無 理 數

金 東 郁

緖 言

수의 계통으로 본 수의 개념은 확장되고 점차 새로운 수가 도입되어 복소수의 체계를 확립시켰다. 지금 수의 체계내의 한 부분인 무리수에 대한 수의 기초개념을 배양하여 數學的 사고의 태도를 육성할 목적으로 다음 몇 가지를 중심으로 수의 인식 수의 추리를 도모하였다.

- 무리수의 도입과 일반적인 뜻
- 무리수의 근사값과 처리
- 무리수의 사적고찰
- 무리수

① 冪法(powers)

같은 函數의 連乘積을 그 수의 멱(power)이라하고 이것을 다음과 같은 간단한 기법으로 표시하였다.

$\underbrace{a\,a\,a\cdots\cdots a}_{n}=a^n$ 이 때 a는 어떤 유리수이고 이것을 멱의 底數 (Base)라 하며 n는 양의 정수이다. 이 n를 멱의 지수(index)라고 한다.

$a^n=b$에 있어서 a와 n가 주어지면 b를 구하는 계산를 멱法이라 한다. 卽 멱法은 승법의 특별한 경우에 간편법이다.

$a^m a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^n b^n$

이것을 지수의 三大법칙이라 하고 유리수의 四則 및 멱法에서 얻어지는 결과는 역시 유리수이고 새로운 수를 필요로하지 않는다.

② 開法과 로그法(對數法)

멱法 $a^n=b$에서 b가 주어지면 두 개의 역계산을 생각할 수 있다. 卽

(i) n가 주어지면 a를 구하는 계산이되고

(ii) a가 주어지면 n를 구하는 계산이 된다.

이 때 (i)의 계산을 開法(evolution)이라 하며 (ii)의 계산을 로그법(logarithms)이라고 한다.

卽 開法; $a=\sqrt[n]{b}$ 로그法; $n=\log_a b$이다.

例, $x^2=9$일 때 $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$ (開法)

$3^x=9$일 때 $x=\log_3 9=2$ (로그法)

멱法 $a^n=b$에 있어 a는 어떤 유리수이고 n는 양의 整數이면 b는 결정된 有理數이다.

例, $a=\frac{3}{5}$, $n=4$일 때 $b=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$

또, n의 뜻을 확장하여 분수로 하면 a는 특별한 수가 아니면 b를 유리수로 계산할 수 없다.

例, $a=\frac{8}{125}$, $n=\frac{2}{3}$이면 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, 또는 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$에서

$$b=\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}^{\,2}=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$$

또, $n=-\frac{2}{3}$이면

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$은 적용하여 $b=\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\frac{25}{4}$ 卽 무리수의 범위에서는 멱法을 적용하는데 수의 제한이 있고 이역계산인 開法 및 로그법에 있어서도 특별한 수 b가 아니면 계산이 불가능하다. 고로 算法의 통산으로 a, q, n는 任意의 유리수일 때 恒常멱法, 開法, 로그법이 가능하도록 하여야 한다. 이 목적으로 도입한 수가 무리수 및 허수이다.

지금 開法에서 $b=2$, $n=2$라면

$a^2=2$ $\therefore a=\pm\sqrt{2}$ 이 때 a는 整數가 아니다. 제곱하여 2가 되는 整數는 存在하지 않는다. 이것은 분수나(小數도포함) 만일 분수라고 하면 이것을 $\frac{p}{q}$라고 쓸 수 있다. (단, p, q는 共히 整數이고 既約分數라 한다)

$$a=\frac{p}{q} \quad \therefore a^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2 \quad \therefore 2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$\frac{2}{1}=\frac{p^2}{q^2}$ 이 $\frac{p}{q}$는 既約分數이므로 $\frac{p^2}{q^2}$도 역시 既約分數이어야 한다. 따라서 두개의 既約分數 $\frac{2}{1}$와 $\frac{p^2}{q^2}$이 相等되자면 같은 분수가 되어

야 한다.

$p^2=2$, $q^2=1$이므로 p는 整數에서 제곱하여 2가 되는 수는 존재하지 않으므로 따라서 $\frac{p}{q}$에 적합한 분수도 존재하지 않는다. 卽, a는 정수도 분수도 아니다. 卽, 유리수가 아님을 알 수 있다. 이에 $a^2=2$에 대하여 새로운 수로서 정의하여야 한다. 이것은 무리수(irrational number)라고 한다. 例$b=5^{\frac{2}{3}}$, $n=\log_3 8$, $\sqrt{2}$, …지금까지 開法의 결과로서 무리수를 구하였다. 따라서 일반적으로 멱根은 $a>0$를 임의의 실수라할 때 $\sqrt{a}$ 卽 $x^2=a$ $x>0$의 解가 존재한다. 이것을 x^2의 單調性($x<x'$이면 $x^2<x'^2$)와 연속성을 $x>0$ $x^2<a$인 실수 x의 집합을 A라고 하면 이와 같은 x는 실제존재 한다. 예를 들면

$a<1$이면 $x=a$, $a\geq 1$이면 $x<1$이다.

지금 $A<\mathrm{Max}(1,a)$ 故로, A는 上限을 갖는다. 이것을 λ라고 하면 $\lambda^2=a$, $\lambda=\sqrt{a}$ 이것을 간접법으로 증명하면

$\lambda^2<a$라고 가정하면

上限인 λ의 뜻에서 $0<h<1$인 임의의 h를 취할 수 있다. $\lambda^2<a<(\lambda+h)^2$

卽, $\lambda^2-a<2\lambda h+h^2<2\lambda h+h$

따라서 $0<\frac{\lambda^2-a}{2\lambda+1}<h$

h는 구간(0, 1)부터 임의로 취할 수 있으므로 이것은 불합리하다. 또한 $\lambda^2>a$라고 가정 하면 λ의 뜻에서 $0<h<\lambda$인 任意의 h에 관하여

$(\lambda-h)^2<a<\lambda^2$

卽 $0<\lambda^2-a<2\lambda h-h^2$ 따라서 $0<\frac{\lambda^2-a}{2\lambda}<h$

이것 역시 不合理하다. $\therefore$ $\lambda^2<a$, $\lambda^2>a$가 아니므로 $\lambda^2=a$이다. (證終)

이와 같이 유리수의 제곱한 유리수는 旣約의 꼴로 분모, 분자에 모든 素因子를 偶指數의 멱으로 하여 포함된다. 고로 제곱수(平方數)가 아닌 2, 3…등의 제곱근은 무리수이다.

또한 진법에서 일반으로 t진법으로 특히 10진법에 關하여 다음과 같은 것을 생각할 수 있다. $a/10^n$의 꼴로 나누면 유리수의 10진법 전개는 순환소수가 된다. 逆으로 순환소수는 유리수임을 알 수 있다. 이에 순환하지 않은 무한 10진법 卽, 10, 10^2, 10^3, ……를 0.101001000…와 같이 쓸 경우 0.101001000…는 무리수이다. 다시 말하면 순환소수 이외의 무한 10진법은 모두 무리수이므로 실수중에 유리수와 동등한 무리수가 있음을 알 수 있다.

진법에 의한 유리수의 도입에서 또한 유리수의 전체는 可附番이 아님을 기술하자. 지금 유리수의 전체가 可附番이라고 가정하면, 실수 전체가 可附番이다. 區間 (0, 1)의 실수의 전체가 可附番이 아님을 말하면 된다. 가령 구간 (0, 1)의 실수전체가 可附番이라고 가정하면 이 실수전체에다 α_1, α_2……와 같이 번호를 붙이고 이에 실수를 10진법으로

$\alpha_n=0.\,c_1^{(n)}\,c_2^{(n)}\cdots\cdots c_n^{(n)}\cdots\cdots$라 쓴다.

단, 전개는 正規이며 예를 들면 0.5, 0.500…이고

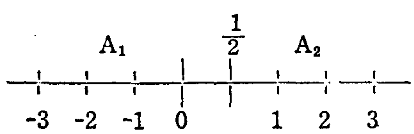
0.499……의 뜻이 아니다. 이것들의 α_n는 어느 것이나 다른 실수 α가 區間(0, 1)中에 반드시 있다는 것을 명시하면 $\alpha=0.\,c_1c_2\cdots\cdots c_n\cdots\cdots$되기 위하여 모든 번호 n에 대하여 $c_n\neq c_n^{(n)}$이다. $c_n^{(n)}$가 짝수이면 $c_n=1$, $c_n^{(n)}$가 홀수이면 $c_n=2$로 된다. 또

$\alpha=0.\,c_1c_2\cdots\cdots$는 正規의 전개로 α_1에는 제1위의 숫자가 위반되고 α_2에는 제2位의 數字가 위반되고 一般으로 α_n에는 n位의 숫자가 위반되어 α는 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n, \cdots\cdots$중에 包含되지 않는다. 卽 區間 (0, 1)의 실수 전체, 可附番인 가정에 불합리하다.

③ 無理數의 일반적인 뜻

일반무리수의 뜻은 K. Weierstrass(1815~1897)의 집합체이론, G. Cantor(1845~1918)에 의한 유리수群의 이론 W. Dedekind(1831~1916)의 Schnitt (切斷)에 의한 이론에서 보면 대략 다음과 같다.

유리수는 일직선상에 배열할 수 있다. 그러나 여하히 두개의 유리수사이에 반듯이 제3의 유리수가 존재하여 유리수는 밀집하다. 지금 유리수렬에서 임의의 한 유리수의 $\frac{1}{2}$를 취하면 $\frac{1}{2}$는 그외의 전유리수를 두개의 群으로 區分한 것이 명백하다.



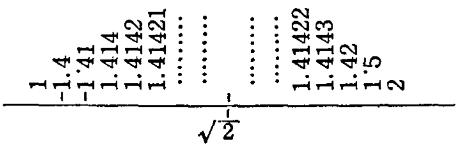
$\frac{1}{2}$보다 적은 모든 유리수의 群을 A_1, $\frac{1}{2}$보다 큰 모든 유리수의 群을 A_2라 하면 다음과 같은 것을 알 수 있다.

(i) A_1의 유리수 전체는 A_2의 유리수보다 적다.

(ii) 유리수는 밀집하므로 $\frac{1}{2}$에 접근한 유리수(大小兩側부터), A_1에 최대가 없고 A_2에는 최소가 없다. 即 $\frac{1}{2}$는 $\frac{1}{2}$이외의 전유리수를 두개의 群으로 구분할 수 있다. $\frac{1}{2}$를 A_1이나 A_2에 포함하여 생각하면 이群에 최대 또는 최소가 있는 것을 알 수 있다. 새로 다른 방법으로 유리수를 구분할 수 있다. 前述한 바와 같이 제곱하여 2가 되는 유리수는 存在하지 않으므로 지금 제곱하여 2보다 큰 양의 모든 有理數의 群을 B_2라 하고 그외의 모든 유리수의 群을 B_1라 하면

(i) B_1의 유리수는 모든 B_2의 유리수보다 적다.

(ii)B_1에는 최대가 없고 B_2에는 최소가 없다.



즉 전유리수를 두개의 群으로 區分하면 $\frac{1}{2}$의 경우와 동일하나, 앞 경우에는 A_1, A_2 사이에 존재한 하나의 유리수의 $\frac{1}{2}$였다. 지금 경우는 B_1, B_2사이에 存在하는 것은 유리수가 아니다. 따라서 이 수에 새로운 數로서 위치를 주어 유리수와 同列에 삽입하여 加하여도 됨을 알 수 있다. 여기에서 새로운 수 $\sqrt{2}$는 다음과 같은 정의를 줄 수 있다.

$\sqrt{2}$는 제곱(平方)이 2보다 큰 모든 양數와 제곱이 2보다 적은 모든 양數와의 사이에 있는 수다. 이러한 성질을 가진 수를 일반적으로 유리수라고 한다. 即, 유리수는 開法의 결과로 얻어지는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$등의 不盡根數 (Surd)만이 아니고 $a^x=b$ 또는 $x=\log_a b$에 적합한 수 x등도 일반적으로 무리수이며 sin20, cos50°와 같이 삼각함수의 값도 역시 무리수이다. 또, 圓周率 $\pi=3.141592653589\cdots\cdots$등도 무리수임을 안다.

무리수의 계산은 무리수의 계산과 같이 동일한 원칙에 의하여 할 수 있도록 정하였다. 유리수와 무리수를 총괄하여 이룬 수의 계통을 실수(Real Number)라고 한다.

무리수는 이미 밀집하다. 이사이에 새로히 무리수를 加하므로 一直線上의 여하한 점에도 항상 이에 대응하는 수가 存在한다. 반대로 모든 실수는 각각이에 대응하는 점을 그 직선상에 취할 수 있다. 即, 全實數와 일직선상의 모든 점은 1對1로 대응할 수 있다. 이뜻에서 실수는 연속적(continuous)이라고 한다. 실수는 제곱하여도 음(負)이 되지 않는다. 지금 a를 실수라 할 때

$a^2 \geqq 0$ 따라서 a, b, c를 실수라 하면 이 제곱의 합이 0(zero)이 되자면 각각 동시에 0(zero)이 되어야 한다.

$a^2+b^2+c^2=0 \quad a=b=c=0$

④ **무리수의 근사값**

무리수에는 이 수에 아주 가까운 유리수들이 存在한다. 무리수보다 큰 쪽에서 가까운 것과 작은 쪽에서 가까운 유리수들을 무리수의 근사값(approximate value)이라고 하며 實際計算에서는 근사값으로 무리수계산에 대용한다. 무리수보다 큰쪽의 근사값을 과잉근사값 작은 쪽에 근사값을 부족한 근사값이라고 한다. 근사값의 처리에서는 오차가 생긴다. 이 때 測定값의 信賴度에 유의하여 근사값을 처리하여야 한다. 원인에 의한 오차는 정오차 우연오차 과실오차등이 있으나 우연오차는 여러가지로 누적된 오차이므로 이 오차는 正規分布로 적당한 δ에 대하여 오차 (ε) ε_1, ε_2사이의 확률로서 正規曲線의 면적

$\int_{\varepsilon 1}^{\varepsilon 2}\phi_\delta(x)dx$가 됨을 Gauss는 가정으로

증명하여 $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$인 것을 測定의 精度로 하였다.

오차($\triangle a$)=근사값 (a)~참값 (A)=|근사값—참값| 即, 어떤 수 A의 근사값을 a라 할 때 $\triangle a=a-\mathrm{A}$를 a의 오차이다. ($a>A$일 때 a를 과잉근사값, $a<A$일 때 a를 부족한 근사값)

참값(A)는 일반으로 알 수 없으나 이 경우 어떤 δ에 대하여 $|\triangle a| \leqq \delta$ 됨을 알고 있을 때 A는 $a-\delta \leqq A \leqq a+\delta$로서 A가 어떤 범위내에 있음

을 알 수 있다. 이 때 δ를 근사값 a의 오차의 한계라 하며 $A=a\pm\delta$와 같이 표시한다. 오차와 근사식

$$f(a+\triangle x)\fallingdotseq f(a)+\triangle xf'(a)\fallingdotseq f(a)+\triangle xf'(a)+\frac{(\triangle x)^2}{2}\cdot f''(a)$$

에서 다음과 같이 발전하여고찰한다. 函數 $f(x)$에 대하여 $f(A)$ 대신에 $f(a)$를 적용할적의 誤差를 ε라하면

$$\varepsilon=f(a)-f(A)=f(a)-f(a-\triangle a) \quad ①$$

따라서 $f(a-\triangle a)\fallingdotseq f(a)-\triangle a\cdot f'(a)\cdots\cdots②$

①과 ②에서 $\varepsilon\fallingdotseq\triangle a\cdot f'(a)\cdots\cdots③$

이때 상대오차는 ③에서

$$\left|\frac{\varepsilon}{f(a)}\right|\fallingdotseq\left|\frac{\triangle a\cdot f'(a)}{f(a)}\right|=\left|\triangle a\right|\cdot\left|\frac{f'(a)}{f(a)}\right|$$

$\triangle a$를 상대오차와 구별하여 절대오차라고 한다. 또한 ③에서 $\varepsilon\fallingdotseq\triangle a\cdot f'(a)$를 多變數의 함수일 때 확장하여 獨立變數 $x_1, x_2\cdots\cdots, x_n$의 함수 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$를 생각하면 $f(A_1, A_2\cdots\cdots, A_n)$ 대신에 $f(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$를 적용할적에 오차를 $\triangle f$라하면 Taylor定理에서

$$\triangle f\fallingdotseq\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\triangle a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\triangle a_2+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\triangle a_n\cdots\cdots④$$

이 식에서 $\triangle a$는 a의 오차이고 偏導函數 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$에는 근사값 a_1, $a_2, \cdots\cdots a_n$를 대입한 것이다.

④를 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$

$f(x, y)=xy$

$f(x, y, z)=\frac{xy}{z}$ 등의 특별한 경우를 생각하면 근사값의 가감승제에 대한 오차의 성질을 다음과 같이 도입할 수 있다.

(i) $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=x_1+x_2+\cdots\cdots x_n$일 때

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\cdots\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=1$ 이므로 ④에서

$$\triangle f=\triangle a_1+\triangle a_2+\cdots\cdots+\triangle a_n$$

$$\therefore\ |\triangle f|\leq|\triangle a_1|+|\triangle a_2|+\cdots\cdots+|\triangle a_n|$$

(ii) $f(x, y)=xy$ 일 때

$\frac{\partial f}{\partial x}=y$ $\frac{\partial f}{\partial y}=x$이므로 x, y에 대입한 근사값을 a, b라 하면 ④로부터 $\triangle f=b\triangle a+a\cdot\triangle b$이다. 양변을 $f=ab$로 나누면 $\frac{\triangle f}{f}=\frac{\triangle a}{a}+\frac{\triangle b}{b}$

$$\therefore\ \left|\frac{\triangle f}{f}\right|\leq\left|\frac{\triangle a}{a}\right|+\left|\frac{\triangle b}{b}\right|$$

(iii) 數個의 變數의 積 및 商

$f=\frac{xy}{z}$일 때 $\log f=\log x+\log y-\log z$

③과④에서 $\frac{\triangle f}{f}\fallingdotseq\frac{\triangle a}{a}+\frac{\triangle b}{b}-\frac{\triangle c}{c}$

$$\therefore\ \left|\frac{\triangle f}{f}\right|\leq\left|\frac{\triangle a}{a}\right|+\left|\frac{\triangle b}{b}\right|-\left|\frac{\triangle c}{c}\right|$$

또한, 같은 측정을 N回試行하여 측정값을 얻을 수 있을 때

卽 $\frac{\text{측정값}\ |\ x_1\ x_2\cdots\cdots x_n}{\text{도 수}\ |\ f_1\ f_2\cdots\cdots f_n}$ 이것들의 측정값의 평균값을 $\bar{x}$라 하면 $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_if_i$ 이때 평균값 $\bar{x}$는 測定하고자 하는 참값의 推定값이다. 測定값의 분포로서 표준편차 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$에 의하여 편차의 대소에 따라 측정의 精度如否를 推定할 수 있다.

⑤ **無理數의 指導**

(i) $\sqrt{2}$는 무리수임을 다음과 같이 증명하자.

$\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}\cdots$①라고 할 수 있다($q, p$는 서로素)

따라서 $2=\frac{p^2}{q^2}$ $\therefore\ p^2=2q^2\cdots\cdots②$

②의 右邊 $2q^2$는 짝수이므로 左邊 p^2도 짝수가 되어야하므로 $p=2m$ (m는 整數)라 놓고

②를 대입하면 $(2m)^2=2q^2, 4m^2=2q^2$

$\therefore\ 2m^2=q^2\cdots\cdots③$이다. ③에서 q는 짝수이어야 한다. 따라서 q, p도 짝수로 q, p는 공약수 2를 갖는 고로 ①의 가정에 위반된다. 고로 $\sqrt{2}$에 等한 유리수는 존재하지 않는다. 卽 整數의 제곱근은 정수이나 그렇지 않으면 무리수이다.

(ii) $\sqrt{2}\fallingdotseq1.414$를 적용할 때 $\sqrt{0.2}$를 구할 경우

$\sqrt{0.2}=0.1414$라고 오답하는 경우가 많다. 이때, 0.2와 비교하여 소수점의 위치를 두자리씩 (일반적으로 짝수자리) 구분한 제곱근 $\sqrt{2.0}=4.4721$를 적용하여 $\sqrt{0.2}=0.44721$로 해답하도록 지도하여야 한다. 이러한 성질로 다음과 같이 소수점을 기준으로 하여 正解할 수 있도록 한다.

$\sqrt{8|00}\cdots\sqrt{8}$를 적용 $\sqrt{80|00}\cdots\sqrt{80}$를 적용
$\sqrt{8|00|00}\cdots\sqrt{8}$ 〃 $\sqrt{0.\,|00|80}\cdots\sqrt{80}$ 〃
$\sqrt{0.08}\cdots\cdots\sqrt{8}$ 〃

또, 비례부분의 계산을 지도할 경우 다음 사항을 유의하여야 한다. 지금 $\sqrt{45.7}$를 구하자. 우선 표의 수값이 소수네자리 미만을 반올림한 수임을 알고 필요이상으로 상세히 구하는 습관으로 틀리는 수가 있다.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{46}\cdots\cdots 6.7823\\ \sqrt{45}\cdots\cdots 6.7082\end{array}\right\}\text{表差}\cdots\cdots\begin{array}{r}0.0714\\ \times\quad 0.7\\ \hline 0.0518\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\quad 0.7\cdots 0.05187\\ \hline \sqrt{45.7}\cdots 6.76007\end{array}$$

이 때 수의 증가가 아주 적을 때 제곱근의 값의 증가에는 거의 비례한다는 것을 이해시켜 반올림하여 $\sqrt{45.7}=6.6701$로 취한다. 이와 같이 표를 사용하여 계산할 적에는 항상 주의하여야 한다.

(iii) 무리수와 순환소수의 지도를 철저히 하여야 한다. 분수는 일반적으로 소수로 표시하면 유한소수이거나 순환소수이다. 逆으로 유한소수 또는, 순환소수는 분수로 고칠 수 있다.

비순환무한소수는 무리수이며 逆으로 무리수를 소수로 표시하면 비순환무한소수임을 유의하여야 한다.

⑥ 無理數의 歷史

무리수의 존재를 고찰한 것은 기원전 500년경의 數學者이며 哲學者인 희랍의 Pythagoras가 Pythagoras정리를 발견할 적부터였다.

三邊이 간단한 정수로 표시할 수 있는 직각삼각형을 구할 수 있는 것이 당시의 문제였다. 三邊의 길이를 3, 4, 5로 할 적에 가장 간단한 직각삼각형임을 알았다. 이때 두 邊을 어떤 整數로 표시할적에 제3邊을 정수 또는 분수로 구하는데 곤란하다는 것을 경험하였다.

이와같이 하여 무리수의 존재를 알았고 가장 간단한 直角三角形의 두 邊을 1로 하였을 때의 二等邊直角三角形의 빗변의 길이를 표시하는 수 $\sqrt{2}$를 최초로 연구하였다. 그후 무리수의 근사값의 계산을 처음으로 서기전 200년경 희랍의 Archimedes가 圓周率의 근사값으로 $\frac{22}{7}$를 적용하였다. 圓周率이 무리수임을 처음으로 발표한 것은 1766년에 Lambert이고 1882년에 Lindeman이 圓周率은 超函數이고 不盡根數 (surd)가 아님을 증명하였다.

현재 圓周率의 기호를 π로 사용한 것은 1706年 Jonse이 최초였다. 세계적으로 적용한 것은 Euler의 저서 Introduction in Analysis Infinitorum이 발행한 1748년이래였고 π의 근사값으로 3.14, 3.1416, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$로 사용되었다. 또한 17세기경 무리수를 고찰한 것은 Newton이 연속의 이론에서 일반무리수의 存在와 뜻을 연구하게 되었다. 이어 K. Weierstrass(1815~1897) G. Cantor(1845~1918) W. Dedekind(1831~1916)등의 연구로서 이론이 완전히 확립되었다.

또한, 기호의 변환을 조사하여 보면 다음과 같다.

$\left.\begin{array}{l}R^2\times 16=4\\ R^3\times 27=3\end{array}\right\}$ Nioolas Chuguet (1450年頃)

√③ √④ (三乘根, 四乘根) Simon Stevin (1548~1620)

$\sqrt{A}$를 $\sqrt{q}$.l William Qughtred(1575~1660)

√ Rene Descartes(1596~1620)

參考文獻

• Modern Algebra VAN der Waerden 著
• 數의 槪念 高木貞治 著
• History of Mathematice Notations F.Cajori 著
• History of Mathematics D.E.Smith 著

參考 1

N	$\sqrt{N}$
2	1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 698
3	1.732 050 807 568 877 293 527 446 341 505 872
5	2.236 067 977 499 789 696 409 173 668 731 276
6	2.449 489 742 783 178 098 197 384 074 705 891
7	2.645 751 311 064 590 590 501 615 753 639 260
8	2.828 427 124 746 190 097 603 377 448 419 396
10	3.162 277 660 168 379 331 998 893 544 432 718
11	3.316 624 790 355 399 849 114 932 736 670 686

參考 2

$\pi=3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383$

$\sqrt{\pi}=1.772\ 453\ 850\ 905\ 516\ 027\ 298\ 167\ 483$

$\frac{1}{\pi}=0.318\ 309\ 886\ 183\ 790\ 671\ 537\ 767\ 526$

$\pi^2=9.869\ 604\ 401\ 089\ 358\ 618\ 834\ 490\ 999$

$e=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471$

$\sqrt{e}=1.648\ 721\ 270\ 700\ 128\ 146\ 848\ 650\ 803$

$\sqrt[3]{2}=1.259\ 921\ 049\ 894\ 873\ 164\ 767\ 106\ 207$

$\sqrt[3]{e}=1.395\ 612\ 425\ 086\ 089\ 528\ 628\ 125\ 319$

(三陟工業高等專門學校)