2) \frac{a^4}{b^4} \right] + F \left[ -2(3+\mu_2)b^2 - 6(1-\mu_2) \frac{a^4}{b^2} - 4(1+\mu_2) \frac{a^6}{b^4} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

式 (g)와 (h)를 聯立하여 풀면 積分常數  $B, F, c$ , 및  $d$ 를 決定할 수 있고, 그 값들을 式 (17) 및 (18)에 代入하면 板과 環에서의 應力分布가 完全히 決定된다.

여기서는 式들의 모양을 간단히 하기 위하여 새로운 常數  $d_1=d/b^2$ ,  $c_1=c/b^4$ ,  $F_1=Fb^2$ , 및  $B_1=B$ 를 導入하고 記號  $m=a/b$ 를 使用하면, 純粹剪斷應力이  $f_s$ 인 경우의 應力分布는 다음과 같이 表示된다:

板에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_s \left[ 1 - 4d_1 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= f_s \left[ -1 + 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= f_s \left[ 1 + 2d_1 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 6c_1 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

環에 對하여,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_s \left[ B_1 \left\{ -2 + 8m^2 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} + F_1 \left\{ 12m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right] \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= f_s \left[ B_1 \left\{ 2 + 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} + F_1 \left\{ 12 \left( \frac{r}{b} \right)^2 + 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= f_s \left[ B_1 \left\{ -2 - 4m^2 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} + F_1 \left\{ -6 \left( \frac{r}{b} \right)^2 - 6m^4 \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 12m^6 \left( \frac{b}{r} \right)^4 \right\} \right] \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

但, 이들 式 속의 積分常數  $c_1, d_1, B_1$ , 및  $F_1$ 은 다음 4元聯立方程式의 根이다.

$$\left. \begin{aligned} 1 - 4d_1 - 6c_1 &= B_1(-2 + 8m^2 - 6m^4) + F_1(12m^4 - 12m^6), \\ 1 + 2d_1 + 6c_1 &= B_1(-2 - 4m^2 + 6m^4) + F_1(-6 - 6m^4 + 12m^6), \\ n(1+\mu_1) + 4nd_1 + 2n(1+\mu_1)c_1 &= B_1[-2(1+\mu_2) - 8m^2 + 2(1+\mu_2)m^4] + F_1[-4\mu_2 - 12m^4 + 4(1+\mu_2)m^6], \\ n(1+\mu_1) + 2n(1-\mu_1)d_1 - 2n(1+\mu_1)c_1 &= B_1[-2(1+\mu_2) - 4(1-\mu_2)m^2 - 2(1+\mu_2)m^4] \\ &\quad + F_1[-2(3+\mu_2) - 6(1-\mu_2)m^4 - 4(1+\mu_2)m^6]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

2-2. 數 值 計 算

實驗에 使用할 模型의 母板이 CR-39 ( $E_1=328 \times 10^3$  psi,  $\mu_1=0.42$ ), 補強環이 PSM-5 ( $E_2=460 \times 10^3$  psi,  $\mu_2=0.36$ )이고,  $m(=a/b)$ 의 影響도 調査하고자 하였으므로,

$$n = E_2/E_1 = 1.4,$$

$$\mu_1 = 0.42, \mu_2 = 0.36,$$

$$m = 0, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$$

인 경우에 대하여 式 (11) 및 (21)로부터 積分常數들을 決定하였고, 式 (9), (10) 및 (19), (20)으로부터 應力 分布를 計算한 뒤에, 이들로로부터 主應力과 最大剪斷應力들을 求하였다.

이들 경우의 應力分布는 對稱的이므로, 한 象限內에서의 應力分布만을 計算하기로 하고, Fig. 4에 보인 바와 같이, 母板內에 42個點과 補強環內에 35個點을 取하였다.

그 點들의 座標 ( $r, \theta$ )는 다음과 같다:

母板  $r = 1.0b, 1.2b, 1.5b, 2b, 3b, 4b,$

$$\theta = -45^\circ, -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ,$$

補強環  $r = a, a + \frac{1}{4}(b-a), a + \frac{1}{2}(b-a), a + \frac{3}{4}(b-a), b,$

$$\theta = -45^\circ, -30^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ.$$

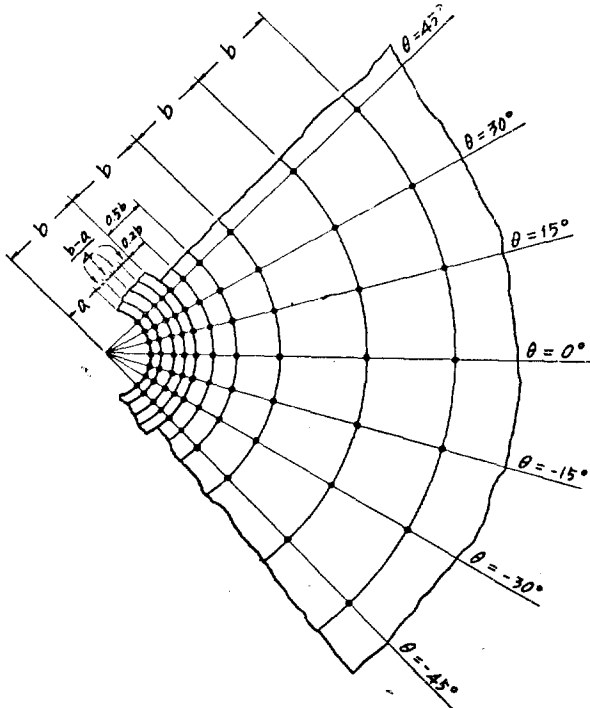


Fig. 4. Points where the stresses were computed

Table 1은 式 (11) 및 (21)로부터 計算된 積分常數들의 값이고, Fig. 5는  $m$ 에 따르는 그들의 變化를 曲線으로 나타낸 것이다.

Table 2는 均一 2軸引張荷重下에서의 應力分布를 式 (9) 및 (10)으로부터 計算한 값들이고, Fig. 6은 그 값들로부터 計算한 主應力과 最大剪斷應力의 分布를 曲線으로 나타낸 것이다.



Table 1. Values of the Constants determining stress distributions.

$m$	$A_1/b^2$	$A_2/b^2$	$C_2$	$B_1$	$F_1$	$c_1$	$d_1$
0	0.06545	0.0	0.53272	-0.56315	0.0	0.06315	-0.12631
0.3	-0.00913	-0.09800	0.54443	-0.59328	0.01315	0.06220	-0.04065
0.5	-0.15014	-0.28329	-0.56657	-0.64215	0.03213	0.03875	0.12715
0.6	-0.25393	-0.41966	-0.58287	-0.66991	0.04077	0.00535	0.24897
0.7	-0.38456	-0.59131	0.60338	-0.69488	0.04558	-0.05240	0.39513
0.8	-0.54719	-0.80500	0.62891	-0.71226	0.04347	-0.14364	0.56417
0.9	-0.74898	-1.07015	0.66059	-0.71662	0.03058	-0.28221	0.75924
1.0	-1	-1.4	0.7	-0.7	0.0	-0.5	1.0

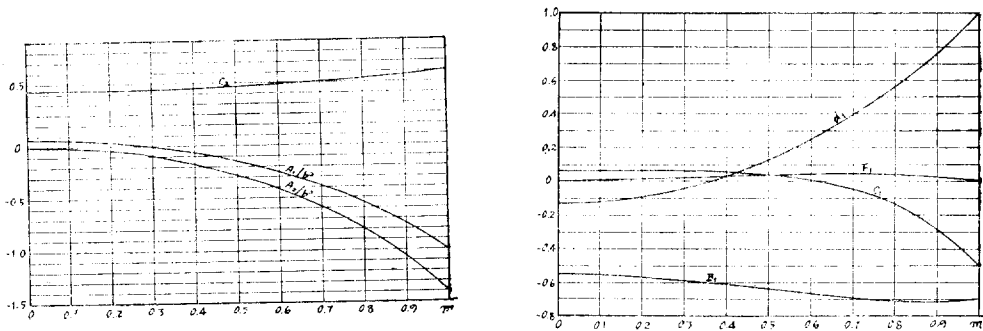


Fig. 5. Variations of Constants vs Ratio  $m$

Table 2-1. Stress Distributions in the plate under Hydrostatic Tension Loading

$m$	$r = b$			$r = 1.2b$			$r = 1.5b$		
	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$
0	1.0655	0.9346	0	1.0455	0.9546	0	1.0291	0.9709	0
0.3	0.9909	1.0091	0	0.9937	1.0063	0	0.9959	1.0041	0
0.5	0.8500	1.1501	0	0.8957	1.1043	0	0.9333	1.0667	0
0.6	0.7461	1.2539	0	0.8236	1.1763	0	0.8871	1.1129	0
0.7	0.6154	1.3846	0	0.7329	1.2671	0	0.8291	1.1709	0
0.8	0.4528	1.5472	0	0.6200	1.3800	0	0.7568	1.2432	0
0.9	0.2510	1.7490	0	0.4799	1.5201	0	0.6671	1.3329	0
1.0	0.0	2.0	0	0.3056	1.6944	0	0.5556	1.4444	0

$m$	$r = 2b$			$r = 3b$			$r = 4b$		
	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$
0	1.0164	0.9836	0	1.0073	0.9927	0	1.0041	0.9959	0
0.3	0.9977	1.0023	0	0.9990	1.0010	0	0.9994	1.0006	0
0.5	0.9625	1.0375	0	0.9833	1.0167	0	0.9906	1.0094	0
0.6	0.9365	1.0635	0	0.9718	1.0282	0	0.9841	1.0159	0
0.7	0.9039	1.0961	0	0.9583	1.0427	0	0.9760	1.0240	0
0.8	0.8632	1.1368	0	0.9392	1.0608	0	0.9658	1.0342	0
0.9	0.8128	1.1872	0	0.9168	1.0832	0	0.9532	1.0468	0
1.0	0.75	1.25	0	0.8889	1.1111	0	0.9375	1.0625	0

Table 2-2. Strees Distributions in the Ring under Hydrostatic Tension Loading

m	r = a			$r = a + \frac{1}{4}(b-a)$			$r = a + \frac{1}{2}(b-a)$			$r = a + \frac{3}{4}(b-a)$			r = b		
	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$	$\sigma_r/f_T$	$\sigma_\theta/f_T$	$\tau_{r\theta}/f_T$
0	1.0654	1.0654	0	1.0654	1.0654	0	1.0654	1.0654	0	1.0654	1.0654	0	1.0654	1.0654	0
0.3	0.0000	2.1777	0	0.6545	1.5232	0	0.8569	1.3208	0	0.9449	1.2328	0	0.9909	1.1869	0
0.5	0.0000	2.2663	0	0.4079	1.8584	0	0.6295	1.6368	0	0.7631	1.5032	0	0.8499	1.4164	0
0.6	0.0000	2.3315	0	0.3093	2.0222	0	0.5100	1.8215	0	0.6476	1.6838	0	0.7461	1.5854	0
0.7	0.0000	2.4135	0	0.2223	2.1913	0	0.3883	2.0252	0	0.5157	1.8978	0	0.6155	1.7981	0
0.8	0.0000	2.5156	0	0.1436	2.3720	0	0.2640	2.2517	0	0.3659	2.1498	0	0.4528	2.0628	0
0.9	0.0000	2.6424	0	0.0705	2.5719	0	0.1354	2.5069	0	0.1955	2.4469	0	0.2510	2.3913	0
1.0	0.0	2.8	0	0.0	2.8	0	0.0	2.8	0	0.0	2.8	0	0.0	2.8	0

Table 3-1. Stress Distributions in the Plate under Pure Shear Loading

m	r = b			r = 1.2b			r = 1.5b		
	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$
0	1.1263	-0.6211	1.1263	1.1681	-0.8173	1.0073	1.1497	-0.9252	0.9626
0.3	0.7894	-0.6268	1.2919	0.9329	-0.8200	1.1235	0.9985	-0.9262	1.0376
0.5	0.2589	-0.7675	1.4868	0.5347	-0.8879	1.2887	0.7280	-0.9540	1.1590
0.6	-0.0280	-0.9679	1.5301	0.2929	-0.9845	1.3613	0.5510	-0.9937	1.2277
0.7	-0.2661	-1.3144	1.4759	0.0540	-1.1516	1.3972	0.3596	-1.0621	1.2891
0.8	-0.3949	-1.8618	1.2665	-0.1515	-1.4156	1.3680	0.1673	-1.1702	1.3313
0.9	-0.3437	-2.6933	0.8252	-0.2924	-1.8166	1.2379	-0.0153	-1.3345	1.3404
1.0	0.0	-4	0.0	-0.3310	-2.4468	0.9421	-0.1852	-1.5926	1.2963

m	r = 2b			r = 3b			r = 4b		
	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$	$\frac{\sigma_r}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\sigma_\theta}{f_S \cdot \sin 2\theta}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{f_S \cdot \cos 2\theta}$
0	1.1026	-0.9763	0.9605	1.0515	-0.9953	0.9766	1.0301	-0.9985	0.9857
0.3	1.0173	-0.9767	1.0030	1.0135	-0.9954	0.9956	1.0087	-0.9985	0.9964
0.5	0.8583	-0.9855	1.0781	0.9464	-0.9971	1.0311	0.9673	-0.9991	1.0163
0.6	0.7490	-0.9980	1.1265	0.8889	-0.9996	1.0557	0.9376	-0.9999	1.0312
0.7	0.6245	-1.0196	1.1779	0.8283	-1.0039	1.0839	0.9024	-1.0012	1.0482
0.8	0.4897	-1.0539	1.2282	0.7599	-1.0106	1.1147	0.8623	-1.0034	1.0672
0.9	0.3466	-1.1058	1.2738	0.6835	-1.0209	1.1478	0.8168	-1.0066	1.0883
1.0	0.1875	-1.1875	1.3125	0.5926	-1.0370	1.1852	0.7617	-1.0117	1.1133

Table 3-2. Stress Distributions in the Ring under Pure Shear Loading

m	r = a			r = a + \frac{1}{4}(b-a)			r = a + \frac{1}{2}(b-a)		
	\frac{\sigma_r}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\sigma_\theta}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\tau_{r\theta}}{f_s \cdot \cos 2\theta}	\frac{\sigma_r}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\sigma_\theta}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\tau_{r\theta}}{f_s \cdot \cos 2\theta}	\frac{\sigma_r}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\sigma_\theta}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\tau_{r\theta}}{f_s \cdot \cos 2\theta}
0	0	-4.5052	0	1.1263	-1.1263	1.1263	1.1263	-1.2163	1.1263
0.3	0	-4.7179	0	-0.1369	-1.7151	1.5484	0.3394	-1.2808	1.4965
0.5	0	-4.9444	0	-0.4031	-2.6723	1.2834	-0.2140	-1.8094	1.5540
0.6	0	-5.0070	0	-0.3937	-3.1746	1.0494	-0.3596	-2.2427	1.4250
0.7	0	-5.0230	0	-0.3302	-3.6572	0.7868	-0.4042	-2.7890	1.1919
0.8	0	-5.0303	0	-0.2357	-4.1389	0.5206	-0.3543	-3.4615	0.8729
0.9	0	-5.1384	0	-0.1256	-4.7062	0.2621	-0.2212	-4.3261	0.4829
1.0	0	-5.6	0	0.0	-5.6	0.0	0.0	-5.6	0.0

m	r = a + \frac{3}{4}(b-a)			r = b		
	\frac{\sigma_r}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\sigma_\theta}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\tau_{r\theta}}{f_s \cdot \cos 2\theta}	\frac{\sigma_r}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\sigma_\theta}{f_s \cdot \sin 2\theta}	\frac{\tau_{r\theta}}{f_s \cdot \cos 2\theta}
0	1.1263	-1.1263	1.1263	1.1263	-1.1263	1.1263
0.3	0.6228	-1.1412	1.3837	0.7894	-1.0575	1.2919
0.5	0.0388	-1.3896	1.5592	0.2589	-1.1335	1.4868
0.6	-0.2046	-1.7027	1.5343	-0.0280	-1.3487	1.5301
0.7	-0.3608	-2.2012	1.3913	-0.2661	-1.7795	1.4759
0.8	-0.3983	-2.9348	1.1099	0.3949	-2.5165	1.2665
0.9	-0.2925	-3.9902	0.6687	-0.3437	-3.6922	0.8252
1.0	0.0	-5.6	0.0	0.0	-5.6	0.0

Table 3 은 純粹剪斷荷重下에서의 應力分布를 式 (19) 및 (20)으로부터 계산한 값들이고, Fig. 7 및 8 은 그 값들로부터 계산한 主應力과 最大剪斷應力의 分布를 曲線으로 나타낸 것이다. 이들 線圖속에 들어있는 記號 <1>, <2>, <3>, ……는 다음과 같은 뜻이다:

- |                              |                   |
|------------------------------|-------------------|
| <1> r = a                    | <6> r = b (plate) |
| <2> r = a + \frac{1}{4}(b-a) | <7> r = 1.2b      |
| <3> r = a + \frac{1}{2}(b-a) | <8> r = 1.5b      |
| <4> r = a + \frac{3}{4}(b-a) | <9> r = 2b        |
| <5> r = b (ring)             | <10> r = 3b       |
|                              | <11> r = 4b       |

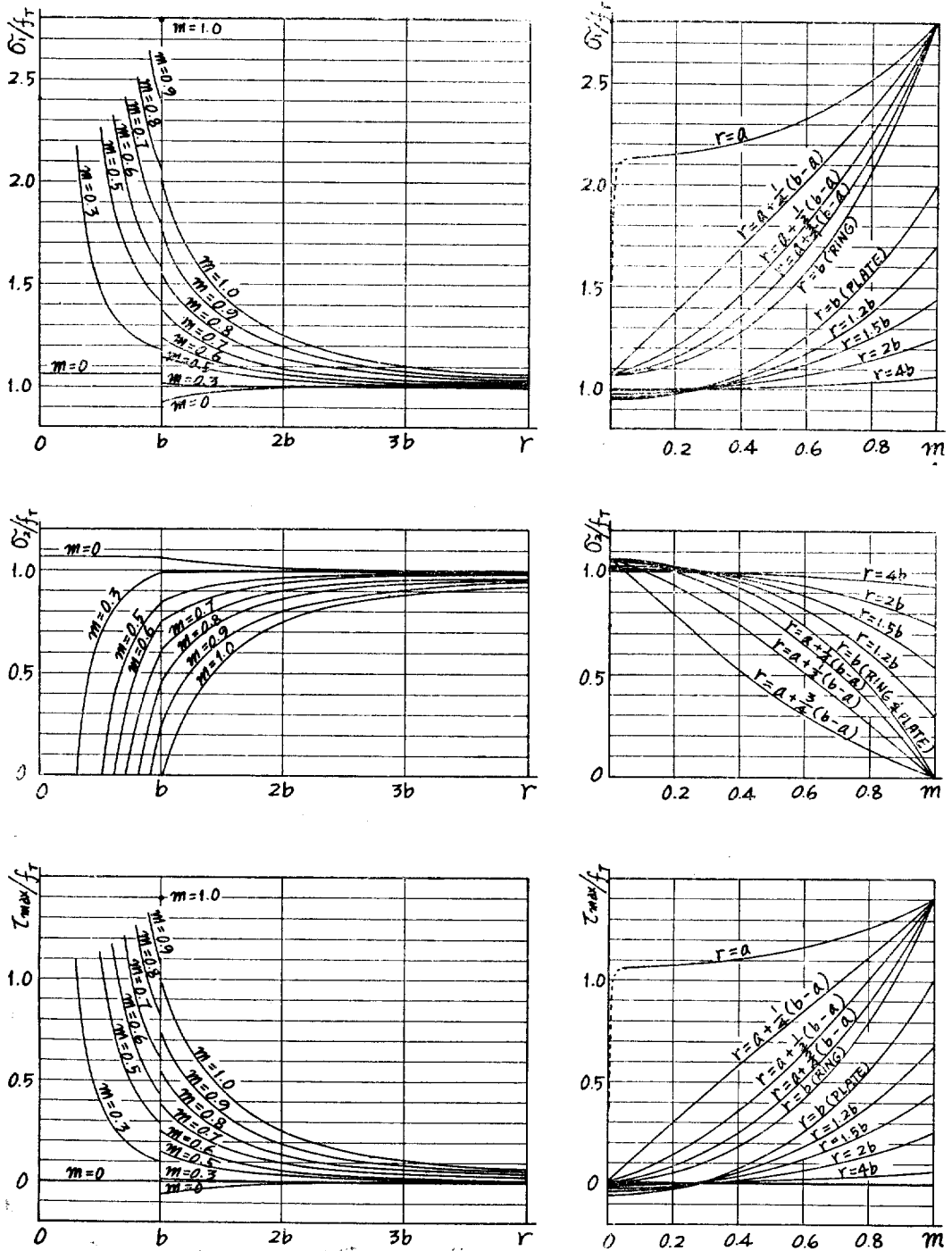


Fig. 6. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_T$ ,  $\sigma_2/f_T$  and  $\tau_{max}/f_T$  under Hydrostatic Tension Loading vs Distance  $r$  and Ratio  $m$ .

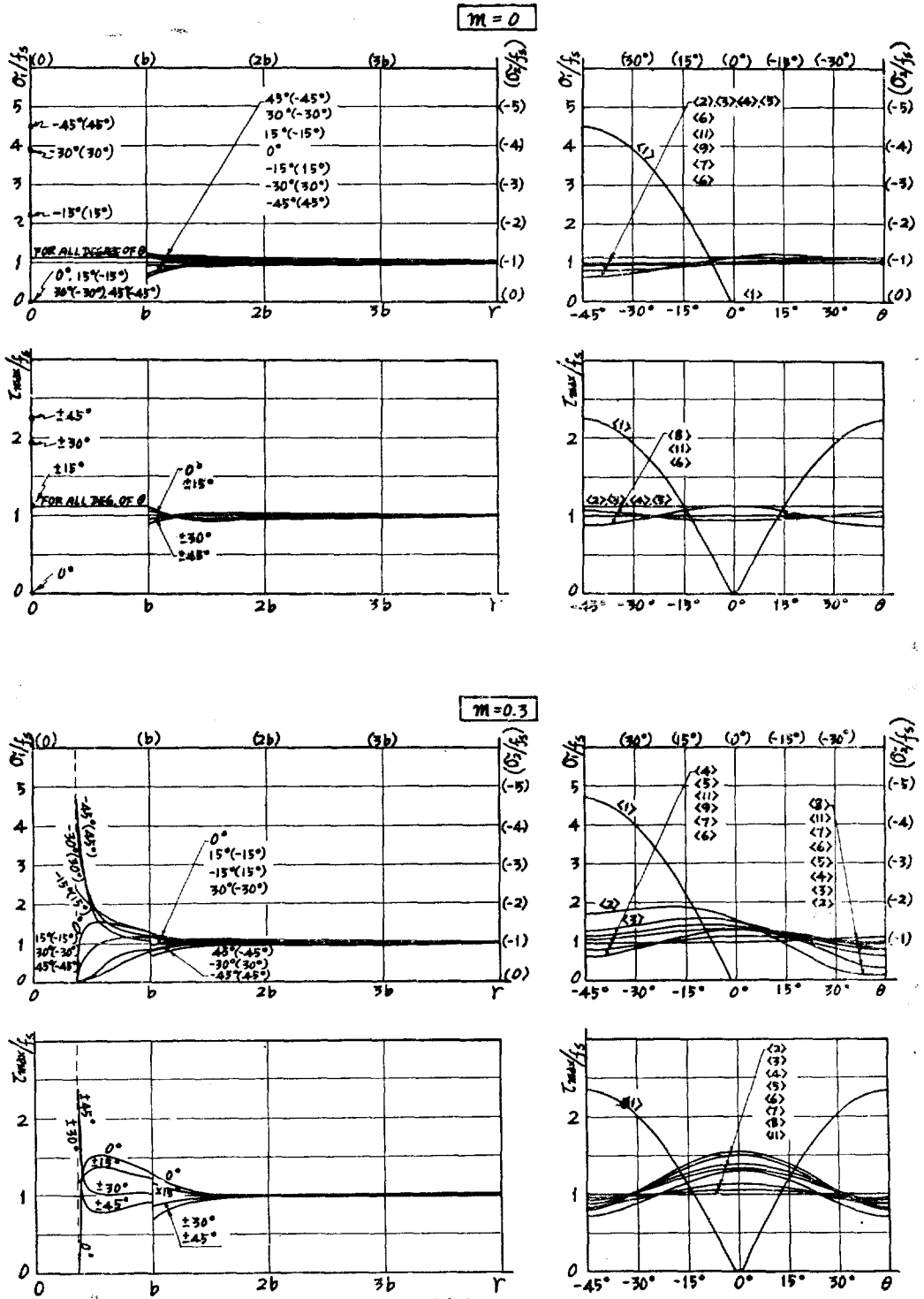


Fig. 7-1. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Distance  $r$  and Angle  $\theta$ .

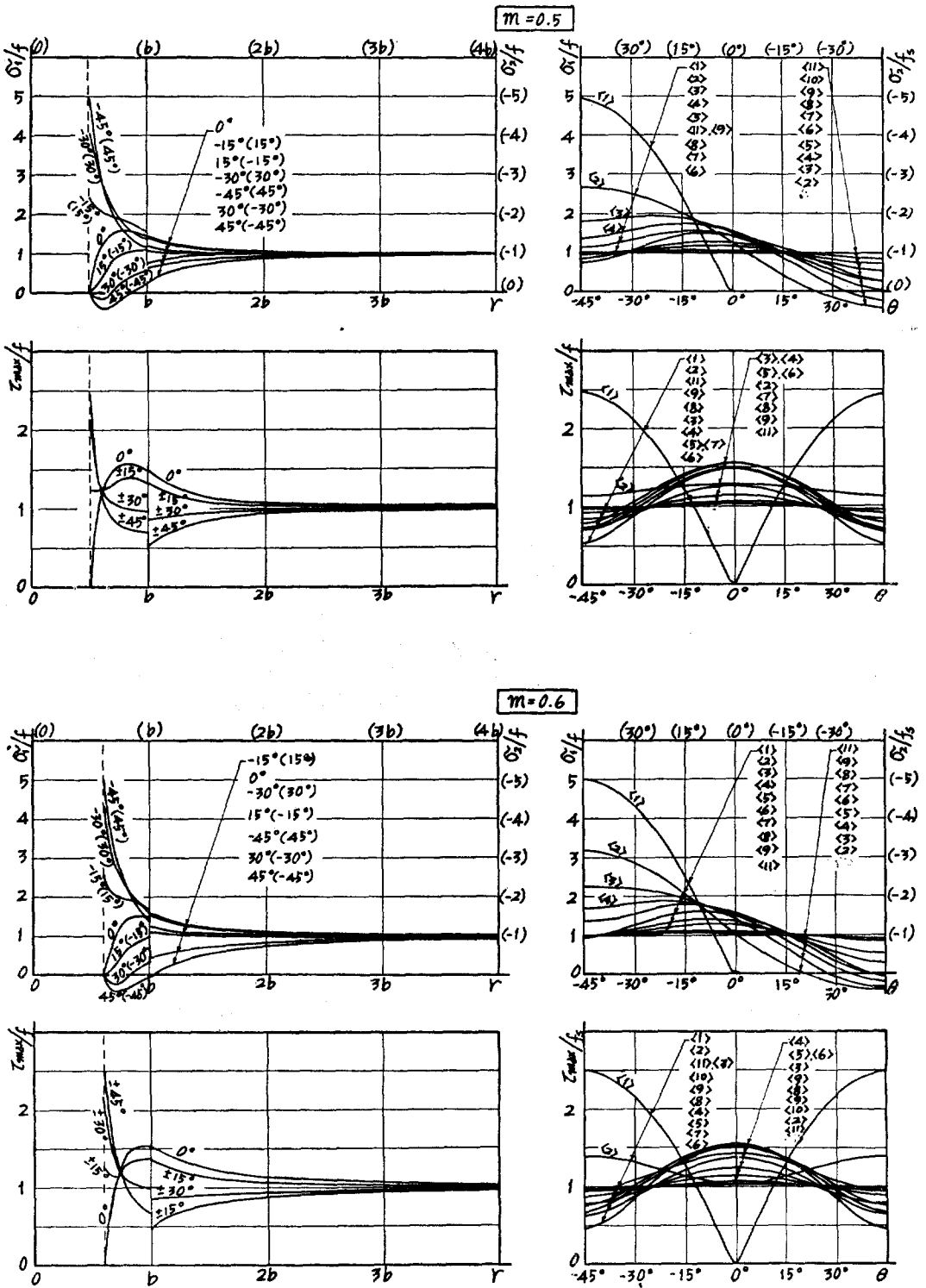
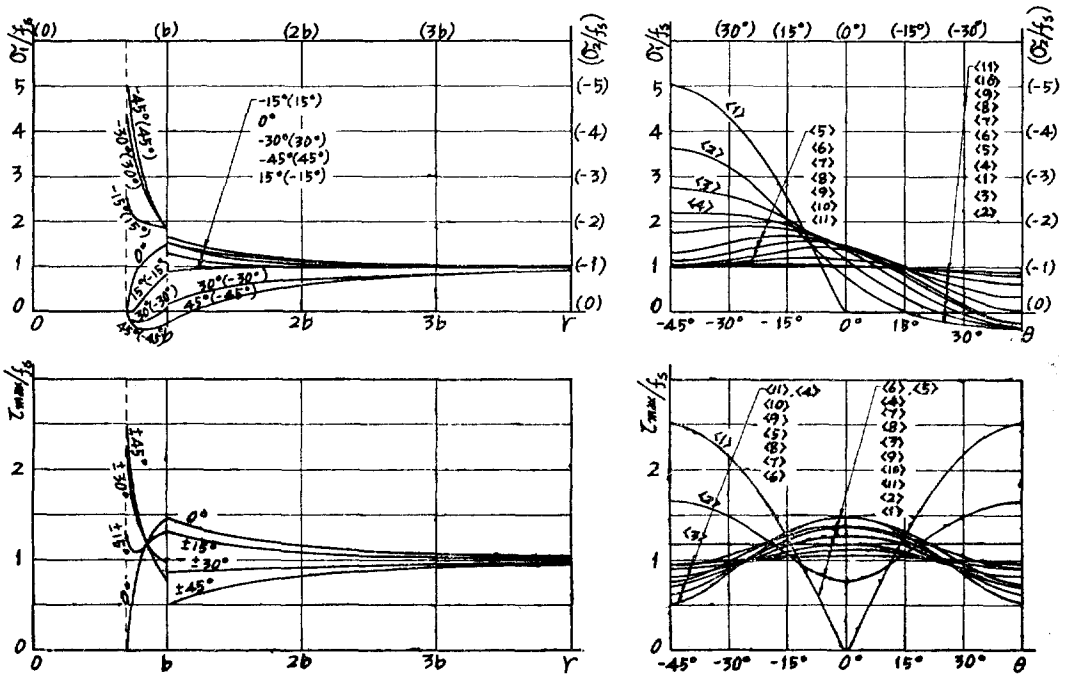


Fig. 7-2. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Distance  $r$  and Angle  $\theta$ .

$m=0.7$



$m=0.8$

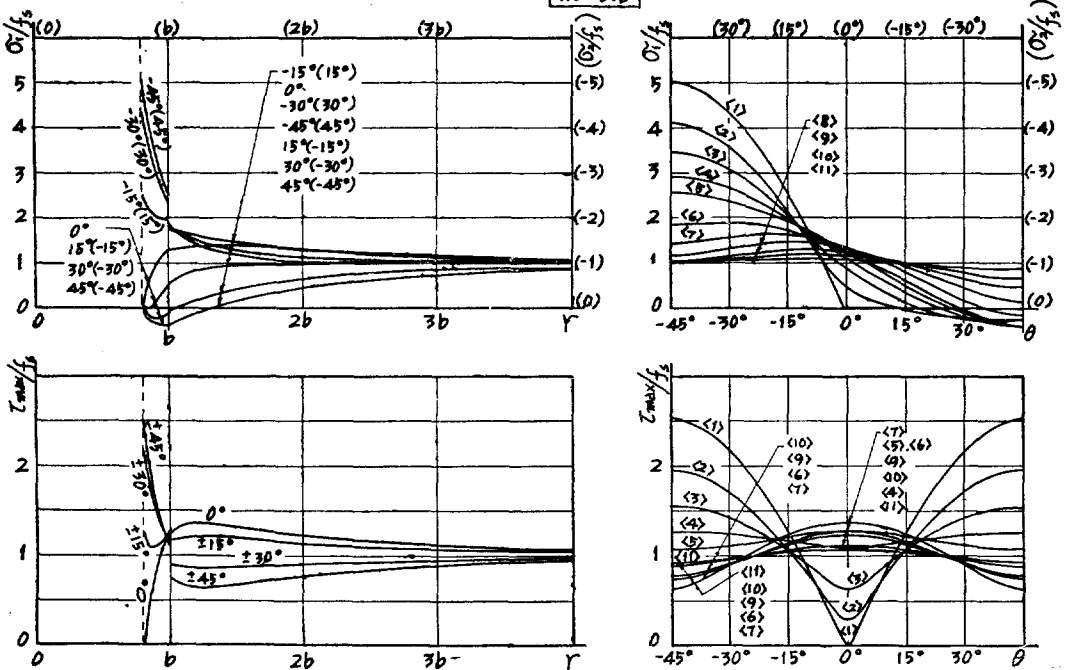
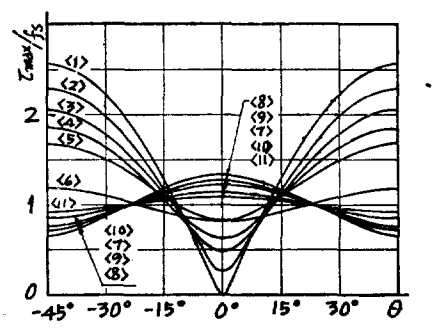
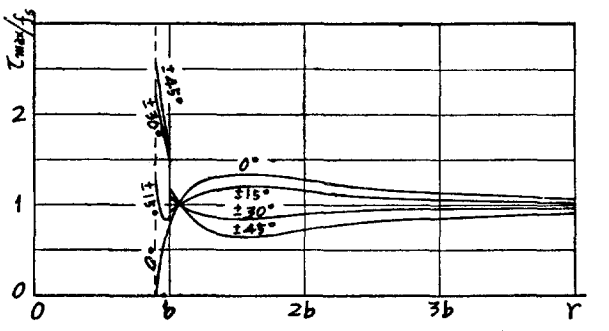
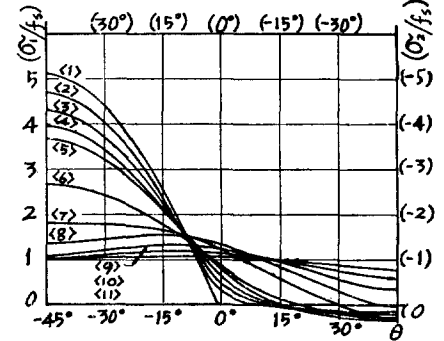
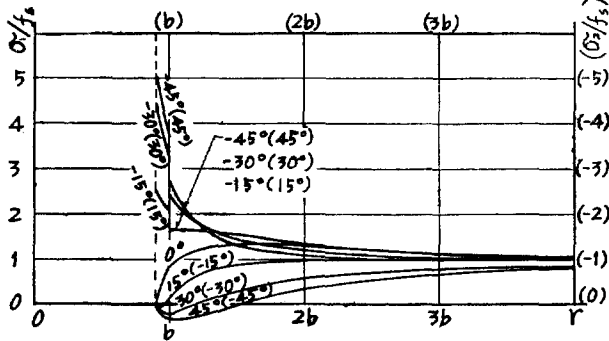


Fig. 7-3. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Distance  $r$  and Angle  $\theta$ .

$m = 0.9$



$m = 1.0$

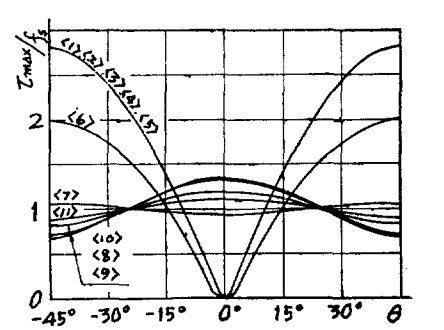
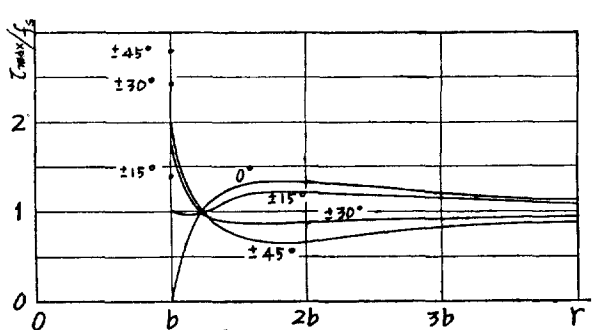
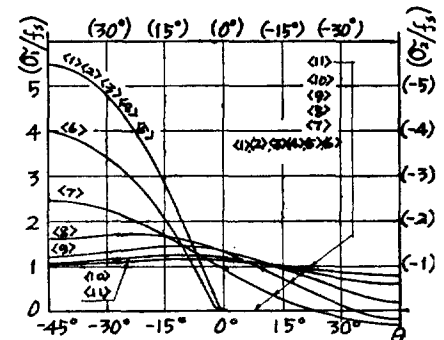
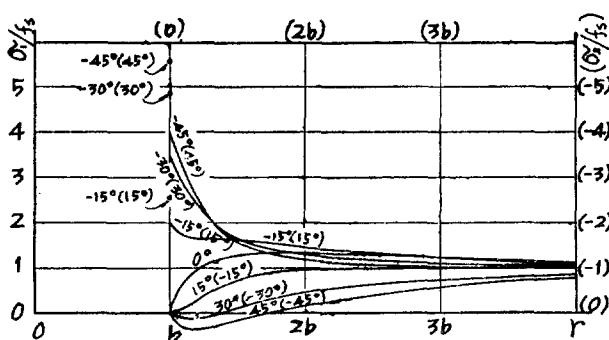


Fig. 7-4. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Distance  $r$  and Angle  $\theta$ .



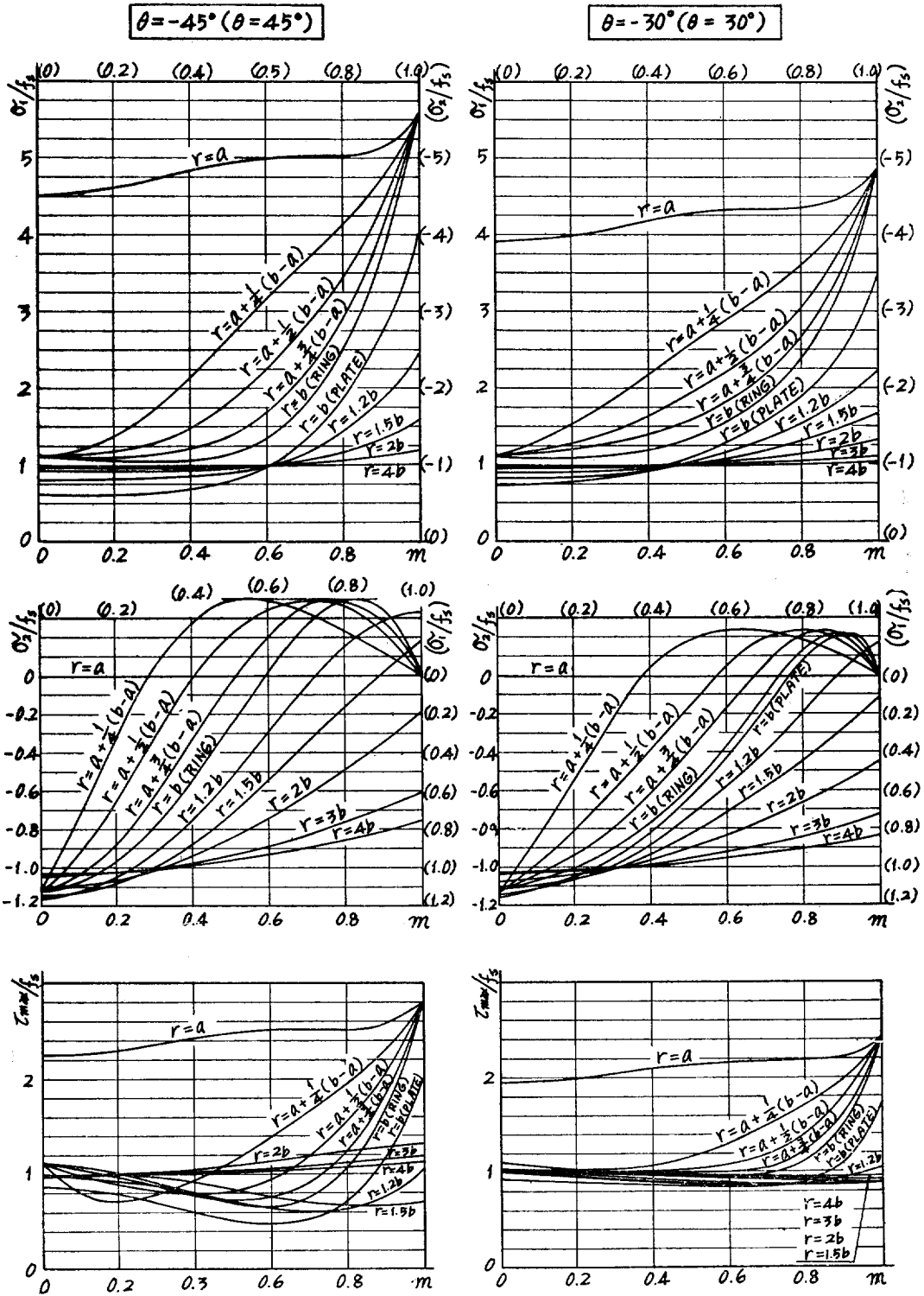


Fig. 8-1. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Ratio  $m$ .

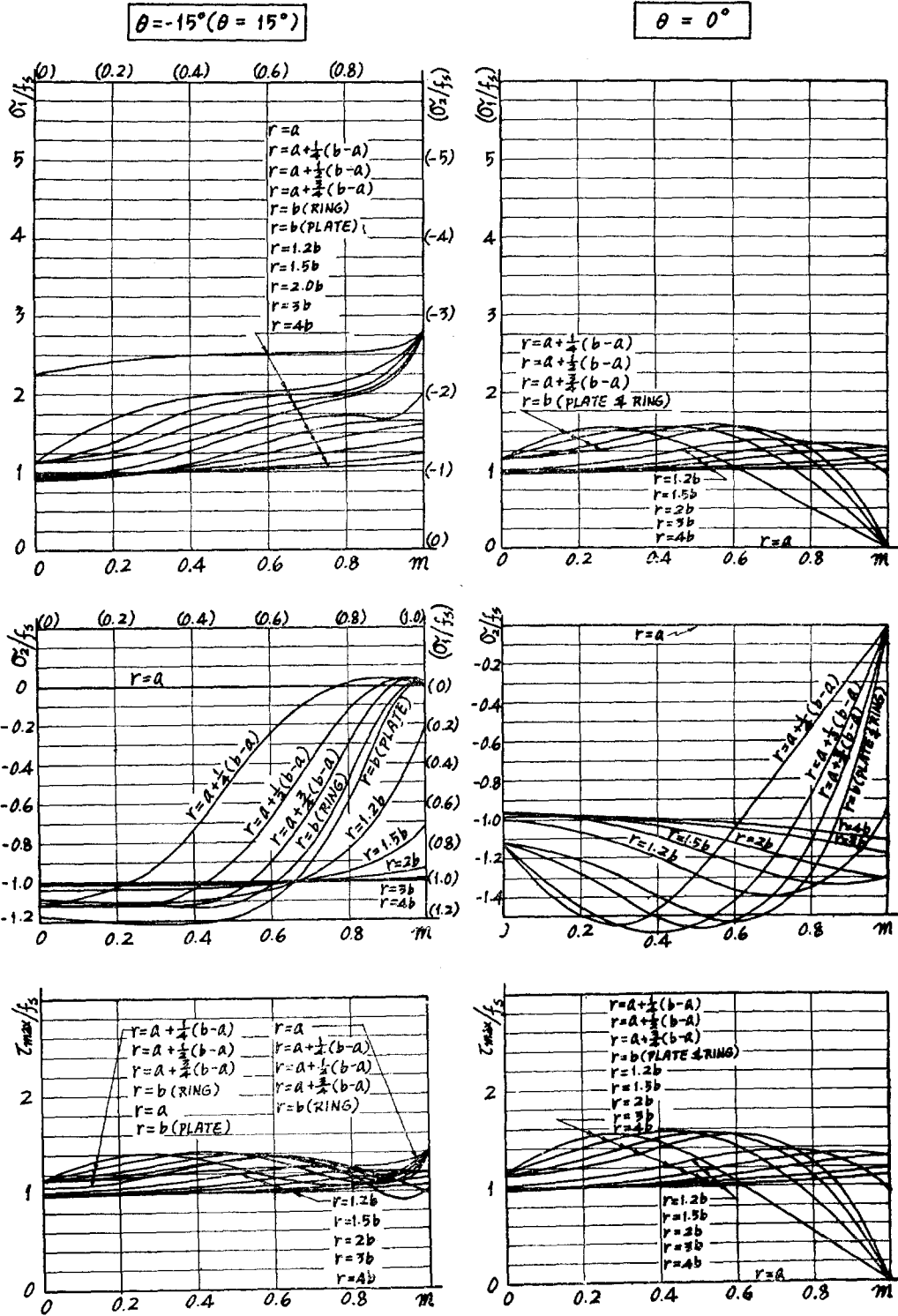


Fig. 8-2. Stress Concentration Factors  $\sigma_1/f_s$ ,  $\sigma_2/f_s$  and  $\tau_{max}/f_s$  under Pure Shear Loading vs Ratio  $m$ .

### 3. 實 驗

#### 3-1. 模型 및 實驗裝置

이 實驗에 쓰인 模型의 形狀 및 치수는 Fig. 9 와 같으며, 美國 Photolastic Inc. 製品인 CR-39 Sheet, PSM-5 Sheet, 및 PC-1C Cement 를 使用하였다. 模型의 製作에 있어서는 7×7 in 로 切斷한 CR-39 Sheet 의 中央에 直徑 2b=1 in 의 구멍을 뚫고, 같은 두께의 PSM-5 Sheet 로부터 만들어진 直徑 1 in 의 圓板을 PC-1C Cement 로 그 구멍에 接着한 後 그 中央에 구멍을 뚫은 것이다. 實驗을 進行하면서 順次의 으로 구멍의 直徑을 2a=0, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 in 로 擴大하여 감으로써  $m=a/b=0, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$  인 경우를 얻었다.

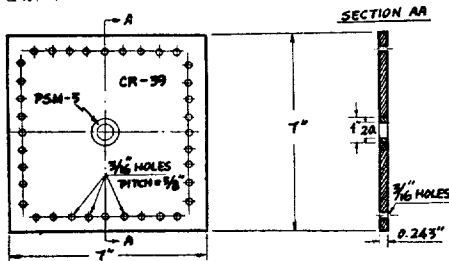


Fig. 9. Photoelastic Model

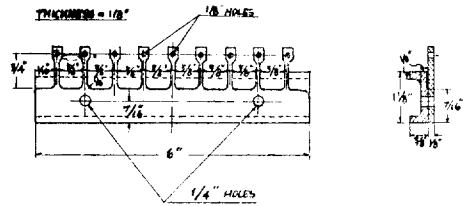


Fig. 10. Loading Bracket

이 模型의 周圍에는 가장자리로부터 0.5 in 안쪽에 各邊마다 9 個씩의 3/16 in 구멍을 뚫어 荷重用 Bracket 들을 固着할 수 있게 하였다. 荷重用 Bracket 는 黃銅製이며, 模型의 Poisson 効果로 因한 變形을 許容하면서 自身은 要求되는 韌性을 유지하게 하기 위하여 Fig. 10 의 모양으로 만들어져 있다.

上記 模型에 2 軸荷重을 걸기 위하여 Fig. 11 과 같은 荷重裝置를 考案製作하였다. 이 裝置의 本體 및 Transducer 는 ASTM 의 2024-T4 알루미늄이고, 荷重用 Bracket 및 連結具들은 黃銅이고, 볼트 및 너트는 鋼材로 만들어져 있다.

이 裝置의 上下側에 있는 4 個의 너트를 틀어 조이면 模型에 鉛直方向의 引張力이 걸리고, 左右外側에 있는 4 個의 너트를 틀어 조이면 模型에 水平方向의 引張力이 걸리고, 左右內側에 있는 4 個의 너트를 틀어 조이면 模型에 水平方向의 壓縮力이 걸리게 된다.

鉛直方向의 引張力을 計測하기 위하여, Fig. 11 에 보인 바와 같이, 模型의 下側과 本體 사이에 2 個의 Transducer 를 插入하였다. Transducer 의 形狀, 치수 및 Strain gage 의 附着位置는 Fig. 12 에 보인 바와 같다. 여기에 使用된 Strain gage 는 SR-4 Type A-5-1-S13 이며, Kodak 910 Cement 로 接着한 後 防濕 處理를 하였다. 이 Transducer 2 個를 Fig. 11 과 같이 놓고 回路를 Fig. 13 과 같이 構成하

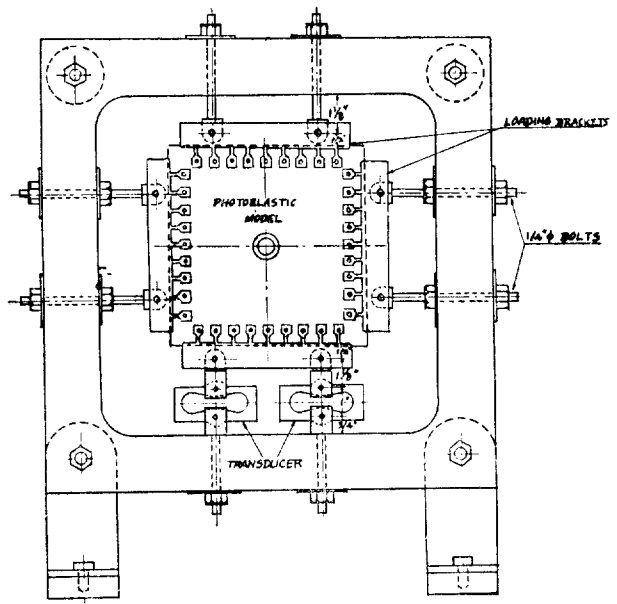


Fig. 11. Loading Frame

고 Strain Indicator (Type N; Baldwin-Lima-Hamilton Corp., Mass., U.S.A.)에 連結하였던바, 最大許容荷重은 1600 lb 이고 Gage Factor setting 2.1 에서  $2.5 \times 10^{-6}/lb$  의 出力을 얻었다.

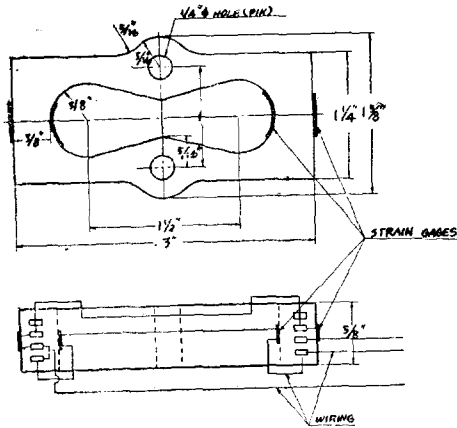
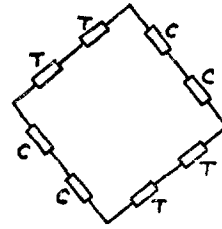


Fig. 12. Transducer



T : STRAIN GAUGE IN TENSION  
C : STRAIN GAUGE IN COMPRESSION

Fig. 13. Bridge

3-2. 實驗方法

먼저 模型材料인 CR-39 와 PSM-5 의 彈性係數, Poisson 比 및 Fringe value 를 決定하는 標準實驗을 하였으며, 다음과 같은 값들을 얻었다.

材 料	E	$\mu$	f (in shear)
CR-39	$328 \times 10^8$ psi	0.42	175 psi/fringe
PSM-5	$460 \times 10^8$ "	0.36	124 "

다음에 前記 模型을 2 軸荷重裝置에 裝着하여, Polariscope (Model No. 402; Photoelastic Instrument Co., N. Y., U. S. A.)內的 定位位置에 놓고 實驗하였다.

均一2 軸引張狀態는 鉛直과 水平方向의 引張力이 똑같은 狀態이며, 이때 模型의 中央部分에서의 應力分布는 回轉對稱이므로 Fringe 들은 Fig. 14 에 보인 바와 같이 구멍을 中心으로 한 同心圓形으로 된다.

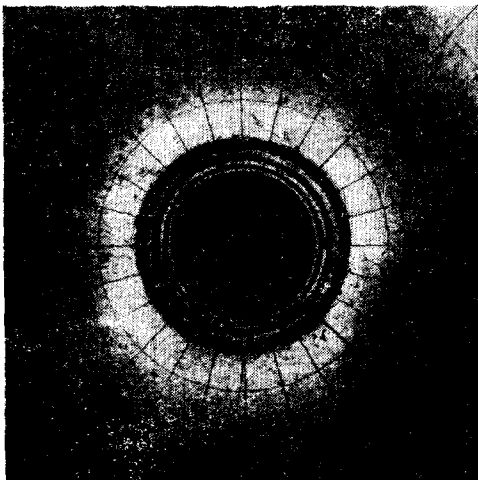


Fig. 14. Fringe pattern under hydrostatic tension.

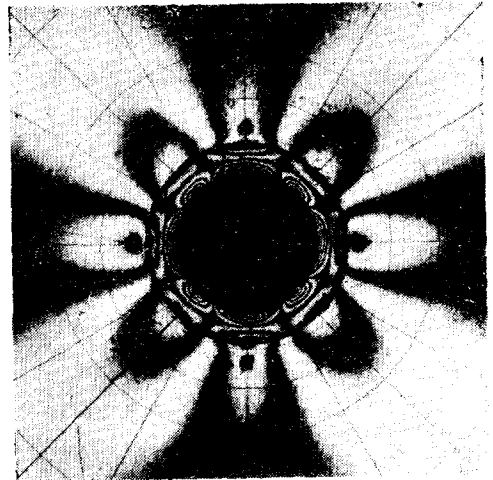


Fig. 15. Fringe pattern under pure shear

NOTE : THEORY  
EXPERIMENT

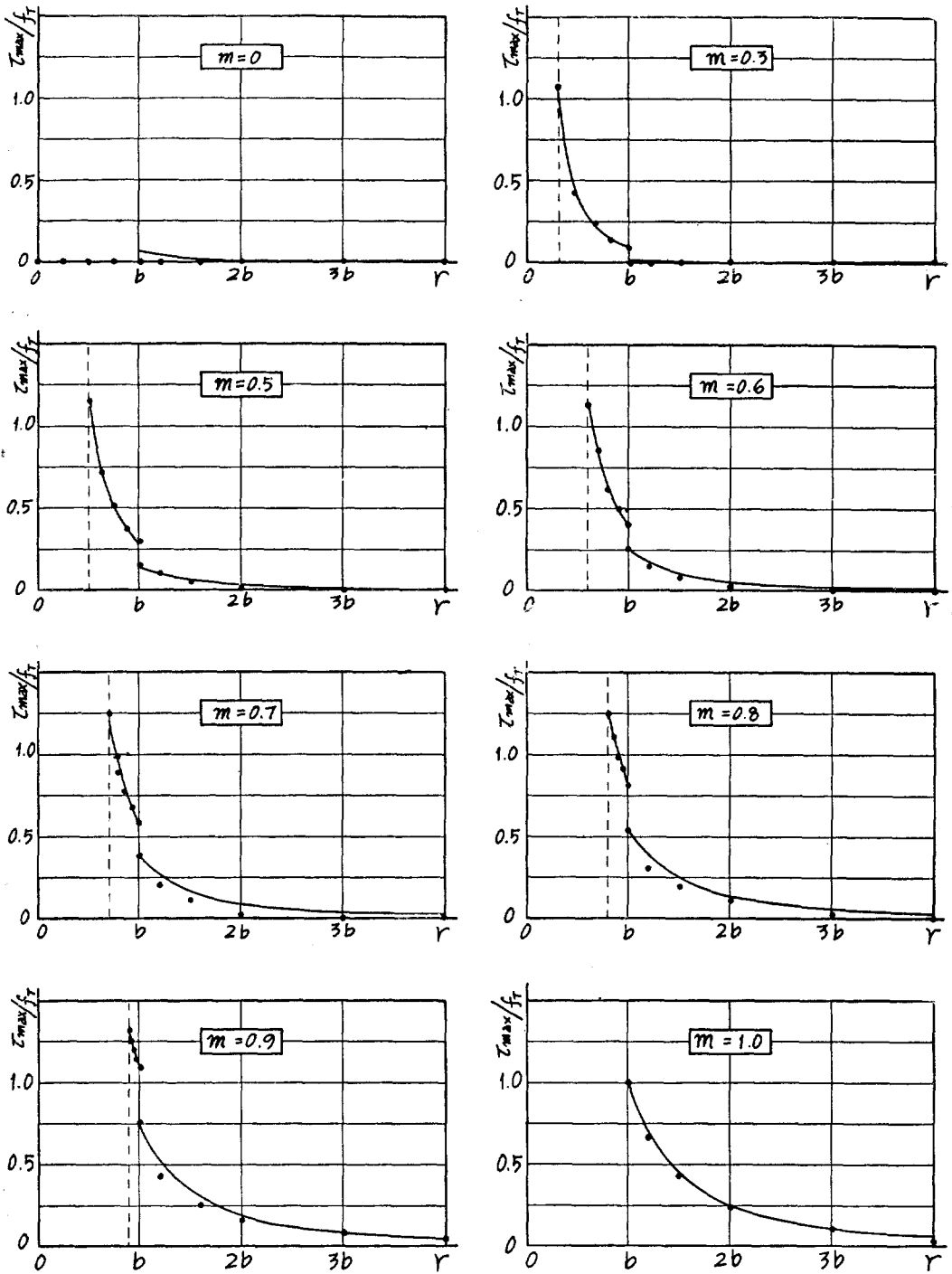
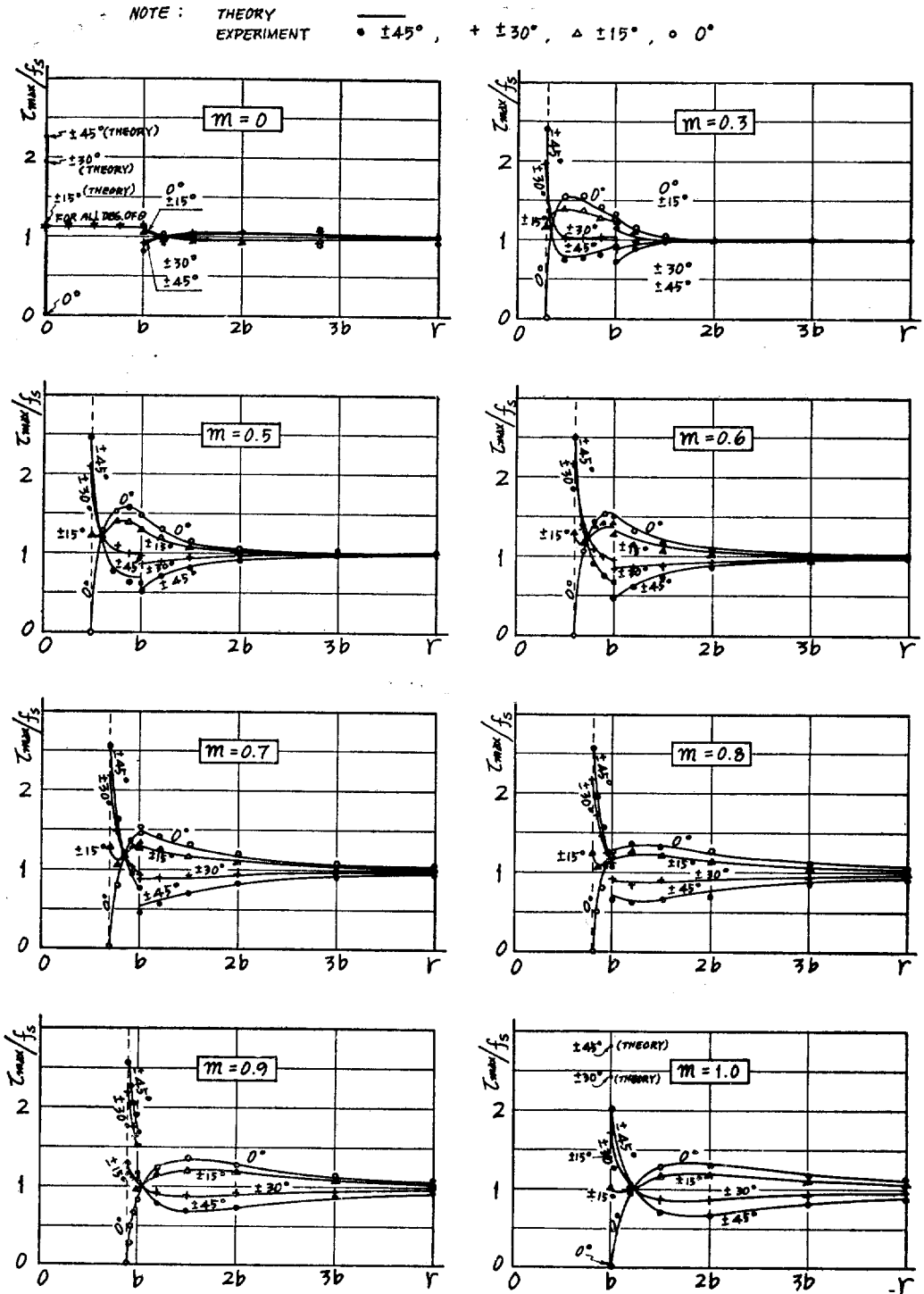


Fig. 16-1. Comparison of Theoretical and Experimental Stress Concentration Factor  $\tau_{max}/f_T$  under Hydrostatic Tension Loading.



純粹剪斷狀態는鉛直方向의 引張力과 水平方向의 壓縮力이 똑같은 狀態이며, 이때 模型의 中央部分에서의 應力分布는 左右 및 上下對稱으로 되므로 Fringe 들은 Fig. 15 에 보인 바와 같이 鉛直 및 水平中心線에 關한 對稱形으로 된다.

本實驗에서는 各 模型을 上記 2가지 荷重狀態에서 한번씩 實驗하였다. Polariscope 을 通하여 Fringe 를 觀察하면서 荷重用너트를 틀어 5~6位의 對稱形 Fringe 가 나타나게 調節하고, Transducer 로 부터 鉛直荷重을 記錄하고, Dark field 와 Light field 에서 各 1枚씩 寫眞을 撮影하였다.

記錄된 鉛直引張荷重을 模型의 有效斷面積으로 나누면 鉛直引張荷重의 세기를 얻는데, 이 값은 均一 2軸引張의 경우에는 水平引張荷重의 세기와도 같고 純粹剪斷의 경우에는 水平壓縮荷重의 세기와도 같다. 다만 이 純粹剪斷狀態는 Fig. 2-b의 荷重狀態를 45° 回轉시킨 것이 되므로 X-軸에 對하여 45° 傾斜한 軸을 基準으로 하여 極座標  $\theta$  를 계기로 한다.

各 荷重狀態에서 撮影된 寫眞들로부터 各點에서의 最大剪斷應力을 決定하고, 그것을 荷重의 세기로 나누면 그들 點에서의 應力集中係數들이 決定된다.

### 3-3. 實驗結果

위에서 얻은 各 點에서의 應力集中係數의 값들을, Fig. 16 에 보인 바와 같이,  $r$  을 橫軸으로 取한 平面 위에 點들로 표시하였으며, 參考로 이에 對應하는 理論曲線들도 그려 넣었다.

## 4. 考 察

式 (9), (10), (11) 및 (19), (20), (21)로 주어지는 理論解는 無限平板의 中央에 뚫린 圓形구멍의 內側面에 板과 같은 두께의 異質補強環이 接着되어 있고 材料들이 均質等力性이고 荷重이 그 板의 平面內에서의 均一 2軸荷重인 경우에는 彈性學上의 嚴密解가 된다.

이들 理論式으로 부터 얻어진 Fig. 6 에 의하면, 均一 2軸引張荷重下에서는 應力分布에 대략 다음과 같은 特徵이 있다:

1)  $\sigma_1$  과  $\tau_{max}$  는 環에서는  $r=a$ , 板에서는  $r=b$  에서 最大值에 達하고,  $\sigma_2$  는 環의  $r=a$  에서 쪼이고, 나머지 部分에서는 대략  $f_T$  를 넘지 않는다.

2)  $m$  이 增加함에 따라  $\sigma_1$  과  $\tau_{max}$  는 增加하고,  $\sigma_2$  는 減少한다.

한편, Fig. 7 및 8 에 의하면, 純粹剪斷荷重下에서는 應力分布에 대략 다음과 같은 特徵이 있다:

1) 任意點에서의  $\sigma_1$  의 絕對値는 軸  $\theta=0^\circ$  에 關한 對稱點에서의  $\sigma_2$  의 絕對値와 같고, 그들 두 應力の 符號는 서로 反對이다. 한편,  $\tau_{max}$  는 그 軸에 關하여 對稱으로 分布한다.

2) 環에서의  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , 및  $\tau_{max}$  의 最大值는 항상  $r=a$ ,  $\theta=\pm 45^\circ$  에 있고, 板에서의 그것은  $m < 0.7$  일 때는  $r=b$ ,  $\theta=0^\circ$  近處에 있으나  $m > 0.7$  일 때는  $\sigma_1$  과  $\sigma_2$  의 最大值는  $r=b$ ,  $\theta=\pm 30^\circ \sim \pm 45^\circ$ ,  $\tau_{max}$  의 最大值는  $r=1.0b \sim 1.5b$ ,  $\theta=0^\circ$  에 있다.

3)  $m$  이 應力分布에 미치는 影響은  $\theta$  에 따라 다르며 共通된 傾向을 잡을 수는 없으나, 大體로  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , 및  $\tau_{max}$  의 最大值들은  $m$  에 따라 增加하되,  $m$  이 0.7 以下일 때는 큰 變動이 없고,  $m$  이 0.7 을 넘으면 急히 增加한다.  $m$  이 0 으로부터 1 까지 增加할때, 環에서의  $\sigma_1$  과  $\sigma_2$  의 最大值는 대략  $4.5f_S \sim 5.6f_S$ ,  $\tau_{max}$  의 最大值는 대략  $2.3f_S \sim 2.8f_S$  의 範圍안에서 變動하고, 板에서의  $\sigma_1$  과  $\sigma_2$  의 最大值는 대략  $1.2f_S \sim 4f_S$ ,  $\tau_{max}$  의 最大值는 대략  $1f_S \sim 2f_S$  의 範圍안에서 變動한다.

§ 3의 實驗에서는 無限平板 대신에 구멍 直徑의 6 倍의 正方形模型을 使用하였는데, 撮影된 光彈性寫眞들을

觀察하였던 바 Loading Bracket의 影響이 있는 周邊部分을 除外한 中央部分에서는 板의 有限性에 基因된다고 보이는 差異를 發見할 수 없었다. 이 實驗結果(Fig. 16)에 의하면, 均一 2軸引張狀態에서는  $m=0.6\sim 0.9$  일 때 板에서의 最大剪斷應力의 實驗値가 理論値보다 多少 낮은 傾向을 보이고 있고, 環에서는 大략 一致하고 있다. 한편, 純粹剪斷狀態에서는  $\theta=0^\circ$  와  $\pm 45^\circ$  에서는 實驗値와 理論値가 잘 一致하고 있으나,  $m=0.6$  近處에서는  $\theta=\pm 15^\circ\sim\pm 30^\circ$  에서 多少의 不一致가 나타나고 있다. 그러나 이와 같은 不一致는 主로 實驗時의 荷重의 非對稱性, 模型속에 殘留하는 初期應力, Fringe의 目測의 不正確 等に 基因하는 實驗誤差라고 볼 수도 있는 程度이며, 全般的으로 보면, 實驗적으로 求해진 應力分布의 傾向은 理論的인 그것과 잘 一致한다고 볼 수 있을 것이다. 이로 미루어 式 (9), (10), (11) 및 (19), (20), (21)로 주어지는 理論解는 工學的인 目的下에서는 上記 理想條件들이 嚴格히 成立되지 않는 實際의 경우에 대해서도 適用할 수 있을 것이다.

그러나 板과 環의 接着이 不完全한 경우에는 應力分布에 큰 變動이 일어난다는 事實을 接着이 不完全한 模型에 대한 實驗에서 確認할 수 있었다. 接着되지 않은 部分에서는 境界面에 垂直한 壓縮應力만 傳達될 수 있고, 引張과 剪斷應力은 傳達되지 않을 것이므로, 應力分布에 큰 差異가 생길 것이 分明하다.

式 (9), (10) 및 (19), (20)의 값들의  $n$ 에 따르는 變化의 傾向을 살펴 보면, 一般的으로, 環과 板의 彈性係數의 比 ( $n$ )가 커질 수록 板속의 各 點에서의 主應力과 最大剪斷應力은 차차로 작아지지만, 環속의 應力들은 차차로 커짐을 알 수 있다.

또한, 이들 式을 보면, Poisson 比의 差異로 인한 影響은 그리 크지 않을 것임을 짐작할 수 있다. 例로서  $n=E_2/E_1=1/3$  인 경우에 대하여  $\mu_1=0.3$ ,  $\mu_2=0.4$  일 때와  $\mu_1=\mu_2=0.3$  일 때를 比較하여 보면,  $m=0.5$  일 때 約 6%,  $m=0.8$  일 때 約 3%의 差異가 있다.

한편, Fig. 6, 7 및 16에 의하면, 異質圓環으로 補強된 圓形구멍 近處에서의 應力集中은 極히 局部的이며, 구멍의 中心으로부터 그 半徑의 2倍만큼 떨어진 點에서의 應力集中係數는 無限遠點에서의 값으로부터 約 0.3 이상 벗어나지 않으며, 구멍 半徑의 3倍만큼 떨어진 點에서는 그것이 約 0.1 이하가 되고, 구멍 半徑의 4倍以上 멀어지면 無限遠點에서의 값과 거의 一致한다.

## 5. 結 論

- 1) 異質圓環으로 補強된 圓形 구멍 周圍에서의 應力分布에 대한 上記 理論解는 板과 環의 接着이 完全하고 板의 크기가 無限하고 材料가 均質等方性이고 荷重이 平面的인 경우에 대한 彈性學上的 嚴密解이다.
- 2) 實驗으로부터 밝혀진 바에 의하면, 板의 크기가 구멍 直徑의 6倍인 有限한 경우에도 上記 理論値는 工學的으로 滿足할 만한 近似値를 준다.
- 3) 補強環의 彈性係數가 클 수록 補強效果가 크지만, 環속의 應力도 커진다.
- 4) 구멍 近處에서의 應力集中現象은 極히 局部的이며, 구멍 中心으로부터 半徑의 2倍以上 떨어진 곳에서는 約 30% 以下로 된다.
- 5) 均一 2軸 引張下에서는, 環의 內徑과 外徑(板의 구멍 直徑)의 比가 클수록 最大主應力과 最大剪斷應力이 커진다.
- 6) 純粹剪斷下에서는, 應力이 點의 角位置에 따라 달라지지만 最大主應力과 最大剪斷應力은  $\pm 45^\circ$  位置에 나타나며, 環의 內徑과 外徑의 比가 클수록 커진다.

## 後 記

本研究에 있어서 數値計算을 도와준 李丙爽, 鄭仁煥 兩君과 實驗을 도와준 金曉哲氏와 그림을 그려준 權寧中



氏에 대하여 깊은 感謝를 드린다.

### 參 考 文 獻

- [1] C. Gurney, "An Analysis of the Stresses in a Plate with a Reinforced Circular Hole under Edge Forces," Aero. Res. Comm. (England) Report & Mem. No. 1834, Feb., 1938.
- [2] D. S. Houghton and A. Rothwell, "The Analysis of Reinforced Circular and Elliptical Cutouts under Various Loading Conditions," Coll. of Aero. (Cranfield, England) Report No. 151, Jul., 1961.
- [3] W. H. Wittrick, "Stresses around Reinforced Elliptical Holes in Plane sheet," Aero. Res. Lab. (Australia) Report S.M. 267, May, 1959.
- [4] E. H. Mansfield, "Neutral Holes in Plane Sheet: Reinforced Holes which are Elastically Equivalent to the Uncut Sheet," Aero. Res. Coun. (England) Report & Mem. No. 2815, Sept., 1950.
- [5] D. S. Houghton and A. Rothwell, "Stresses around Some Unreinforced Cutouts under Various Loading Conditions," Coll. of Aero. (Cranfield, England) Report No. 146, Mar., 1961.
- [6] R. Hicks, "Reinforced Elliptical Holes in Stressed Plates," J. Roy. Aero. Soc. Vol. 61, pp. 688-693, Oct., 1957.
- [7] C. L. Inglis, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners," T. Inst. Naval Arch. (England), 1913.
- [8] 任尙鎮, 黃宗屹, "艙口를 갖는 甲板에서의 應力集中," 서울工大 研究報告 1卷 1號, pp. 7-14, Jul., 1965.
- [9] A. J. Durelli and W. M. Murray, "Stress Distribution around a Circular Discontinuity in Any Two-Dimensional System of Combined Stress," Proc. 14-th Semi-annual Eastern Photoelasticity Conference, Dec., 1941.
- [10] S. R. Heller, "Reinforced Circular Holes in Bending with Shear," Trans. S.N.A.M.E. Vol. 60, pp. 124-147, 1952.
- [11] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., 1951.
- [12] M. M. Frocht, *Photoelasticity* Vol. I & II, John Wiley & Sons, Inc., 1949.
- [13] J. W. Dally and W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1965.
- [14] M. Hetenyi, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1954.