非 Euclid 幾何學

宋 瑋 憲

Ⅰ. 序 言

非 Euclid 幾何學이란 Euclid 幾何學과 相互對立하고 있는 學問이다. 여기에서는 Euclid 幾何學에서 말하고 있는 平行線이라든가 三角形의 內角의 合은 2∠R이라든가 하는 定理를 非 Euclid 幾何學에 屬하는 楕圓的 非 Euclid 幾何의 한 모델(球面上의 幾何學)에서 論議하여 보고, 이를 다시 非 Euclid 幾何學의 또 다른 하나인 双曲的 非 Euclid 幾何學에서 論議하여 非 Euclid 幾何學의 廣範圍한 數學的인 體系와 意義를 論議코저 함.

Ⅱ. 球空間

(i) 球面上에서 球의 中心과 一致하는 中心을 갖인 圓을 大圓이라 하고 其他를 小圓이라 한다.

(ii) 球面上의 任意의 2點을 지나는 大圓은 一般으로 하나 있으며 單 하나에 限한다. 그 작은 쪽의 圓弧는 球面上에 있어서의 2點間의 最短距離이고, 이를 이 2點間의 球面距離라 한다.

<注意> 이 때에 만일 2點이 直徑의 兩端일 때에는 이 2點을 지나는 大圓은 無數히 存在한다.

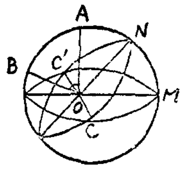
(iii) 大圓 또는 小圓의 平面에 垂直한 球의 直徑을 그 大圓 또는 小圓의 軸이라 하고, 軸의 兩端을 그 圓의 極이라 한다. 大圓의 2個의 極은 어느 것도 그 圓周上의 諸點에서 같은 距離에 있고, 그 距離는 大圓의 四分圓弧(이를 象限이라 한다)에 같다.

小圓의 一個의 極과 그의 圓周上의 諸點과의 距離는 他의 極과 圓周上의 諸點과의 距離에 相等하지 않고, 가까운 距離의 것과 먼 距離의 것이 있다. 普通 小圓의 極이라 할 때는 가까운 쪽의 極을 取하는 것으로 한다.

(iv) 2個의 大圓이 이루는 交角은 그 大圓들의 平面이 이루는 그 面角의 平面角과 같다.

<注意> 서로 만나는 모든 曲線의 交角은 그 交點에 있어서 각 곡선에 그은 切線이 이루는 각을 가지고 재는 것으로 한다.

(v) 2個의 大圓의 極을 각각 A, B라 할 때, A, B를 지나는 大圓을 그리면, 弧 A, B에 對하는 中心角은 2個의 大圓의 交角과 같다.



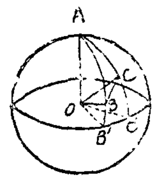
1 図

即 ∠AOB=∠MON

(vi) 球의 中心을 頂點으로 하는 三面角의 各 平面과의 간남은 3個의 大圓弧이고, 이 3個의 大圓弧는 球面上에 있어서 1個의 圖形을 둘러싼다. 이 도형을 球面三角形이라 하고, 3個의 大圓弧를 그 邊, 二邊의 交點을 그의 頂點, 大圓間의 交角을 그 角이라 한다. 그리하여 이 三邊 및 三角을 球面三角形의 要素라 한다. O를 球의 中心, 三面角 O−ABC의 球面과 만나서 이루는 大圓弧를 각각 AB, BC, CA라 하면 ABC는 球面三角形이다. 이리하여 BC, CA, AB는 그의 三邊이고, 이를 普通 a, b, c로 表示하고, 또 이에 對應하는 三個의 角을 A, B, C로 表示한다. 그럴 때에는 大圓 BDC에 있어서 BC에 對하는 中心角의 弧度를 α라 하면

$\alpha=\frac{a}{r}$ 但, r는 球의 半徑이다. 同樣으로 b, c에 對하는 각 大圓內에 있어서 中心角을 각각 β, γ라 하면

$$\beta=\frac{b}{r},\ \gamma=\frac{c}{r}$$



2 図

이다. 只今 半徑을 1이라 하면

$$a=\gamma,\ b=\beta,\ c=\gamma$$

로 된다. 故로 a, b, c는 球面三角形의 三邊을 나타냄과 同時에 各邊에 對하는 中心角(即 三面角에 있어서의 各 平面角)의 弧度도 表示한다.

다음에 A는 前節 (v)에 依하여 ∠B'OC'에 같다. 이리하여 ∠B'OC'는 圓弧 B'C'에 같다. 故

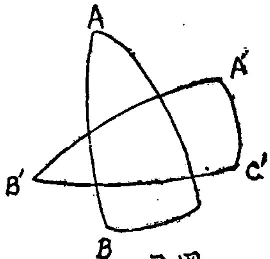
로 $A=\widehat{B'C'}$이다.

B, C에 對하여도 同樣이다.

故로 球面三角形의 要素는 모든 角의 弧度에 依하여 表示할 수 있다. 이리하여 球面三角形의 定義에 依하여 그 要素는 어느 것도 π보다 작球.

(vii) 球面三角形 ABC에 있어서 邊 BC, CA, AB의 極을 각각 A', B', C'라 하고, 또 A, A'는 邊 BC에 對하여 B, B'는 邊 CA에 對하여 C, C'는 邊 AB에 對하여 같은 側에 있는 것으로 한다. 그럴 때 球面三角形 $A'B'C'$를 ABC의 極三角形이라 定義한다.

(viii) 2個의 球面三角形에 있어서 1個가 他의 極三角形일 때는 그 1個의 三角形의 邊 및 角은 각각 他의 三角形의 이에 對應하는 角 및 邊과 서로 補角을 이룬다.



3図

只今 球面三角形 ABC의 極三角形을 $A'B'C'$라 하고, 邊 $B'C'$가 邊 AB, AC (或은 그의 延長)과 만나는 點을 D, E라 하면, A는 $B'C'$의 極인 故로 $A=DE$, 그런데 $B'E$ 및 $C'D$는 各象限인 故로 $DE+B'C'=\pi$이다.

極三角形 $A'B'C$의 三邊을 a', b', c', 그에 對應하는 三角을 A', B', C'로 表示하면 위에서 얻는 結果는 $A+a'=\pi$로 된다. 同樣으로 $B+b'=\pi$, $C+c'=\pi$이다.

이리하여 ABC는 또 $A'B'C'$의 極三角形임을 가지고 同樣으로

$$A'+a=\pi,\quad B'+b=\pi,\quad C'+c=\pi$$

(ix) 球面三角形의 3個의 角의 合은 π보다 크고 3π보다 작다.

只今 A, B, C를 球面三角形의 3個의 角이라 하고, 그의 極三角形의 三邊을 a', $b,'$ c'라 한다. 그럴 때에는 球面三角形의 三邊의 合은 大圓의 둘레보다 작으므로 $a'+b'+c'<2\pi$ 또 (viii)에 의하여 $a'=\pi-A$, $b'=\pi-B$, $c'=\pi-C$임을 알고 $A+B+C>\pi$이다. 또 A, B, C의 角은 定義에 依하여 어느 것도 π보다 작다.

$\therefore A+B+C<3\pi$이다.

(x) 거의 球面을 이루고 있는 地球의 表面에 있어서 赤道와 緯線은 서로 凹한 等距離曲線이나 經線은 赤道에 垂直임에도 不拘하고 2經線은 平行이 아니다. 즉 北極, 南極에서 만난다. 이를 球面上에서 定義한 2直線에서 論議하여 보면 어떠한 2直線을 그어도 꼭 2直線은 만나고 平行線은 존재하지 않음을 안다.

以上 (i)~(x)에서 論議한 바와 같이 球面上에 있어서의 幾何은 平面上에 있어서의 幾何와 全然 樣相이 다름을 알 수 있다.

Ⅲ. 非유―크릿트幾何學

유―크릿트의 『原論』은 5個의 幾何學公準과 5個의 一般的要請에서 出發하여 幾何學을 論理的으로 組立하고 있다. 5個의 幾何學的 公準 중의 4個는 대단히 簡單하고 分明한 內容을 가지고 있음에도 不拘하고 第5番째의 公準은 大端이 複雜하며 他의 4個의 公準과는 대단히 樣相이 다르다. 이것이 "平行線公準"이라 하는 것이며 後代의 사람들에게 問題視 된 公準이다. 問題의 줄거리는 第5公準이 他의 4個의 公準만으로서 誘導되는 것이 아닐까 하는 論理的인 疑問에 있었다. 이것이 길고 긴 數學發達史中에서 여러가지 이야기를 남긴 結果가 되었다.

이 研究過程에 있어서 第5公準을 "一直線外의 一點을 지나고 이 直線에 平行한 直線은 單한 個 存在함."(이 命題를 「p」라는 記號로 말하자.)이라든가, "三角形의 內角의 합은 2直角이다"라고 한다든가, 等距離線의 性質로 바꾸어 본다든가 하는 것을 試圖하여 보았지만 4個의 公準에서 第5의 公準은 證明한다는 目的은 達成하지 못하였다. 이는 當然한 것이다. 왜냐하면 他의 4個의 公準만으로 第5의 公準을 證明한다는 것은 實은 不可能한 것이다. 다시 말하면 第5公準은 他의 4個의 公準과는 獨立하고 있기 때문이다. 그래서 近代에 와서는 4個의 公準을 가지고 第5公準을 증명하려는 試圖는 抛棄하고 勇敢하게 方針을 바꾸어 公理「p」의 代身에 公理「h」"1直線外의 1點을 지나고 이 直線에 만나지 않는 直線이 적어도 2個 있다"는 것을 取하여 새로운 幾何學을 만드는 偉業을 成就시킨 것은 Lobatchevski(1793~1856)와 Bolyai(1802~1860) 等이었다.

이는 分明히 앞서 말한 珠面上의 幾何學과도 다른 것이다. 珠面上의 幾何學을 最初로 提唱한 것은 Riemann(1826~1866)이었다.

이는 Lobatchevski와 Bolyai의 幾何學이 發表된 후 20年 가량 지난 후의 일이다.

이들의 幾何學은 어느 것도 平行線에 關한 公理를 가지고 유—크릿트幾何學과 相對立하는 것이므로 유—크릿트幾何學이 아닌 幾何學이라는 意味이며 非유—크릿트幾何學이라 일컷는다. 特히 Lobatchevski・Bolyai의 幾何學을 双曲的 非유—크릿트幾何學, Riemann의 提唱한 幾何學을 楕圓的非유—크릿트幾何學이라 한다. 球面上의 幾何學을 說明하여 놓고 여기에서 "楕圓的"이란 말로 바꾸어진 것은 앞에서 말한 球面上의 幾何學이 楕圓的非유—크릿트幾何學의 1個의 모델이고 이것이 全部라는 것은 아니기 때문이다.

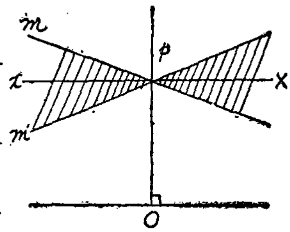
Ⅳ. 双曲的非유—크릿트幾何學

여기에서는 双曲的非유—크릿트幾何學에 對하여 說明을 加해 보자. 이 幾何學은 유—크릿트幾何學의 平行線公理「p」를 위에서 말한 公理로 바꾸어 놓은 幾何學이므로 平行線公理에 關係가 없는 部分에서는 유—크릿트幾何學과 全然 같은 定理가 나온다. 그러나 平行線公理의 幾何學 全體에 미치는 影響은 대단히 크며 우리는 여러곳에서 유—크릿트幾何學과는 全然 다른 定理를 發見할 수 있다. 例를 들면

「三角形의 內角의 합은 2直角 보다 작다」

「等距離線은 凸曲線이다.(元曲線의 反對側에 부푼다)」

等이다. 여기에서는 「h」에서 나오는 重要한 結果를 하나 말하자.



4 図

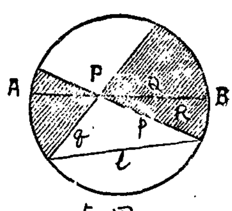
平面上에서 直線 l과 l上에 없는 1點 p가 있다고 하자. p를 지나고 l과 만나지 않는 2直線을 m, m'라 하면 m와 m'에 낀(圖 4에서 斜線이 있는) 部分을 지나는 直線 x는 l과 만나는 일은 없다. 왜냐하면 萬一 x가 l과 x點에서 만난다고 하면 다음에 論述하는 바와 같이 矛盾이 일어나므로서이다. m는 △pox의 內部를 지나는 直線이고, 임의의 邊 po 及 px와는 p에서 만나고 있으므로 다시 po, px와 만나는 일은 없다. 더욱이 이 三角形의 邊 ox과 만나는 일이 없이 밖으로 나가는 일은 없으므로 m는 必히 邊 ox와 만날 것이다. 이는 m가 l과 만나지 않는다는 假定에 反함. 따라서 x가 l과 만나는 일은 있을 수 없다. 이것으로부터 「p를 지나고 l과 만나지 않는 直線은 無限히 存在함」임을 안다. 여기에서 直線 po를 右方에 廻轉하여 가보면 얼마가서 이것이 l과 만나지 않는 狀態에 이루어질 것이다. 左方으로 廻轉하여도 事情은 같다. 따라서 p를 지나는 모든 直線은 l과 만나는 集合 s_1과 l과 만나지 않는 直線의 集合 s_2로 나누어진다. 그리고, s_1과 s_2의 境界로 되는 直線이 2個 있다. 이들의 2直線은 s_2에 屬하고 있고 또 op와는 어느 것도 같은 銳角으로 만나고 있다는 것을 안다. 公理「h」에 對한 檢證에 關하여는 구라인의 모델이라는 것을 使用하면 大端히 分明하게 證明할 수가 있다. 구라인의 모델이란 平面上의 1個의 圓의 內部에서(周를 不包含)만 幾何學을 만드는 것이다. 圓內의 點을 이 幾何學의 點(이를 h點이라고 하자)이라 함.

h—直線 l과 h—點 p가 주워졌을 때 p를 지나고 l과 圓周上에서 만나는 直線을 p, q라 하면 圓周上의 點은 우리들의 幾何學에는 屬하지 않는 것이므로 h—直線 l과 h—直線 p, q와는 만나지 않는다. 勿論 p, q에 둘러싸인(그림에서 斜線을 긋고 있다) 部分을 지나는 直線은 모두 l과는 만나지 않는다.

길이나 角의 定義는 좀 힘이 든다. 例를 들면 2點 P, Q間의 距離를 재려면 P, Q를 지나는 直線을 긋고 圓周와의 交點을 A, B라 하고

$$\overline{PQ}=K\log\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}$$

라 定義함. 但 $\overline{PQ}$는 이 幾何學에서의 A, B間의 距離를 表하고 AP, BQ 等은 普通意味에서의 線分의 길이, 또 K는 定數이다.



5 図

여기에 나타난

$$\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}=\frac{AP}{AQ}:\frac{BP}{BQ}$$

를 普通은 (AB, PQ)로 表하고, 4點 A, B、P, Q의 非調和比라 한다. 非調和比의 簡單한 性質을 쓰면 P, Q, R이 一直線上에 있을 때 $\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$로 되는 것도 證明 된다. (P. 14로)