Grpah를 통한 효과적인 부등식의 해법과 실천적 연구

이 상 석

1. 교재명 및 지도 내용

① 교재명……고등학교 해석 (이성헌 저)

② 지도내용…유리 부등식

2. 연구의 동기

① 2차 부등식의 지도 시에 절대 부등식과 조건부 부등식을 포함한 일반적인 지도 방법은 graph를 사용하면 근과 판별식을 써서 해결할수 있음을 알고,

② 위의 결과를 고차 부등식에 적응 시킬수 있고 그러면 계산의 번잡성을 피할수 있는 장점과 학습에 흥미를 줄수 있음에 유의 하여 이 사실을 정리하여 보게 되었다.

3. 학습지도 과정

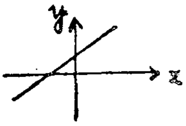
① 도입 과정

㉠ Graph의 개형의 지도

증가 감소 상태와 x대와의 교점의 수를 중심으로 x의 n차 함수를 $y=f(x)$ 이라 하면

※ $n=1$ 일때 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

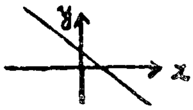
$a>0$ 이면



I (증가)

꼭 x대와 한점에서 만난다

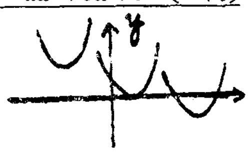
$a>0$ 이면



D (감소)

※ $n=2$ 일때 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

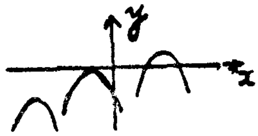
$a>0$ 이면



D → I x대와 만나지 않거나 두점에서 만난다.

※ 접점은 두점으로 간주함

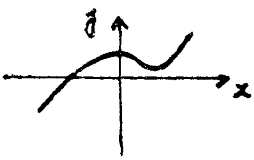
$a>0$ 이면

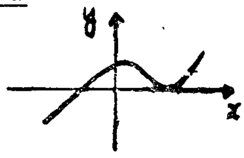


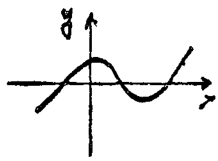
I → D

※ $n=3$ 일때 $y=ax^2+bx^3+cx+d$

$a>0$ 이면

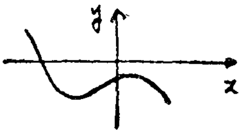


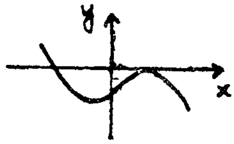


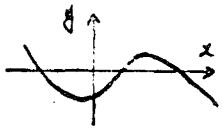


I → D → I

$a>0$ 이면





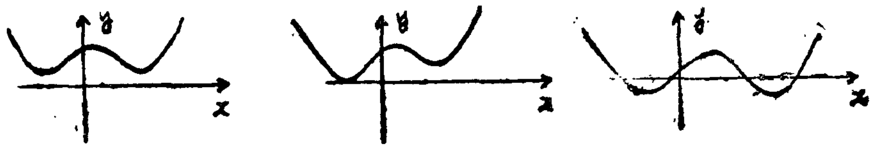


D → I → D

x대와 반드시 한점 또는 3점에서 만난다.

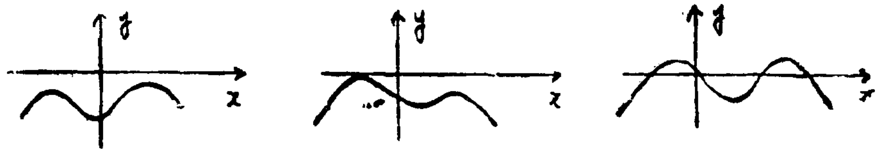
※ $n=4$일때 $y=ax^4+bx^3+ax^2+dx+e$

$a>0$ 이면



Ⓘ→Ⓓ→Ⓘ→Ⓓ

$a<0$ 이면



Ⓓ→Ⓘ→Ⓓ→Ⓘ

x대와 만나지 않거나 2점 또는4점에서 만난다.

위의 사실을 일반화 하면

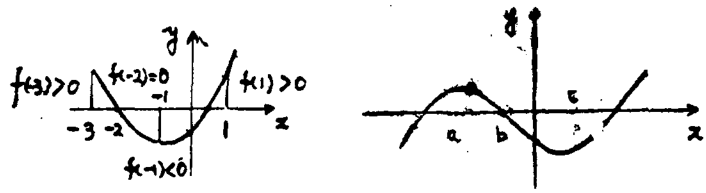
$y=f(x)$ $(a>0)$에서 최고차항의 차수가

홀수이면→ graph는 증가 부터 시작하고 x대와 만나는 갯수는 홀수개 이다

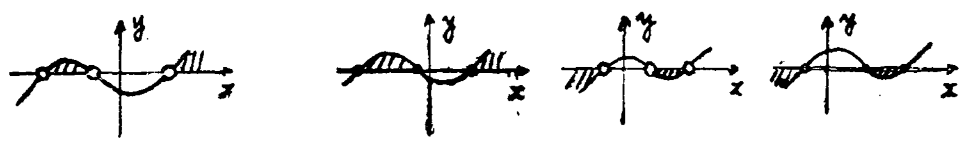
짝수이면→ graph는 감소 부터 시작하고 x대와 만나서 않거나 짝수 개에서 만난다

㉡ 함수치 및 양음의 표시법

※ $y=f(x)$의 graph가 다음과 같을 때 주어진 x의 점에 있어서 함수치를 표시하고 그 부호를 정하여라.



※ $y=f(x)$의 graph가 다음과 같을 때 다음에 주어진 부분을 표시 하여라



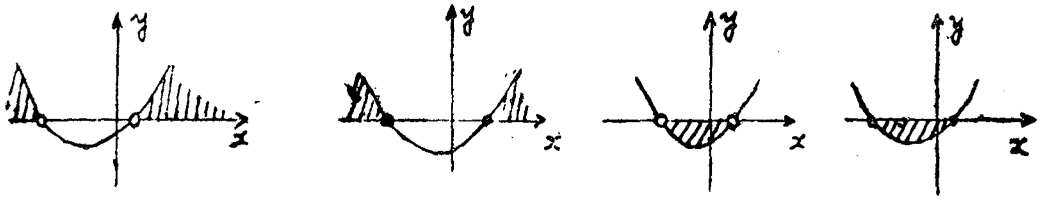
② 전개 및 풀이 과정

㉠ 2차 부등식의 지도

a. 전 개

D>0 인 경우 $(a>0)$

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha>\beta)$



$y>0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$
$x>\alpha$ or $x>\beta$

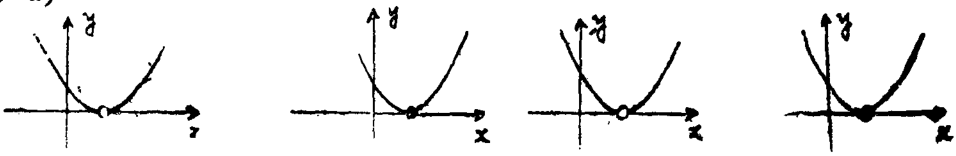
$y\geqq 0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$
$x\geqq\alpha$ or $x\leqq\beta$

$y>0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$
$\beta<x<\alpha$

$y\leqq 0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$
$\beta\leqq x\leqq\alpha$

D=0 인 경우 $(a>0)$

$y=a(x-\alpha)^2$



$y>0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)^2>0$
$x\neq\alpha$인 모든 실수

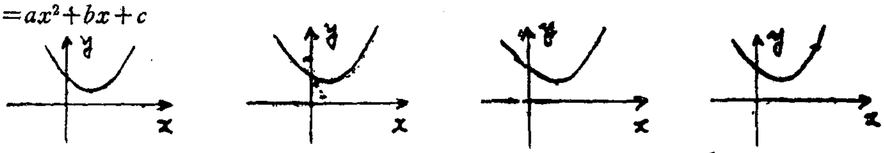
$y\geqq 0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)^2\geqq 0$
x는 모든 실수
(절대 부등식)

$y<0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)^2<0$
불능

$y\leqq 0 \rightarrow$
$a(x-\alpha)^2\leqq 0$
$x=\alpha$

D<0 인 경우 $(a>0)$

$y=ax^2+bx+c$



$y>0 \rightarrow$
$ax^2+bx+c>0$
x는 모든 실수
(절대 부등식)

$y\geqq 0 \rightarrow$
$ax^2+bx+c\geqq 0$
불능

$y<0 \leftrightarrow$
$ax^2+bx+c<0$
불능

$y\leqq 0 \rightarrow$
$ax^2+bx+c\leqq 0$
불능

b. 풀이 (문제 제시)

$(x-2)(x-3)>0 \rightarrow (x+1)^2\geqq 0 \rightarrow x^2+2x+8<0$

$\downarrow$ $x^2+4x-3\leqq 0$ (D>0)

$\downarrow$ $4x^2-4+1<0$ (D=0)

$\downarrow$ $(x-2)^2+1\geqq 0$ (D<0)

c. 요약 정리

※ 먼저 판별식을 정한다

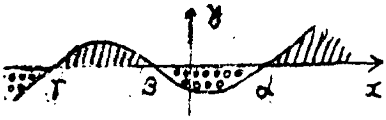
※ D≧0 인 경우 그 근을 구한다

※ x대와 만나는 점을 유의 하여 개형을 그리고 만족 하는 x의 범위를 구한다.

㉡ 3차 부등식의 지도

a. 전개

$(y=)\ a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\geqq 0$ 인 경우 $(a>0$ 이고 $\alpha>\beta>\gamma)$



$y \geqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \geqq 0$

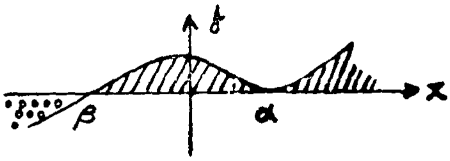
$x \geqq \alpha, \quad \gamma \leqq x \leqq \beta$

$y \leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \leqq 0$

$\beta \leqq x \leqq \delta, \quad x \leqq \gamma$

(y=) $a(x-\alpha)^2(x-\gamma) \gtreqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $\alpha=\beta>\gamma$ 일때



$y>0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)>0$

$\beta<x<\alpha$ or $x>\alpha$

$y \geqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma) \geqq 0$

$x>\beta$

$y<0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)<0$

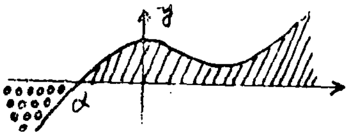
$x<\beta$

$y \leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma) \leqq 0$

$x<\beta$ or $x=\alpha$

(y=) $a(x-\delta)\ (x^2+bx+c) \gtreqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $x^2+bx+c=0$ 의 판별식이 $D<0$ 일때



$y \geqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x^2+bx+c) \geqq 0$

$x \leqq \alpha$

$y \leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x^2+bx+c) \geqq 0$

$x \geqq \alpha$

b. 풀이 (문제 제시)

$(x-1)(x+2)(x-2)>0 \rightarrow (x-1)^2(x+3) \leqq 0$

$\downarrow$

$x^3-3x^2+2x \geqq 0$

$(x-1)^2(x+3) \leqq 0$

$\downarrow$

$(x-1)(x+3)^2>0$

$\downarrow$

$x^3-6x^2+9x<0$

$(x^2+x+1)(x-2) \leqq 0$

$\downarrow$

$(x+1)(x^2+2x+5)>0$

$\downarrow$

$(x^3+2x^2+3x+2) \leqq 0$

c. 요 약 정 리

※ 먼저 인수분해 한다. (반드시 1차의 인수를 갖는다.)

※ 인수분해 된 식이 2차식일 때는 판별식을 구한다.

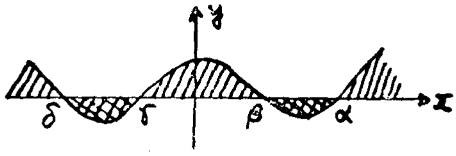
※ 근을 구하여 순서대로 나열한 뒤 개형을 그리고 주어진 범위를 구한다.

ⓒ 4차 부등식의 지도

a. 전 개

(y=) $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \gtreqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $\alpha>\beta>\gamma>\delta$



$y \geqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \geqq 0$

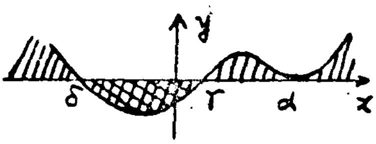
$x \geqq \alpha$ or $\gamma \leqq x \leqq \beta$ or $x \leqq \delta$

$y \leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \leqq 0$

$\beta \leqq x \leqq \alpha$ or $\delta \leqq x \leqq \gamma$

(y=) $a(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta) \gtreqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $\alpha=\beta>\gamma>\delta$ 일때



$y>0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta)>0$

$x>\alpha,\ \gamma<x<\alpha,\ x<\delta$

$y \geqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta) \geqq 0$

$x \geqq \gamma$ or $x \leqq \delta$

$y<0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta)<0$

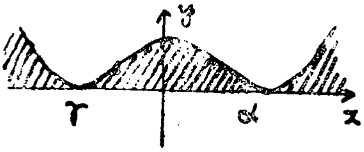
$\delta<x<\gamma$

$y \leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta) \leqq 0$

$x=\alpha$ or $\delta \leqq x \leqq \gamma$

$(y=)\ a(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2 \gtreqqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $\alpha=\beta>\gamma=\delta$ 일때



$y>0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2>0$

$x>\alpha,\ \gamma<x<\alpha,\ x>\gamma$

$y\geqq 0 \rightarrow (x-\alpha)^2(x-\gamma)^2\geqq 0$

모든 실수 (절대부등식)

$y<0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2<0$

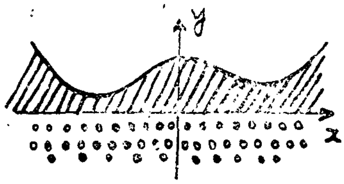
불능

$y\leqq 0 \rightarrow a(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2\leqq 0$

$x=\alpha$ or $x=\gamma$

$(y=)\ a(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)\gtreqqless 0$ 인 경우

$a>0$ 이고 $x^2+bx+c=0$, $x^2+dx+e=0$의 판별식이 모두 음수인 경우



$y>0 \rightarrow a(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)>0$

모든 실수 (절대부등식)

$y\geqq 0 \rightarrow a(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)\geqq 0$

불능

$y<0 \rightarrow a(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)<0$

불능

$y\leqq 0 \rightarrow a(x^2+bx+c)(x^2+dx+e)\leqq 0$

불능

b. 풀이 (문제제시)

$(x+2)(x-1)(x+1)(x-2)\geqq 0$
$\downarrow$
$(x^2+3x+2)(x^2-5x+4)<0$
$\downarrow$
$x^4-13x^2+36\geqq 0$

$\rightarrow (x-3)^2(x-2)(x-1)<0$
$\downarrow$
$(x^2-4x+4)(x-2)(x-3)\geqq 0$

$\rightarrow (x+1)^2(x-2)^2>0$
$\downarrow$
$(x^2-4x+4)(x^2+6x+9)\leqq 0$

$\rightarrow (x^2+2x+3)(x^2+3x+8)\leqq 0$
$\downarrow$
$x^4+4x^3+9x^2+8x+5<0$

4. 학습 효과의 비교 측정

앞의 방법으로 지도한 결과가 교과서 대로 지도한 방법에 비해 어느정도의 학습효과가 있는가를 비교 측정 해본 방법과 결과는 다음과 같다.

1. 학습지도 및 평가 대상

경남 남해수산 고등학교 제3학년 A, B반 100명

2 학습지도 및 평가 집단 구성

A, B두 학급중 A반에는 $\boxed{\text{부등식의 정의, 성질}}$ (1시간) → $\boxed{\text{절대 부등식}}$ (2 시 간) → $\boxed{\text{조건부 부등식}}$ (3시간)

의 순으로 지도 하고 이를 G형지도법 이라 평하고 B반에는

$\boxed{\text{부등식의 정의, 성질}}$ (1시간) → $\boxed{\text{절대 부등식}}$ (1시간) → $\boxed{\text{조건부 부등식}}$ (1시간) → $\boxed{\text{Graph의 설명을 가한 절대·조건부 부등식}}$