集合과 公理

洪 承 囍

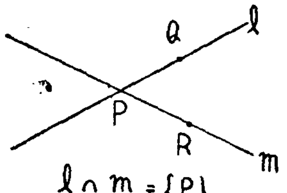
1. 序 言

數學의 現代化로서 數學을 抽象化 한다고 하는 것은 大端히 重要한 일이다. 具體的이고 直觀的으로 이루어진 여러가지 基本法則들을 根本的으로 解決하기 爲하여 이들을 左右하는 法則을 發見하는데 努力하지 않으면 안된다. 이러한 立場에서 集合論은 現代數學의 바탕으로 되어 있으며 數學의 各分野에서 大端히 重要視되고 있다. 本硏究에서는 集合의 槪念과 基本事項에 關한 것은 論하지않고 이미 中等學校에서 學習한 基本圖形의 定義와 公理에 集合의 槪念을 어떻게 導入하여 幾何學을 展開해 나갈 것인가? 하는 問題만을 論하기로 한다.

2. 平面에서의 點과 直線

우리들은 幾何學的圖形의 作圖에 있어서나, 幾何學的圖形의 觀察에 있어서나 恒常 圖形은 點의 集合이라고 하는 集合의 槪念을 생각하지 않으면 안된다. 모든 圖形은 한 平面을 몇개의 部分集合으로 分割한다고 하는 事實은 明白하다.

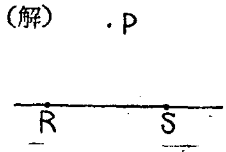
幾何學에서 생각하는 簡單한 圖形으로서 直線을 들수있으며 자(尺)를 利用하여 直線의 한 部分을 作圖할수있다. 그러나 平面上에 두 점을 잡고 이 두 점을 지나는 直線은 單 하나밖에 作圖할수없다. 두 直線은 共通인 한 點을 가지고 있다. 卽 平行이 아닌 두 直線은 한 點 以外에 共有點을 가지고 있지 않다.



$l \cap m = \{P\}$

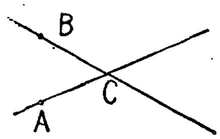
지금 한 點 P를 共有하는 두 直線 l과 m이 있어 萬若 $Q \in l$(곧 Q는 l에 屬하거나 l上에 있다)이고 $Q \neq P$이라 하면 直線 l은 點 P와 Q를 包含하는 直線이다. (또는 點 P와 Q에 依하여 決定되는 直線이다)위 그림 1에서 直線 l을 $\overleftrightarrow{PQ}$로 表示하고 直線 PQ라 읽는다. 이 事實을 集合의 記號로 表示하면 $\overleftrightarrow{PQ} \cup \overleftrightarrow{PR} = \{P\}$와 $\overleftrightarrow{PQ} \cup \overleftrightarrow{RQ} = \{Q\}$로 나타내진다. 다음에 두 點 A,B를 잡고 直線 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{BA}$를 作圖하면 같은 直線이 된다고 하는 것을 바로 알수있다. 卽, $\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$가 되어 $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$가 된다. 다시 $C \in \overleftrightarrow{AB}$인 第三點 C를 잡을때 세 點 A, B, C를 지나는 直線을 作圖할수 있겠는가? 를 생각할때 當然히 作圖할수 없다. 또 $C \in l$이고 $l \cap \overleftrightarrow{AB} = \phi$인 直線 l은 몇개 作圖할수있는가? 에 대하여는 單 하나 뿐이다 라고 하는 事實은 明白 하다. 以上에서 說明한 것을 整理하면 다음과 같다. 交叉點이 없는 두 直線(곧 共有點을 갖지 않음)을 平行線이라고 한다. 따라서 直線 S가 直線 t에 平行이기 위한 必要充分條件은 $S \cap t = \phi$인 것이다. 또 "세 直線 l, m, n이 있어 $l /\!/ m$이고 $m /\!/ n$이면 $l /\!/ m$이다" 라고 하는것을 「$l \cap m = \phi$, $m \cap n = \phi$이면 $l \cap n = \phi$」로 나타낸다. 같은 直線에 屬하는 세 點 M,N, R를 잡으면 $\overleftrightarrow{MN} = \overleftrightarrow{NR}$이다. 이때 세 點 M,N,R을 共線點이라고한다. 따라서 한 點集合이 共線點의 集合이 되기 爲한 必要充分條件은 모든 點들이 같은 直線에 包含 되는 것이다. 몇가지 예를 들면 다음과 같다. (解)

(例 1) $P \not\subseteq \overleftrightarrow{RS}$이 表示하는 그림을 作圖하라.



(例 2) 三點 A, B, C,가 있고 $C \not\subseteq \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BC}$인 것을 作圖 하여라.

(解) 不可能 하다.



왜냐하면 $C \in \overleftrightarrow{AC}$ 이고 $C \in \overleftrightarrow{BC}$ 이므로 C는 $\overleftrightarrow{AC}$ 와 $\overleftrightarrow{BC}$ 의 交叉點에 屬하기 때문이다.

(練習問題) 다음 圖形을 作圖 하여라.

(1) $A \neq B$ 이고 $C \in \overleftrightarrow{AB}$
(2) l 와 m 은 두 直線, $P \in l \cap m$.
(3) l 와 m 은 두 直線, $P \neq R$, $\{R, P\} \subseteq l \cap m$.
(4) A, B, C, D는 네 點, $A \in \overleftrightarrow{BC}$, $B \in \overleftrightarrow{AD}$.
(5) r 와 s 는 두 直線, $r \cap s \neq \phi$.
(6) r 와 s 는 두 直線, $r \cap s = \phi$
(7) r, s, t 는 세 直線, $P \notin (r \cap s) \cap t$.
(8) r, s, t 는 세 直線, $P \in (r \cap s) \cap t$
(9) r, s, t는 세 直線, $P \neq Q$, $\{P, Q\} = t \cap (r \cup s)$.
(10) A, B, C는 세 共線點, D는 $D \in \overleftrightarrow{BC}$ 인 第四의 點.
(11) A, B, C는 세 共線點이고 B, D, E도 세 共線點이며 $D \not\subseteq \overleftrightarrow{AB}$
(12) A, B, C, D는 共線點이 아닌 네點이고 $B \in \overleftrightarrow{AC}$, $B \in \overleftrightarrow{AD}$.

위 에서 말한 예제 1, 예제 2를 참고로 하면 위 연습문제를 풀수있다.

3. 直線上에서의 點의 順序

한 直線 l 을 긋고 直線 l 上에 두點 P. Q가 있다고 하자. l 上에 다른 한 點 V를 잡고 다음 事項에 對하여 眞僞를 調査해 보자.

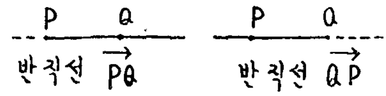
(1) Q는 P와 V 사이에 있다.
(2) Q는 V와 P 사이에 있다.
(3) V는 P와 Q 사이에 있다.
(4) V는 Q와 P 사이에 있다.
(5) P는 Q와 V 사이에 있다.
(6) P는 V와 Q 사이에 있다.

위의 6가지 事項中 (1)과 (2)만이 眞이고 나머지 것은 옳지 않다고 하는것을 바로 알수있다.

3點 A, B, C가 주어지고 한 點이 다른 두 點 사이에 있다면 이 3點은 共線點이 될것이다. 만일 3點 D, E, F가 共線點이 아니라면 그들中의 어느 한點은 다른 두 點 사이에 놓이지 않게 된다. 그러나 3點이 共線點이면 이들中 한點은 다른 두點 사이에 있게된다.

지금 한 直線을 긋고 그 위에 네점 A,B,C,D를 이 順序로 잡으면 B는 A와 C 사이에 있고 C는 B와 D 사이에 오게 된다. 또한 이때에 B는 A와 D 사이에 있고 C는 A와 D사이에 오게 된다. 따라서 다음과 같이 半直線을 定義할수있다.

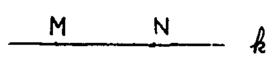
直線 l 上의 한點 P를 잡고 P點의 같은 쪽에 있는 모든 點들의 集合을 半直線이라 하고(P點은 包含하지 않음) 이것을 $\overleftrightarrow{PQ}$ 로 表示한다.



다음은 l 上에 3點 A,B,C (B는 A와 C 사이에 있다)를 잡고 $D \in l$ 라 할때 다음 事項에 關하여 $D \in \overleftrightarrow{BC}$ 의 成立 與否를 調査해보자.

(1) D는 A와 C 사이에 있다(있을수도 있고 없을수도 있다)
(2) D는 B와 C 사이에 있다.(있다)
(3) A는 B와 D 사이에 있다.(불확실하다)
(4) C는 B와 D 사이에 있다.(있다)
(5) D=C (있다)
(6) B는 A와 D 사이에 있다.(불확실하다)

지금 B가 A와 X 사이에있는 그러한 모든點 X의 集合은 무엇이며, 또 B가 C와 X 사이에 있는 그러한 모든點 X의 集合은 무엇일까? 라고 하는것을 생각할때 이것은 둘 다 半直線 $\overleftrightarrow{BX}$ 를 나타내게 된다. 또 M과 N을 直線 k 上의 두點이라 하면 $\overleftrightarrow{MN} \equiv \overleftrightarrow{NM}$ 이라 할수 있는가? 그리고 또 $\overleftrightarrow{MN} \cup \overleftrightarrow{NM}$ 은 어떤 集合을 말하는가? 에 대하여는 于先 前者의 것은 成立할수 없고 後者의 것은 $\overleftrightarrow{MN}$ 을 나타내게 된다.



따라서 다음과 같이 區間을 定義할수 있다. 直線 k 上의 두點 M,N을 잡을때 M과 N 사이에 있는 k 上의 모든 點의 集合을 區間 MN이라 하

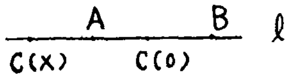
고 MN 로 나타낸다. 이 定義에 依하면,
$MN=\overrightarrow{MN}\cup\overrightarrow{NM}$, $\overline{MN}=\overline{NM}$ 이 成立함을 바로 알 수 있다.

다음에 直線 l 上에 두點 A,B를 잡고 $C\in l$ 이라 하자. 다음 條件에 對하여 $C\in\overline{AB}$인가? 에 關하여 생각해 보자.

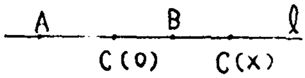
(1) C는 A와 B 사이에 있다.(o)

(2) C는 B와 A 사이에 있다.(o)

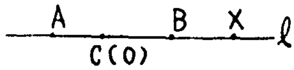
(3) $C\in\overrightarrow{AB}$



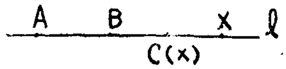
(4) $C\in\overrightarrow{BA}$



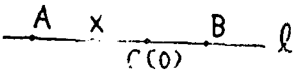
(5) $C\in\overrightarrow{AB}$ 이고 $C\in$(X: B는 A와 X 사이에 있다)



(6) $C\in\overrightarrow{AB}$이고 $C\neq B$ 이며 $C\notin$(X: B는 A와 X 사이에 있다)

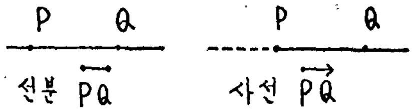


(7) $C\in$(X : X는 A와 B 사이에 있다)



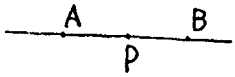
지금 네點 A,B,C,D를 $B\in\overline{AC}\cap\overline{AD}$ 되게 잡으면 $C\in\overline{BD}$ 이고 $D\notin\overline{BC}$ 임을 알수있다. 半直線 $\overrightarrow{PQ}$ 는 P에서 Q쪽으로 나가도 直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上의 點의 集合으로 P點 自身은 $\overline{PQ}$에 屬하지 않는다. 같은 方法으로 P點은 區間 $\overline{PQ}$에 屬하지 않는다. 點 P와 Q를 區間 $\overline{PQ}$의 끝點 이라한다. 또 點 P를 半直線 $\overrightarrow{PQ}$의 頂點이라한다. 따라서 한 區間의 끝點은 區間을 決定하는 두 半直線의 頂點들이다. 以上을 要約해서 다음과 같은 定義를 해둔다.

$P\cup\overrightarrow{PQ}$의 集合을 射線 PQ라 하고 $\overset{\cdot\rightarrow}{PQ}$로 表示하며 $\{P,Q\}\cup\overrightarrow{PQ}$의 集合을 線分 PQ라하고 $\overset{\cdot-\cdot}{PQ}$로 表示한다.



(例 1) $P\in\overline{AB}$를 作圖하여라.

(解)



(例 2) $P\in\overleftrightarrow{AB}$, 이고 $P\not\subseteq\overset{\cdot\rightarrow}{AB}$ 인 것을 作圖하여라

(解)

(練習問題)

다음 條件에 맞는 作圖를 求하여라. 作圖가 不可能하면 그 理由를 들어라.

(1) $P\in\overline{MN}$ 이고 θ는 P와 N 사이에 있다.

(2) $\overline{AB}\subseteq\overline{CD}$

(3) $\overline{BC}\subseteq\overrightarrow{AB}$

(4) A,B,C는 共線點이고 $\overrightarrow{AB}\not\subseteq\overrightarrow{AC}$

(5) $K\in\overline{AB}$ 이고, $B\in\overline{AK}$

(6) $P\in\overline{AB}$, $P\in\overline{DC}$, $P\in\overline{AD}$

(7) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$, $\overline{PQ}\cap\overrightarrow{AR}\neq\phi$

(8) $B\in\overline{AC}$, $D\in\overset{\cdot\rightarrow}{BC}$, $B\notin\overline{AD}$

(9) $B\in\overline{AC}\cap\overline{AD}$, $C\in\overline{BD}$, $C\neq D$

(10) $A\in(Z: B\in\overline{AZ})$

(11) $C\neq A$, $C\neq D$, $C\in\overset{\cdot-\cdot}{AB}\cup(Z: B\in\overrightarrow{AZ})$

(12) $\overleftrightarrow{AB}\neq\overleftrightarrow{AC}$, $B\in\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{AC}$,

(13) $\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\cup\overset{\cdot\rightarrow}{BC}$

(14) $\overleftrightarrow{AB}=\overset{\cdot\rightarrow}{AC}\cup\overset{\cdot\rightarrow}{AB}$

(15) $\overleftrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cup\overrightarrow{AB}$

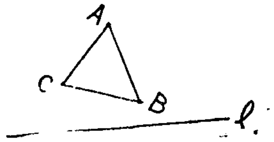
4. 平面의 分割

平面은 한 直線 l에 依하여 두개의 半平面으로 分割된다. 이때 直線 l을 두 半平面의 가장자리(Side)라 하고 半平面은 가장자리에 있는 點을 包含하지 않는다. 各各의 半平面을 直線 l의 쪽(Side)이라고 부른다. 只今 h_1, h_2를 直線 l의 두 쪽이라 하면 $h_1\cup l\cup h_2$은 平面을 表示하게 되며 $h_1\cap l=\phi$과, $h_1\cap h_2=\phi$이 成立함을 바로 알 수 있다. 또한 다음 몇가지 事實도 明白하다.

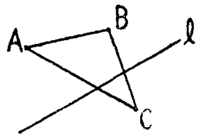
① $\overset{\cdot-\cdot}{AB}\cup l=\phi$이면 點 A와 B는 直線 l의 같은 쪽에 있다.

② $A \in h_1$이고 $C \in h_1$이면 $\overset{\bullet-\bullet}{AC} \subset h_1$ 이다.

③ $\overset{\bullet-\bullet}{AB} \cap l = \phi$ 이고 $\overset{\bullet-\bullet}{BC} \cap l \neq \phi$ 이면 $\overset{\bullet-\bullet}{AC} \cap l \neq \phi$ 이다.



④ $\overset{\bullet-\bullet}{AB} \cap l = \phi$ 이고 $\overset{\bullet-\bullet}{BC} \cap l = \phi$ 이면 $\overset{\bullet-\bullet}{AC} \cup l = \phi$ 이다.



⑤ $\overset{\bullet-\bullet}{PQ} \cap l \neq \phi$ 이면 點 P와 Q의 位置는 l의 反對便에 있을때도 있으며, P가 l 上에 오든지 P가 l 上에 오든지 하면 反對便에 있다고 말할 수 없다.

⑥ $\overline{PQ} \cap l = \phi$ 이면 點 P와 Q는 直線 l의 反對便에 오게 된다.

⑦ $P \notin h_2$ 이고 $Q \in h_1$ 이면 $\overset{\bullet-\bullet}{PQ} \subseteq h_1$ 이다.

⑧ $P \in l$ 이고 $Q \in h_1$ 이면 $\overrightarrow{PQ} \subseteq h_1$ 이다. (練習問題)

다음 條件에 맞는 作圖를 하여라. 作圖가 不可能하면 그 理由를 들어라.

(1) l은 한 平面을 두개의 半直線 h_1, h_2로 나누는 直線이고 $\overleftrightarrow{AB} /\!/ l$, $A \in h_1$, $B \in h_2$

(2) $\overset{\bullet-\bullet}{AB} \cap l = \phi$, $\overset{\bullet-\bullet}{BC} \cap l = \phi$, $\overset{\bullet-\bullet}{AC} \cap l \neq \phi$.

5. 要 約

以上에서 말한바와 같이 한 平面上에서 點과 直線, 平面의 分割等에 關하여 여러가지 定義와 性質을 集合의 槪念을 導入하여 說明해 보았다. 이것을 利用하여 이미 알고있는 公理를 說明해 보려고 한다. 먼저 退化集合과 固有集合에 대하여 定義해 두자. 單一點을 갖고 있는 集合을 또는 空集合을 退化集合이라 하고 一點보다 많은 集合으로 이루어진 集合 卽 二點 以上으로 된 集合을 固有集合이라 한다.

于先 直線은 點의 集合이란 性質과 點 直線에 關한 性質에서 다음 公理를 얻을 수 있다.

(公理 1) 모든 直線은 적어도 두 點을 갖는다.

위 公理에서 두 點이 주어질때 그 두 點을 包含하는 單 하나의 直線이 存在 함을 알 수 있다. 만약 한 直線이 三點 A, B, C를 包含하고 있다면 이 直線은 두 點 A, B에 依해서도 決定되고 두 點 B, C에 依해서도 決定된다. 이때 두 直線은 같은 直線을 나타내게 된다. 따라서 다음 公理를 얻을 수 있다.

(公理 2) 두 點은 한 直線을 決定한다. 한 平面위에서 두 點을 지나는 直線이 있을때 이 직선상에 있지않는 다른 點들이 存在한다. 따라서 다음 公理를 얻게된다.

(公理 3) 共線點이 아닌 적어도 三點이 있다.

다음은 平行線의 公準에 對하여 생각해 보자. 두 直線 l, m이 다른 한 直線 n에 各各 平行일때 l이나 m은 平行이다. 따라서 다음 公理를 얻는다.

(公理 4) 第三直線에 各各 平行인 두 直線은 서로 平行이다.

다음에는 區間, 線分, 射線, 半直線에 對하여 생각해 보자. 두 點을 맺는 區間은 두 點 사이의 點의 集合이고 두 點을 맺는 線分은 區間과 양끝 點과의 合集合 이었다. 이들에 關하여 다음 公理를 말해둔다.

(公理 5) $\forall_x \forall_y$에 對하여

$\overline{XY} = (Z$: Z는 X와 Y 사이에 있다$)$

$\overset{\bullet-\bullet}{XY} = \overline{XY} \cup (X, Y)$

$\overset{\bullet\rightarrow}{XY} = \overset{\bullet-\bullet}{XY} \cup (Z$: $Y \in \overline{XZ})$

$\overrightarrow{XY} = (Z$: $Z \in \overset{\bullet\rightarrow}{XY}$ 이고 $Z \neq X)$

$\overleftrightarrow{XY} = \overrightarrow{XY} \cup \overrightarrow{YX}$

公理 5에서 보는바와 같이 區間을 定義하므로서 集合을 利用하여 順序的으로 線分, 射線 半直線의 定義를 말로 表現하는 代身에 簡單한 記號로 表現할수 있으며 여러가지로 便利한때가 많다

다음엔 共線點에 關하여 생각해 보자. $A \neq B$이고 A,B,C 가 共線點이면 $C \in \overleftrightarrow{AB}$ 이다. 逆으로 $C \in \overleftrightarrow{AB}$ 이면서 $A \neq B$ 이면 A,B,C는 共線點이다. 따라서 다음 公理를 얻게 된다.

(公理 6) $\forall_x \forall_y \forall_z$에 대하여 $Z \in \overleftrightarrow{XY}$ 이기 爲한 必要充分條件은 $X \neq Y$ 이고 X,Y,Z 가 共線點인 것이다.

다음엔 點과 點 사이에 關한 性質을 좀더 詳細히 말해 보자.

예를들어 點 A가 點 B와 C 사이에 있으면 $A \neq B$ 이고 $A \neq C$ 이다. 또 任意의 두점 사이에는

반듯이 第三의 點이 적어도 하나 存在하게 된다. 두點 B,A 사이의 點의 集合은 두點 A,B 사이의 點의 集合과 같다. 끝으로 만일 點 B가 點 A와 C 사이에 있으면 C는 點 A와 B 사이에 있지 않다.

以上에서 말한 事實을 記號化하면 다음 公理와 같다.

(公理 7) $\forall_x\forall_y$; $X \subsetneq \overline{XY}$ 이고 $Y \subsetneq \overline{XY}$ 이다.

(公理 8) $\forall_x\forall_y$; $X=Y$ 이변 $\overline{XY} \neq \phi$ 이다.

(公理 9) $\forall_x\forall_y$; $\overline{XY}=\overline{XY}$ 이다.

(公理10) $\forall_x\forall_y\forall_z$; $Y \in \overline{XZ}$ 이면 $Z \notin \overline{XY}$ 이다.

A,B를 두點이라 할때 公理 8에 依하여 A와 B 사이에는 $\overleftrightarrow{AB}$의 點들이 들어 있다. 따라서 다음 公理를 얻는다.

(公理 11) $\forall_x\forall_y$; $X \neq Y$ 이면 $(Z;\ Y \in \overline{XZ}) \neq \phi$ 이다. 다음은 直線上의 點의 順序에 對한 公理를 생각해 보자.

點 B가 點 A, C 사이에 있으면 A, B, C는 共線點이다. 또 點 B가 點 A,D 사이에 있으면 A, B,D는 共線點이다. 따라서 다음 公理를 얻는다.

(公理 12) $\forall_w\forall_x\forall_y\forall_z$; $X \in \overline{W}Y \cap WZ$ 이고 $Y \neq Z$ 이면 $Y \in \overline{XZ}$ 또는 $Z \in \overline{XY}$ 이다.

點 B가 點 A와 C 사이에 있다고 할때 點 C가 點 B, D 사이에 있으면 點 A, B, D 사이에는 어떤 關係가 있을까? 또 點 D가 點 B, C 사이에 있으면 點 A, B, D 사이에는 어떤 關係가 있을까? 하는 물음의 대답으로 다음 두 公理를 얻는다.

(公理 13) $\forall_w\forall_x\forall_y\forall_z$; $X \in \overline{WY}$ 이고 $Y \in \overline{XZ}$이면 $X \in \overline{WZ}$ 이다.

(公理 14) $\forall_w\forall_y\forall_y\forall_z$; $X \in \overline{WY}$ 이고 $Z \in \overline{XY}$이면 $X \in \overline{WE}$ 이다.

6. 結 言

以上에서 論한 바와 같이 點, 直線, 平面의 分割等의 性質을 土台로 區間을 定義함으로서 線分 射線, 半直線, 直線을 定義하는데 集合을 導入해 보았고 또 集合의 記號를 使用하여 表示해 보았다. 다시 定義에서 公理를 誘導하여 이들도 集合의 記號로 表示하고 集合의 理論을 導入해 보았다. 이러한 定義와 公理를 利用하여 定理를 誘導하고 다시 幾何學에 關한 圖形의 問題를 解決하는데 集合의 記號를 使用하면 體系的이고 大端히 便利하다고 하는 것이다.

page 5에서 繼續

Ⅱ 少年 x의 生母는 y이다.

Ⅲ 直線 x는 平面 y에 平行이다.

Ⅳ 數 x의 2倍는 數 y이다.

Ⅴ 數 x는 數 y보다 작다.

Ⅵ $x^2=y$

이 중에서 無數라고 말해서 좋은 것은 어느 것인가? 다음의 가에서 마사이에서 골라라.

가 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 나 Ⅱ, Ⅳ, Ⅴ 다 Ⅱ, Ⅳ, Ⅵ 라 Ⅵ, Ⅴ, Ⅵ 마 Ⅰ, Ⅳ, Ⅴ (답 다)

(晋州敎育大學)

page 35에서 繼續

9. David E. Smith; *A source Book In Mathematis Vol.* Ⅰ. Dover, New York, 1959.
10. David E. Smith; *A Source Book in Mathematics Vol.* Ⅱ. Dover. New York, 1959
11. S. Lipschutz; *Finite Mathema tics*, Schaum Co. New York, 1966.
12. F. Ayres; *Modern Algebra,* Schaum Co. New York, 1966.
13. M. R. Spiegel; *Complex Variable,* Schaum Co. New York, 1966.
14. Paul Rosenbloom; *The elements of Mathematical Logic*, Dover, New York, 1948.
15. Birkhoff & S. MacLane: *A Survey of Modern Algebra*, Chicago Press, Chicago, 1962.

(University of Pennsylvania
NSF Academic Year Institute)