

集合指導에 對한 基本的인 問題에 關하여

具 光 祖

§ 0. 要 旨

現在 科學技術革新으로의 要請의 焦點이 數學에 맞추어져 있고, 特히 數學教育의 現代化에 期待하고 있는 것은 至極히 當然한 일이다. 이런 일은 世界的인 課題로서, 우리나라에서도 이미 이런 觀點에서 教育課程이 改編되었고, 그 內容과 더불어 指導方法의 研究가 進展되고 있다.

本 論文은 集合의 基本的인 概念의 指導를 中心으로 數學教育의 現代化에 따른 基本的인 問題에 關하여 論함으로써 現在 導入되어 있는 概念이나 앞으로 改編될 새로운 概念의 指導의 研究에 提案하려는 것이다.

§ 1. 結 論

J. PERRY가 20世紀初의 生産機構, 社會構造의 變革에서의 必要에 따른 新數學敎育의 改革으로서 靜的인 EUCLID幾何에서 I. NEWTON, G. W. LEIBNIZ의 微積分으로 主體的인 方向을 轉換한 것은 當時의 時點에서의 外的인 必然性에서의 現代化라 할 수 있을 것이다. 現時點에서의 現代化는 數學觀의 立場에서, 19世紀後半의 代數學, 幾何學, 解析學의 根本에 가로 놓여 있던 問題點을 解決한 G. CANTOR의 集合論, E. GALOIS나 N. H. AREL의 群論을 基盤으로 驚異的, 飛躍的으로 發達된 廣範圍한 數學의 發展, 科學뿐 아니라 社會, 經濟等 各方面에 걸친 莫大한 現代數學에의 要求, 超高速度, 超高性能의 計算機의 活躍 등에 새로운 注目이 集中되어 있는 것이다. 따라서 前述한 바, 外的인 必然性에 呼應하는 內的인 必然性에서 當然히 從來의 傳統的인 數學觀, 算數·數學教育觀에 날카로운 mess를 가해야 할 것이다. 數學教育觀의 立場에서, 그 構造的인 基礎로 集合指導를 重視하게 되었으나, 今後 盲目的으로 追從하

는 것보다 意圖的, 具案的으로 開拓하지 않으면 안될 것이다. 勿論 學問으로의 集合論이 그대로 敎材化되어서는 안되고 이것에서 誘導되는 새로운 idea를 構造的인 指導를 早期부터 導入하여 展開할 必要를 느끼게 된 것이다.

Europe의 現代化運動의 大勢는 거의 露骨的으로 現代數學의 體系에의 接近을 企圖하고 있으며⁽¹⁾ Bourbakism이 誘示하고 있는 基礎概念 그 自體가 後期的 中等教育에서 論理的, 演繹的인 思考의 體系의 理解를 위한 좋은 본보기로 強調되고 있는 例를 볼 수 있다. America의 現代化 運動에서 처음에는 이런 Europe의 企圖에 警戒的인 이었으나 漸次 Europe의 傾向으로 기울어지고 있으며, 그것보다 現代數學 그 自體보다도 集合指導를 土臺로 하여 現代數學의 基本的인 概念의 發見의 導入과 그 數學的 發展에 強力하게 注目하고 있는 點을 엿볼 수 있다⁽²⁾. 東西의 差異는 있으나 數學的 思考의 基本的인 發生의 根源의 하나로 集合指導가 本質的으로 重要な 것을 確認할 수 있다⁽³⁾.

數學教育의 現代化의 教育的 意義를 R. E. K. ROURKE에 의하면 to clearly, to simplify, to unify, to broaden, to introduce라 하였는데, 이것 또한 集合指導의 原則으로 생각된다. 教育觀의 立場에서 時代의 社會的인 緊急 要請의 問題로서 Acceleration과 Enrichment를 主張하고 있으나, 이것도 前述의 意味에서 有力한 基礎概念으로서 集合指導를 強化함으로써 얻어진다고 본다. 또한 教育方法的인 立場에서 America에서 Heuristic 또는 Discovery 등에 強力히 着眼하고 있는 것도 現時點에서 當然하겠으나, 現代數學의 基本的인 事項과 그의 發展을 어떻게 構造的인 基礎로 集合指導를 어떻게 構造的인 基礎로 集合指導를 強化함으로써 얻어진다고 본다. 또한 國民學校에서의 算數教育의 展開에서는 兒

童의 心理發達의 必要에서 當然히 兒童의 經驗을 바탕으로 한 發展, 經驗에 基礎한 歸納的인 理解가 重視된다. 따라서 Heuristic이나 Discovery 등의 指導方法이 有効하게 되기 위해서는 兒童의 初發의 經驗 속의 集合을 充分히 들어 넣어주는 것이 必要하다. 同時에 J. S. BRUNER⁽⁴⁾ 등이 力說하고 있는 根本原理나 概念의 認識形式이나 이들의 轉移에 對하여는, 科學的 構造化에 의한 學習이 優位라는 學習理論을 생각 한다면 集合指導에서 學習을 構造化하는데 따라 今後 能率의 이고 效果的인 學習形式의 出現에 期待를 걸어 볼만 하겠다.

§ 2. 集合과 構造化

日常의 具體的인 事物에 對하여 直觀的인 思考만으로 解決되지 않는 問題를 解決하기 위한 觀點에서 볼 때, 算數나 數學은 이런 問題의 解決策을 抽象化하고 一般化하여 概念化, 體系화된 思考方法을 생각해내어 當面한 問題를 解決할 뿐만 아니라, 아직 問題化되지 않은 具象的인 世界를 抽象化, 一般化한 體系로서 事物을 보고 行하는 것에 그 生命이 있다고 할 수 있다. 이런 경우, 무엇을 어떤 立場에서 抽象化하고 一般化할 것인가, 또는 體系의 分支는 무엇인가, 하는 點에 關하여 생각하여 본다. 抽象化한다는 것은 結局 그 事物이 가지고 있는 다른 屬性을 捨象하고 必要한 最小限의 單純한 概念을 形成하는 것이고, 一般化한다는 것은, 하나 하나의 特殊性을 들추어서 共通인 概念을 形成하는 것이라고 볼 때, 數學이 抽象化하고, 一般化하는 것을 前提로 하는 以上, 가장 單純하고 素朴한 概念에서 出發하여야 함은 當然한 일이다. 現代數學도 이런 意味에서 볼 때 前述한 바 가장 單純한 集合의 概念을 根據로 하는 것이다. 따라서 集合을 바탕으로 그에 關하여 抽象化하고 一般化하는 觀點에서 系統지우는 것이 數學教育의 現代化的 한 姿勢이라고 보는 것이다.

內包的으로 가장 單純, 素朴한 概念은 外延的으로 具體, 特殊的인 것을 最大限으로 包含하는

廣範圍한 概念이라고 볼 수 있다. 即 集合의 概念은 이런 意味에서 外延的으로 가장 넓은 概念으로서 그 適用되는 範圍가 가장 廣範圍하다는 利點이 있고 이것을 살리기 위해서 이런 概念에 必要에 따라 特殊한 關係를 주고 그들 사이에 秩序를 주어 體系化하여야 할 必要가 생긴다. 이것이 이른바 構造化인 것이다. 例를 들면, 두 數 集合에 對應이라는 關係를 줌으로서 函數的인 構造를 가지게 된다. 이와 같이 單純, 素朴한 集合概念으로부터 出發하는 것이므로 廣範한 思想이나 思考가 適用되어 自由로 여러 가지의 構造化가 이루어져 體系的인 思考가 이루어진다고 볼 수 있다. 換言하면, 이런 構造化를 위하여 가장 單純한 集合으로부터 出發하지 않으면 안 된다고 할 수 있고, 이런 意味에서 集合과 構造化는 數學教育의 現代化的인 서로 關連된 雙璧인 것이다⁽⁵⁾.

結局 亂立되어 있는 雜多한 여러 가지의 數學의 內容을 解體하여 集合等 若干의 基礎概念을 土臺로 基本原理를 세워 自由롭게 構造化함에 의하여 教育內容을 數學的 概念이나 原理에 의하여 體系化하고 再構成하는 것이 數學教育의 現代化라고 볼 수 있고, 이것을 學習者의 立場에서 兒童의 思考方法을 構造化하여 數學的으로 보고 생각할 수 있도록 이끄는 것이 數學教育의 現代化的인 방법이라고 할 수 있다.

§ 3. 集合指導에 의한 革新

J. G. KEMENY⁽⁶⁾의 報告에서, Stockholm Congress에서의 “Which subjects in modern mathematics and which application in modern mathematics can find a place in programs of secondary school instruction?”을 主要 議題로 하여 各國의 情況報告가 中心이 되어 있지만, 그 內容은 Elementary Set Theory, Introduction to Logic, Some Topics, from Modern Algebra, Introduction to probability and Statistics를 들고 있다. 特히 그 中에서 가장 큰 Topics는 Elementary Set Theory를

* The America Association for the Advancement of Science Commission

指適하고 있다. 또한 J. F. NEWPORT의 論文中에서는 AAAC*의 活動으로 Grade 1에서부터 集合指導를 強化할 것을 力說하고 있다. 다음에 集合指導를 土臺로 한 SMSG**⁽⁷⁾의 體系를 살펴본다. Elementary School에서는 Grade 1에서부터 集合의 생각을 基底로서 導入하고 있고, Grade 4, Part 1에서 集合과 部分集合, 集合記號, 數와 그의 表現, 數直線上에서의 自然數의 加減, Arrays에 의한 乘法, 그의 逆으로의 除法, 正確한 計算基本法則의 取扱, 點集合으로서의 圓形, 圓形과 領域 등이 取扱된다. Part 2에서 數系統의 充實, 單位의 導入, 간단한 有理數 등이 取扱된다. Grade 5, Part 1에서 數詞의 擴張, 小數, 5進法, 因數와 素數, 乘除法의 發展, 圓形의 合同 등이 取扱된다. Part 2에서 指數, 有理數의 加減, 角의 測定, 面積, 比 등이 取扱된다. Grade 6, Part 1에서 指數, 有理數의 乘法, 計算法則의 擴張, 三角形의 邊과 角, Opposite에 의한 陰數, 座標, 反射와 對稱等, Part 2에서 有理數의 除法, 體積, Graph, 集合과 圓等으로 展開하고 있다. 나아가 Grade 7, 8에 이르는 Junior High School의 全4卷을 통하여 Elementary School에서의 集合을 重視하는 基本方針에 立脚하여 그 內容을 強化할 뿐만 아니라 非計量幾何, 數學의 體裁, 方程式, 相對誤差, 順列, 確率 등을 取扱하고, Grade 9에 이르러 First course in Algebra의 Part 1에서 特別히 集合과 數直線을 初頭로 하여 數와 變數, Mathematics Sentence, 計算의 意味, 實數, 論證에 의한 基本法則 등이 取扱된다. Part 2에서 因數, 指數, 根數, 多項式, Open Sentence, Graph, 二次方程式, 函數, 等を 展開하고 있다. Grade 10에 이르러 Geometry의 Part 1에서도 初頭에 集合과 數直線으로부터 始作하여 뒤에 Euclid幾何의 體系를 點集合으로 보고, 獨特한 公理體系를 세워 演繹推理에 의하여 論證을 展開하고 있다. Grade 11에 이르러 Intermediate Mathematics 2卷에서는 로그, 指數, 三角函數

Vector, 複素數, 級數, 順列, 組合, 二項定理, 代數의 構造, 座標幾何, 一次, 二次函數, 二元二次函數, 三元一次方程式 등이 取扱된다. Grade 12에 이르러 Elementary Functions에서는 集合에 의한 函數의 定義로부터 始作하여 指數函數, 로그 函數, 三角函數 등이 取扱되고 있다. 그 다음의 課程에 Introduction to Matrix Algebra가 있다.

우리 나라에서도 現行 國民學校의 算數 內容에 1學年부터 集合의 생각을 바탕으로 數가 導入되고, 數直線 등을 早期導入하였고, 圓形의 直觀的인 觀察에서도 包含關係等 集合의 생각을 바탕으로 構成되어 있다. 特別히 中學校 2學年 부터는 日本보다도 앞서 集合記號를 導入하였고 方程式, 函數等에 活用하고 있다. 또한 高等學校에서도 集合을 바탕으로 그를 方程式, 因數, 等に 活用하도록 하였고 論理的인 內容을 보여 集合概念과 더불어 論證的인 思考를 기르도록 하였으며, 確率 등의 取扱에서도 集合의 記號를 有効하게 適用하도록 되어 있다⁽⁸⁾. 또한 앞으로 보다더 充實한 現代化를 期하기 위한 現場에서의 研究는 勿論 文敎部 當局에서도 教育課程의 改編을 前提로 한 檢討가 進行되는 것으로 알고 있다.

§4. 集合指導와 算數의 指導

集合指導에 關하여 單純히 集合記號를 導入하고 集合이나 共通集合 또는 그 部分集合의 概念을 理解시키거나, 四角形의 包含關係나 公倍數의 共通集合에 關한 性質에 Venn diagram을 適用하여 集合이 이런데 活用됨을 보이거나 集合을 導入하는 教材가 바로 이런 것이라고 斷片的으로 說明하는 境偶가 많다. 그러나 우리가 前述한 바 集合의 생각을 導入하는 것은 集合論 그 自體를 指導하는데 目的이 있는 것도 아니고 斷片的인 集合의 利用에 意義가 있는 것이 아니라, 集合에서의 基本的인 생각을 理解하여 그것을 基盤으로 하여 算數나 數學을 어떻게 構設하

** School Mathematics Study Group

여 갈 것인가 하는 것에 문제가 있다. 따라서從來의體系는當然히解體되고 集合이나 構造的의 생각에서 再構成되어야 할 것이다.

集合의 基本概念 自體는 至極히 素朴하므로, 兒童의 立場에서 볼 때 自然發生的으로 그 概念이 形成되어진다고 볼 수 있다. 따라서 國民學校의 算數에서는 集合에 關하여 그것을 意識적으로 定義하거나 用語나 記號를 指導하는 것 보다, 兒童의 自然發生的인 集合의 素朴한 概念을 그 대로 길러서 數學的 思考의 바탕으로 이끄는 것이 重要하다. 結局 現在 國民學校 算數의 立場에서 볼 때, 兒童의 自然發生的으로 길러지는 概念을 Venn diagram으로의 表示 程度의 素朴한 것으로 그치고, 그것을 基盤으로 하여 思考方法이 確立되도록 이끄는 것이겠다. 算數의 內容을 集合의 생각으로 再構成함에 있어, 從來의 指導 內容을 모두 없애고 새로운 것이 登場되는 것은 아니다. 即 國民學校의 教材는 兒童의 生活이나 心身發達段階에서 생각되어지는 것이므로 別個의 것일 수는 없고, 다만 새로운 體系의 構成을 위하여 一部 새로운 教材가 追加되고 反面 一部 教材가 除去되는 것은 있을 수 있으나, 根本적으로 內容 自體는 달라지지 않는다. 따라서 國民學校의 算數 內容에서 教材를 消化한다는 目的에서만 볼 때는 現代化한다는 것이 별 것 아니라고 보기 쉬운 危險性이 많다. 實地로 存屬하는 教材가 많다고 하더라도 새로운 體系上에서 內容으로는 많이 變해 있는 것이고, 없앤 教材라도 不必要해서가 아니고 새로운 體系上 다른 教材에 그 任務를 讓渡했기 때문인 것이 많다. 따라서 指導內容을 教材面에서 보는 것보다 集合이나 構造에서의 再構成化한 立場에서 觀察하고 論議하여야 할 것이다.

事物의 集合의 元素의 一對一對應에서 集合數의 概念이 얻어지고, 數의 計算式의 集合에서 一般化함으로써 公式이 얻어지고, 어떤 統計 값의 集合에서 어떤 法則이 얻어지는 것과 같이 集合의 생각을 導入한 重要한 意義는 外延性에

서 內包的인 一般概念을 形成하는데 있는 것이다. 또한 事物의 集合에서 抽象化, 一般화된 概念이 생겨나지만 여러 集合들의 關係에서 概念의 結合關係가 誘導된다. 또한 思考는 一定한 數學的 關係를 밝은 一種의 心的인 行動이므로 思考하기 위해서는 靜的인 集合을 動的으로 取扱하는 일이 切實하다. 結局, 從來 數나 圖形을 各各 獨立된 命題로 取扱했지만, 集合이나 代數的인 構造의 생각이 이 들어진 것을 하나의 集合 領域 속으로 묶을 뿐 아니라 有理數나 整數의 數構造를 明白히 하고 個個의 圖形을 包含한 空間을 追求하여 얻는 길을 열어 놓아야 할 것이다.

§ 5. 結 論

集合指導를 基盤으로 한 構造化를 本命으로 하는 現代化 運動은 Europe에서 일어난 Bourbakism이고, 처음에는 贊意를 가지지 않았던 NCTM***도 從來의 指導體系의 單純한 修理的인 改訂으로는 到底히 現代의 要請에 應할 수 없음을 느끼게 되어, 主流의으로는 逆으로 Bourbakism의 贊成者가 된 事實을 보고 있다. SMSG가 指向하는 方法은 單純히 從來의 것을 改正한 것이 아니고 새로운 理念을 바탕으로 別個의 構造化의 體系를 確立하려고 하고 있음을 볼 수 있다.

우리 나라에서도 前述한 바와 같이 이미 現代化의 激流에 들어가 있음을 否認할 수 없다. 또한 그런 激流속에서 正常化하기 위하여 安간 힘을 쓰고 있는 것도 事實이다.

從來의 內容에도 集合의 생각은 內在하고 있으므로 그것으로도 足하다는 생각과, 그 內在한 것을 意識적으로 表面에 드러내어 그것에 基礎를 두고 現代數學의 發想形式에 觀點을 두고 새로운 體系를 만들어 낸다는 것은, 教育的인 意義와 價値를 全然 달리하는 것이다. 따라서 集合指導의 發展과 그의 可能性의 限界를 어떻게 規定하는가가 今後의 數學教育의 進步의 關

*** The National Council of Teachers of Mathematics

繼인 것이다. 現時點에서는 한편 可能性이 있는 理想案, 一貫性 있는 理想案⁽⁹⁾의 確立을 指向하여 協力的인 共同의 努力을 기울이는 同時에, 또 한편 現行되는 教育內容中에서 基礎的인 것 과 그의 發展을 集合의 觀點에서 그의 確實化, 能率化를 再檢討한 必要가 있다고 본다. 前述한 바 單純히 集合記號를 指導하거나 斷片的으로 集合을 取扱하는 일은 삼가야 할 것이다. 또한 根本的으로 重要한 일은 現場의 教師들이 적어도 集

合論의 初歩와 進展된 現代數學의 初次的인 學習을 해 두는 것이 現代化를 實現하기 위한 土壤育成의 意味에서 必要不可缺의 것이다. 이런 일은 初期의 America의 失敗의 事例가 좋은 教訓이고, 現行과 같이 各種 講習을 通하여 消極的으로 企圖해서는 到底히 不可能할 것이고, 文敎部의 強力한 教育行政措置로서 實質的인 企劃이 進展되어야 할 것이고, 現代化의 必須條件으로 切望되는 일이다.

參 考 文 獻

- (1) 出石隆 等 海外における 數學教育の 思考と構造 1967. 9 明治圖書
- (2) W. L. SCHAAF "How Mordern is Modern Math." Math. Teacher, 1964 Vol. 57, No 2 pp. 88—97.
- (3) 矢野健太郎 集合と數學的인 考え方. 日數教雜誌 1965 第47卷 第8號 pp. 108—110
- (4) J. S. BRUNER 教育의 過程 (鈴木群義等譯)
- (5) 具光祖 算數教育의 現代化와 그 指導上의 問題點에 關하여 1969. 3 教育資料 pp. 130—133
- (6) J. C. KEMENY "Report to the International Congress of Mathematics" Math. Teacher, 1963 Vol. 56, No. 2 pp. 66—78
- (7) SMSG Mathematics for the Elementary school 1963~1965
Mathematics for Junior school,
First Course in Algebra,
Geometry
Intermediate Mathematics,
Elementary Functions,
Introduction to Matrix Algebra 1961
- (8) 文敎部 國民學校, 中學校, 高等學校 教育課程 1963. 2
- (9) 廣川清隆 "集合の考え, 指導についての 基本的 問題 1966. 3
算數・數學教育의 研究 pp. 23~28 日本 金子書房

(서울教育大學)