講 座

깊은 물에서의 線型船舶 造波抵抗에 對한 小考

任 甫 鉉*

序 言

造船에 있어 배의 물에잠긴 部分의 模樣의 如何에 따라 그 船舶이 물에서 받는 抵抗이 크게 關係된다는 것은 누구나 짐작할 수 있는 事實이다. 故로 여러가지 必要한 設計條件에 最小抵抗을 갖게 하여 船舶運營費를 적게 한다는 것은 造船學上의 重要問題일뿐 아니라 그 問題의 數學的인 妙味에서 오래전부터 應用數學者들의 興味를 끌어왔다. 배가 恒常 同一한 速度 $-U$로 前進할 때 물에서 받는 抵抗은 물表面의 變形과 물의 粘性에 基因한다. 表面張力을 無視하면 次元解析에서 물결은 Froude 數 F_r에, 粘性은 Reynold 數 R_e에, 各各 關係된다. 故로 배의 抵抗은 F_r과 R_e의 函數라 말할 수 있다. 그러나 William Froude는 배의 抵抗이 F_r의 函數이고 R_e의 函數가 아닌 純造波抵抗과 R_e의 函數이고 F_r의 函數가 아닌 純粘性抵抗으로 나눌 수 있다고 假定하여 問題를 簡單히 生覺하였다.

이 假定은 지금까지도 一次的인 近似理論에 使用되고 粘性抵抗은 이를 平板을 흐르는 물의 摩擦抵抗에 代身해서 生覺하고 波動抵抗은 Michell (1898)의 完全流體에서의 엷은 배의 理論(thin ship theory)을 使用해서 大略計算하여 왔다. 그러나 特히 粘性이 船尾가까히에서 많이 影響되어 船尾波系가 弱해짐이 認定되어온 事實이나 그에 對한 理論은 아직 別로 發展을 이루지 못하고 있다. 船首近傍에서는 粘性에 依한 境界層이 얇으므로 完全流體의 理論이 船首波動系에 對해서는 잘 適用된다. Bulbous bow의 原理는 이 船首波를 되도록 적게 하는데 있다.

基本方程式과 境界條件

只今 배가 均一한 速度 $-U$로 無粘性이며 無渦動이고 均等한 密度를 가지고 限없이 깊은 물 (完全流體)위를 $-x$ 方向으로 前進하고 있다고 생각한다. 이는 x軸方向으로 速度 U로 물의 흐름이 있고 배는 그위에 떠서 停止해 있다고 生覺하는 것과 同等하며 이 경우 배 周圍의 運動이 定常的이 되어 便利하다.

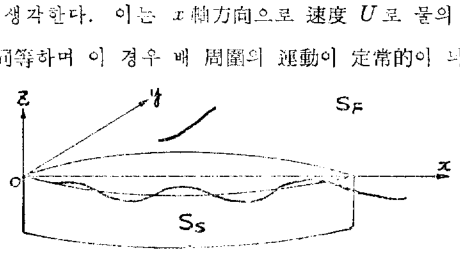

그림 1. 船舶과 座標

x, y, z 右手直角座標軸을 그림 1과 같이 定하면 $z=0$가 平均水平面을 나타내고, 물이 있는 $z\leq 0$에서 Laplace 方程式,

* Hydronautics, Inc., Laurel, Maryland, U.S.A.

$$\Delta\varphi=\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0 \tag{1}$$

을 滿足하는 速度 Potential $-Ux-\varphi$ 가 存在한다. φ 는 攪亂(Perturbation) Potential 이고 그 攪亂速度는

$$u=-\varphi_x,\ v=-\varphi_y,\ w=-\varphi_z \tag{2}$$

로서 나타난다. (1)이 滿足되는 調和場(potential field)은 表面 S에 依하여 境界되어 있다. S는 물의 自由表面 S_F, 배의 表面 S_s, 그리고 無限히 먼 곳에 있는 물의 底面과 側面으로 되어 있다. 물이 無粘性이라는 假定으로부터, 各境界面에서 물의 粒子는 接해서 움직인다.

即 물에잠긴 배의 表面을

$$\left.\begin{aligned} &y=f(x,y) \\ \text{或은}\quad &F\{x,y(x,z),z\}=y-f(x,y)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

이라 表示하면 이에 直角된 分速度가 零이다.

即

$$(U-u)F_x+vF_y+wF_z=0$$

或은 배의 表面에서

$$(U-u)f_x-v+wf_z=0 \tag{4}$$

물의 自由表面을

$$z=\zeta(x,y)$$

또는

$$F\{x,y,z(x,y)\}\equiv z-\zeta(x,y)=0 \tag{5}$$

라 表示하면 (4)와 마찬가지로 물의 自由表面에서

$$(U-u)\zeta_x+v\zeta_y-w=0 \tag{6}$$

이 위에 各流線에 따라 壓力에 關한 Bernoulli 式이 있다.

$$p+\frac{1}{2}\rho\{(U+u)^2+v^2+w^2\}+\rho gz=P+\frac{1}{2}U^2 \tag{7}$$

p 는 流線上의 壓力이고, P 는 그 流線의 無限遠方에 있어서의 壓力이다. 自由表面에서는 $p=P=$ 大氣壓力이 되므로

$$\frac{1}{2}\{2Uu+u^2+v^2+w^2\}+g\zeta=0 \tag{8}$$

이 成立한다. 이것이 自由表面의 力學的條件이고, 이에 對하여 (6)은 自由表面의 運動學的條件이다. 그리고, 이 外에 無限遠方에서의 φ 와 $\nabla\varphi=(u,v,w)$는 零이고 또 배의 前方에 물결이 後方보다 멀리 가지 않는다는 條件 等이 있다.

이렇게 해서 우리의 基本 偏微分方程式 (1)을 위와 같은 境界條件을 주어 풀 때에 φ 와 $\nabla\varphi$ 等을 물의 모든 곳에서 알게 되며 따라서 물결의 높이는 (8)에서 얻어지고 배表面에서의 壓力은 (7)에서 얻어져서 물에 依한 배의 抵抗이 決定된다.

그러나 (6)에서의 ζ 는 境界表面을 表示하는 量인데도 사전에 알려져 있지 않을 뿐 아니라 (6)과 (8)은 그式이 非線型이어서 境界値問題로서 容易한 것이 아니다. 여기서 普通手段으로서는 線型化하는 것이다. 實로 배의 模樣이 얇거나 가늘 때에, 이에 依한 攪亂이 적으리라는 것은 推測된다. 即 (3)에서

$$y=f(x,y)=\varepsilon f_1(x,y) \tag{9}$$

이라 하고 ε 이 漸次 적어져서 $\varepsilon=0$ 가 되면 φ 와 $\nabla\varphi$ 는 틀림없이 零이 된다. 故로 ε 이 적은 係數일 때 다른 物理的量을 ε 의 級數로 展開가 可能하다고 假定하는 方法이 많이 쓰여진다.

即

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \zeta&=\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(9), (10)을 (1), (4), (6), (7)에 代入하여 ε의 係數를 모아 整理하면

$z\leq 0$ 에서 $\quad \Delta\varphi_1=0$ (11)

배의表面에서 $\quad \varphi_{1y}=-Uf_{1x}$ (12)

自由表面에서 $\quad \varphi_{1z}+U\zeta_{1x}=0$ (13)

$g\zeta-U\varphi_{1x}=0$ (14)

無限遠方에서 $\quad \varphi_1=\nabla\varphi_1=0$ (15)

(14)을 x에 關해서 微分해서 (13)에 代入하면 自由表面에서의 條件이

$$\varphi_{1z}+\frac{U^2}{g}\varphi_{1xx}=0 \qquad (16)$$

의 한 式으로 된다. 모든 物理的量을 U와 배의 길이 L로 nondimension 化 하면, 即 $\bar{x}=\frac{x}{L}$, $\bar{y}=\frac{y}{L}$, $\bar{z}=\frac{z}{L}$
$\bar{\varphi}_{1x}=\frac{\varphi_{1x}}{U}$, $\bar{\varphi}_{1y}=\frac{\varphi_{1y}}{U}$, $\bar{\varphi}_{1z}=\frac{\varphi_{1z}}{U}$, $\bar{\zeta}=\frac{\zeta}{U}$ 等等
$\frac{U^2}{gL}=k_1$ 이라 하면 $k_1=\frac{1}{F_r^2}$ (F_r은 Froude 數), 그리하여 bar "$-$"와 subscript 1을 省略해서 表示할 때

(16)은 $\quad \varphi_{xx}+k_0\varphi_z=0$ (17)

로 된다.

ζ와 f는 적은數$[0(\varepsilon)]$ 이므로, φ가 $z=0$나 $y=0$ 近傍에서 y, z에 關해서 微分可能하다 하고

$$\varphi(x,y,\zeta)=\varphi(x,y,0)+\zeta\varphi_z(x,y,\theta\zeta)$$

$$\varphi(x,f,z)=\varphi(x,0,z)+f\varphi_y(x,\theta f,z)$$

但 $|\theta|<1$

이 成立함을 認定할 때 (17)은 $z=0$에서, (12)는 $y=0$에서 成立한다고 볼 수 있다. 그러면 우리 線型境界值問題는 다음과 같이 簡單하게 된다.

$Z\leqq 0$ 에서 $\quad \Delta\varphi=0$ (18)

$S_s\sim y=0$ 에서 $\quad \varphi_{1y}=-f_x$ (19)

$S_F\sim z=0$ 에서 $\quad \varphi_{xx}+k_1\varphi_z=0$ (20)

$(x,y,-z)\to\infty$ 에서 $\quad \varphi=\Delta\varphi=0$

이 때에 물결의 높이는 (14)에서

$$\left(\zeta=\frac{\varphi_x}{k_1}\right)_{z=0} \qquad (14\text{-}1)$$

로 된다.

Green의 式과 速度 Potential

이와 같은 Laplace 方程式의 境界值問題에 Green의 式은 大端히 有用하다. 只今 函數 $G(x_1, y_1, z_1;\ x, y, z)$를 生覺하고, 다음과 같은 性質을 假定한다. 點$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)$外의 $z\leq 0$ 에서

$$G_{xx}+G_{yy}+G_{zz}=G_{x_1x_1}+G_{y_1y_1}+G_{z_1z_1}=0 \qquad (21)$$

點 $(x, y, z)=(x_1, y_1, z_1)$에서

G는

$$\frac{1}{\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{22}$$

와 같은 特異點을 갖는다.

無限遠方에서 $G=\nabla G=0$ (23)

이 때에 Green의 式은 다음과 같이 주어진다. (Kellog, 1953 또는 Milne Thomson, 1965)

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\iint_S [\varphi(x_1,y_1,z_1)G_n(x_1,y_1,z_1;\ x,y,z)-\varphi_n(x_1,y_1,z_1)G(x_1,y_1,z_1;\ x,y,z)dS \tag{24}$$

但 $S=S_F+S_S+S_B$, subscript n은 表面에서의 물속으로 向해서 直角方向으로 偏微分하는 것을 意味한다. 線型問題에서는 S_F는 $z=0$로, S_S는 $y=0$에서의 배의 表面에 該當된 곳으로 各各 表示된다. S_B는 無限遠方이므로 그곳에서의 φ와 G의 性質로서 積分을 無視할 수 있으니 (24)는

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_S}[\varphi G_y-\varphi_y G]dx\,dz+\frac{1}{4\pi}\iint_{S_F}[\varphi G_z-\varphi_z G]dx\,dy \tag{25}$$

로 된다. 只今 G에 나음과 같은 性質을 (21), (22), (23)위에 더 첨가해서 생각한다.

$$z=0\text{에서}\qquad G_{xx}+k_0G_z=0 \tag{26}$$

$$y=0\text{에서}\qquad G_y=0 \tag{27}$$

그러면 (25)에서 S_s에서의 積分은 (19), (27)로부터

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_S} f_x G\ dx\,dz$$

S_F에서의 積分은 (17)과 (26)을 利用하여

$$\iint_{S_F}(\varphi G_z-\varphi_z G)dx\,dy=-\frac{1}{k_0}\iint_{S_F}[\varphi G_{xx}-\varphi_{xx}G]dx\,dy$$

$$=-\frac{1}{k_0}\iint_{S_F}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi G_x-\varphi_x G)dx\,dy=-\frac{1}{k_0}\oint_l(\varphi G_x-\varphi_x G)dy=0 \tag{28}$$

但, l은 배의 表面과 물의 自由表面과의 交叉線이나 이 積分은 高次이므로 線型問題에서는 無視한다.

따라서 函數 G를 알면

$$\varphi=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_S} f_x G\ dxdz \tag{29}$$

가 우리의 線型船舶 波動問題의 解가된다.

Green의 函數 G

여기서 (21), (22), (23), (26), (27)을 滿足하는 一種의 Green 函數 G를 求하자. G는 Laplace 方程式을 滿足하는 調和函數이고 그 特異點의 性質 (22)로부터 그 一般解는

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

임을 안다. 이것은 x_1, y_1, z_1에 點泉(point source)이 있는 것이라 볼 수 있다. $z\leq 0$에서 이 點 外에는 G는 特異點을 갖지 않는다. 即 G는 一個의 그 強度가 1인 點泉이 그것이 아니라면 均一호름인 물속의 點(x_1, y_1, z_1)에 놓여 있을 때의 攪亂速度 Potential이다.

그러므로 $\frac{1}{k_1}G_z$ 는 그 물결의 높이이다.

우리는 Laplace 方程式과 같은 線型偏微分方程式의 境界値問題나 初期値問題의 解法에 Cauchy의 方法을 想起한다. (e.g. Webster 1955)

即

$$G=e^{i(ax+by)+c(a,b)z} \text{ 를 (21)式에 代入할 경우}$$
$$C(a,b)=\pm i\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{를 얻는다.}$$

故로

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Sigma A_{\pm}(a,b)e^{\pm\sqrt{a^2+b^2}z+iax+iby}da\,db$$

도 (21)을 滿足한다. 이것을 a,b 平面에서 極座標로 表示하면

$$a^2+b^2=k^2 \qquad a=k\cos\theta \qquad b=k\sin\theta$$

$$G=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\Sigma A_{\pm}(k,\theta)e^{\pm kz+ik(x\sin\theta+y\sin\theta)}dk\,d\theta \tag{30}$$

여기서 우리는

$$\frac{1}{r}=R_e\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-k|z-z_1|+ik\omega}dk\,d\theta \tag{31}$$

但 $\omega=(x-x_1)\cos\theta+(y-y_1)\sin\theta$

임을 注意한다. R_e는 實數部를 表示하며 이 다음은 이 記號를 必要하다고 생각 될 때 外에는 이를 省略한다. 따라서 (22)와 (23)을 滿足하기 爲하여서는

$$G=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-k|z-z_1|+ik\omega}dk\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}B(k,\theta)e^{kz+ik\omega}dk\,d\theta \tag{32}$$

로 된다. 여기서 물결이 배의 後方에 比해 前方에는 別로 없다는 性質을 滿足시키기 위하여 假想的摩擦力 $\bar{X}=-\mu_1\nabla\phi$ (Lamb 1949)을 생각한다. 即 힘 $\bar{F}=\nabla(-g\zeta+\mu_1\phi)$로 되어 線型 Bernoulli 式은 (14)代身에 $g\zeta-U\varphi_x-\mu_1\phi=0$로 되고 (26)은

$$G_{xx}+k_0G_z+\mu G_x=0,\quad \text{但}\quad \mu=\frac{\mu_1}{U} \tag{33}$$

μ는 積分을 한 後 零으로 놓는다.

(32)을 (33)에 代入하면 모든 x,y에 關해서

$$G_{xx}+k_0G_z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}(-k^2\cos^2\theta-k_0k+i\mu k\cos\theta)e^{k_0z_1+ik\omega}$$
$$+B(k,\theta)(-k^2\cos^2\theta+k_0k+i\mu k\cos\theta)e^{ik\omega}dkd\theta=0$$

故로

$$B(k,\theta)=-\frac{k+k_0\sec^2\theta-i\mu\sec\theta}{k-k_0\sec^2\theta-i\mu\sec\theta}e^{k_0z_1} \tag{34}$$

이 (34)을 (32)에 代入해서

$$G=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-k|z-z_1|+ik\omega}dk\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{k+k_0\sec\theta-i\mu\sec\theta}{k-k_0\sec^2\theta-i\mu\sec\theta}e^{k(z+z_1)+ik\omega}dk\,d\theta$$

또는

$$G=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-k|z-z_1|+ik\omega}dk\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{k(z+z_1)+ik\omega}dk\,d\theta$$
$$-\frac{k_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sec^2\theta e^{k(z+z_1)+ik\omega}}{k-k_0\sec^2\theta-i\mu\sec\theta}dk\,d\theta \tag{35}$$

(31)을 利用하면 (34)의 처음 두 積分을 알게 되므로 끝積分을 I라 하고 이를 考察하자. k를 複素數라 생각하고 I는 k平面에서 閉曲線에 따른 線積分의 一部分이라 生覺한다. I가 $z\leq 0$에서 有限値를 갖게 하기 위하여서는 ω의 陽陰에 따라서 그 閉曲線을 그림 2와 같이 各各 擇하여야 한다.

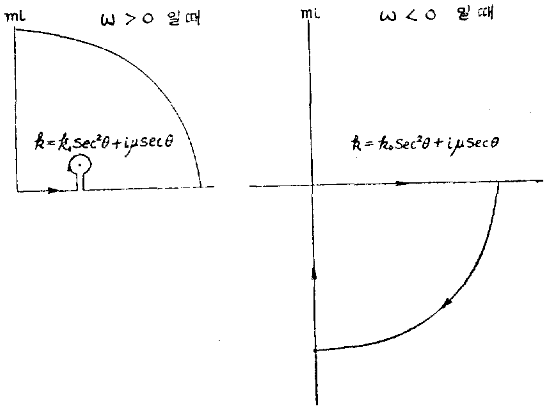

그림 2. k平面에서의 積分 contour

$k=k_1\sec^2\theta-i\mu\sec\theta$ 에서의 留數를 考慮하여

$$I=-4k_1 i\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta e^{k_1\sec^2\theta(z+z_1)+ik_1\sec^2\theta\varpi}\,dkd\theta$$

$$+\frac{2k_1 i}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\int_0^\infty\frac{\sec^2\theta(mi+k_1\sec^2\theta)}{m^2+k_1^2\sec^4\theta}e^{im(z+z_1)-m\varpi}\,dm\,d\theta \tag{36}$$

但 $\vartheta=\tan^{-1}\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

x, y가 커가면 둘째 積分은 빠르게 적어지는 것이 $e^{-m|\varpi|}$의 乘數로 부터 짐작된다. 故로 이項을 Local disturbance라 한다.

첫째 積分은 Stationary phase의 方法 〔Lamb (1945)이나 Jeffreys & Jeffreys (1962) 參照〕을 써서 x, y가 클 때의 近似値를 낼 수 있으며 이때 그 값은 $\dfrac{1}{\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}^{\frac{1}{4}}}$ 과 같이 적어짐을 알 수 있다.

即 우리의 解 (35)는

$$G=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}+4k_0\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-k_0|z+z_1|\sec^2\theta}\sec^2\theta\ \sin(k_0\varpi\sec^2\theta)d\theta$$

$$+\frac{2k_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\int_0^\infty\frac{e^{-m\varpi}\sec^2\theta}{m^2+k_0^2\sec^4\theta}\{k_0\sec^2\theta\sin(m\overline{z+z_1})-m\ \cos(m\overline{z+z_1})\}\,dmd\theta \tag{37}$$

但 $r_1=\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$

이것이 바로 우리의 Green의 函數이며 또 點泉에 依한 potential이다. 故로 强度가 M인 點泉(point source)에 依한 물결의 높이는 (14-1)에서

$$\zeta=\left(\frac{m}{k_0}G_x\right)_{z=0}=4Mk_0\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}e^{-k_0|z_1|\sec^2\theta}\sec^3\theta\ \sec(k_0\varpi\ \sec^2\theta)d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}M\int_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\int_0^\infty\frac{e^{-m\varpi}m\sec\theta}{m^2+k_0^2\sec^4\theta}\{k_0\sec^2\theta\ \sin(mz_1)-m\cos(mz_1)\}\,dm\,d\theta \tag{38}$$

첫째項을 regular wave라 하고 이 項만이 造波抵抗에 寄與됨이 證明된다. $\vartheta=\tan^{-1}\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ 이 下限에 있어 $y=y_1$, $x-x_1<0$ 이면 $\vartheta=\pi$가 되어 거기서 regular wave가 零임을 볼 수 있다. 그뿐 아니라 Stationary phase 方法에 依하여 x가 클 때의 漸近値를 求하면 이 regular wave는 $\vartheta<\pm19°28'=\tan^{-1}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$에 거의 全部 存在

하고 그밖에는 거의 없음을 알 수 있다.

特異點과 그에 依한 物體의 形態

一個의 Point source 가 無限이 넓은 均一한 流場에 있을 때 그 source 에서 나온 흐름과 本流場의 境界로 一種의 half body 를 形成함은 잘 알려진 事實이다 (e.g. Milne Thomson). 마찬가지로 또 速度가 (U, 0, 0)인 均一한 無限流場에 一個의 $-x$軸方向의 doublet 를 놓을 그 때는 境界流線이 一個의 球를 形成한다. 勿論 이러한 half body 나 球가 自由表面下에 있을 境遇에는 流線의 形態가 無限流場에 있을 때와 다르지만 깊이가 얼마큼 크면 그 模樣이 過히 다르지 않을 것이다. 이러한 特異點의 種類는 이외에도 많이 있을 수 있다. Doublet 는 두個의 符號가 다른 source 가 그 强度의 絶對値가 그 相互間의 距離에 反比例해서 크고 그 距離가 無限이 接近할 때 이루어진 것이어서 點(x_1,y_1,z_1)에 있는 doublet 의 點(x,y,z)에 있어서의 potential $\varphi_d(x_1,y_1,z_1;\ x,y,z)$는 그 同一한 點에 있어서의 source 의 potential $\varphi_s(x_1,y_1,z_1;\ x,y,z)$를 그 doublet 의 方向으로 點$(x_1,y_1,z_1)$에 關해서 微分해서 얻어짐은 알려진 事實이다〔e.g. Milne Thomson(1955)參照〕. 이러한 意味에서 더 高次的인 特異點 quadrapole, octople 等等을 形成할 수 있고 그 potential 은 (x_1,y_1,z_1)에 關한 微分을 그만큼 더 하여야 한다.

이러한 特異點에 依한 regular wave 를 理解하는 것은 배의 물결을 硏究하는데 極히 도움이 된다. source 에 依한 물결을 앞의 節에서 얻었으므로, 여기 그 x_1에 關한 微分으로 같은 點(x_1, y_1, z_1)에 놓여있는 $-x$ 方向의 doublet 로 因하여 이루어지는 regular wave 의 x가 클 때의 값을 여기 적어본다.

$$\zeta_d=4\mu_0 k_0^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-k_0|z_1|\sec^2\theta}\sec^4\theta\ \sin(k_0\omega\ \sec^2\theta)d\theta \tag{39}$$

但 $\mu<0$ 는 doublet 强度이며 下限에 ϑ는 y에 比해서 x가 클 때 零에 接近하므로 여기에 省略하였다.

이것이 바로 大略 bulb 에 依한 물결이라고도 볼 수 있다.

複雜한 배의 型體도 이와같은 特異點을 適當히 分布함으로써 얻을 수 있다. 線形論에서는 (29)에서 본 바와 같이 배表面의 x軸과의 傾斜度를 source 의 强度로 分布해서 배를 나타냈음을 알수있다.

f가 $x=0$와 $x=L$에서 零이 된다고 하면 (29)를 x에 關하여 部分積分함으로써 배를 그 두께 f에 比例한 强度를 가진 doublet 를 分布시켜 얻을 수도 있음을 안다.

Elementary Waves

Regular waves 를 理解하는데 Havelock(1934)이 처음 生覺해낸 Elementary waves 의 槪念이 많은 도움이 된다. 一般的으로 一次元 波動은

$$\zeta=A_{\sin}^{\cos}\{m(x-ct)\}$$

로 表示된다. 여기서 $\frac{m}{2\pi}$ 은 frequency 이고 c는 波動傳播速度이다. 물의 깊이가 無限大일 때는 $m=\frac{g}{c^2}$ 임은 안다 (e.g. Milne Thomson). 그리고 一定한 速度 U 로 前進하는 배에 依한 水面의 물결이 이런 一次元波動이 各方向으로 傳播됨으로서 이루어진다고 생각할 때 그 一次元波動의 傳播速度가 $c=V\cos\theta$ 이어야 배에 依한 물결은 定常일 것이다. 이때에 위式의 x는 $x\cos\theta+y\sin\theta$로 된다. 따라서

$$\zeta=A_{\sin}^{\cos}[k_0\sec^2\theta\{x\cos\theta+y\sin\theta-Vt\cos\theta\}]$$

x를 $x-Vt$로 놓고 θ가 $-\frac{\pi}{2}$로 부터 $\frac{\pi}{2}$까지인 ζ를 모두 合하면

$$\zeta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)_{\sin}^{\cos}[k_0 \sec^2\theta\{x\cos\theta + y\sin\theta\}]d\theta \tag{40}$$

이 되어 (38),(39)와 같은 regular waves를 얻었으므로 참으로 自由表面에 있어서의 一般的인 물결은 모든 方向으로 傳播하는 一次元波動(이것을 elementary wave라함)에 依하여 構成되었다 고 볼 수 있다.

$A(\theta)$는 振幅函數라 하고 이에 依하여 ζ의 높이가 關係된다.

이제 다시 前節에서 얻은 point source에 依한 regular wave를 보면 이는 cosine elementray wave에 依하여 構成되어있고 그 振幅函數는 source의 符號의 陽陰에 따라 陽陰이 된다. 이에 對하여 球를 形成하는 point doublet의 境遇는, sine elementary waves에 依하여 構成되어있고 그 振幅函數는 恒常 陰임을 알 수 있다.

배에 依한 물결

式 (29)와 (14-1)에서 배에 依한 물결은

$$\zeta = \frac{1}{k_0}\varphi_x = \frac{1}{4\pi k_0}\iint_{S_s} f_{x1}(x_1)G_x(x_1,0,z_1;\ x,y,0)dx_1dz_1 \tag{41}$$

이며 여기 (38)을 代入하여 큰 x에 있어서의 regular wave를 생각하면

$$\zeta_s = \frac{k_1}{\pi}\iiint_{S_s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{x1}(x_1,z_1)e^{-k_0|z_1|\sec^2\theta}\sec^3\theta\ \cos(k_1\omega\sec^2\theta)d\theta\, dx_1\, dz_1$$

但 $z_1 = \frac{z}{H}$, $x_1 = \frac{x}{L}$, $k_1 = \frac{gL}{U^2}$, $k_0 = \frac{gH}{U^2}$, $\zeta_s = \frac{\zeta}{L}$ 과 같이 nondimensional 量으로 表示되었다.

只今 $0<x_1<1$, $0<z_1<1$ 에서
$$f_{x1}(x_1) = M(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{42}$$

로 表示 되었다 하면 이것을 위式에 代入하여 積分해서

$$\zeta_s = \zeta_{sB} + \zeta_{ss} \tag{43}$$

但
$$\zeta_{sB} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-e^{-k_0\sec^2\theta}\right)[S_1(0)\sin\omega(0) + S_2(0)\cos\omega(0)]d\theta \tag{44}$$

$$\zeta_{ss} = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{-k_0\sec^2\theta})[S_1(1)\sin\omega(1) + S_2(1)\cos\omega(1)]d\theta \tag{45}$$

$$\omega(a) = k_0\sec^2\theta[(x-a)\cos\theta + y\sin\theta]$$
$$S_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n M^{(2n)}(a)}{k_1(k_1\sec\theta)^{2n}},\quad S_2(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}M^{(2n+1)}(a)}{k_1(k_1\sec\theta)^{2n+1}} \tag{46}$$

$$M^{(n)}(a)\left(\frac{\partial^n M(x_1)}{\partial x_1}\right)_{x_1=a} \tag{47}$$

그러므로 一般的으로 배에 依한 regular waves는 $x_1=0$에서 나오는 船首波(bow waves), $x_1=1$에서 나오는 船尾波(stern waves)——또 中間에 不連續點이 있으면 거기서 始作되는 shoulder waves——로 되어 있다. 그리고 이들은 모두 sine waves와 cosine waves를 大概는 같이 包含한다. 그러나 n이 奇數일 때 $a_n=0$이면 bow wave가 純粹 sine waves로 이루어진 것은 意味있는 事實이다. 여기서 배가 $x_1=\frac{1}{2}$ 平面에 對해서 對稱이면 stern과 bow에서 나오는 regular waves가 完全히 같다는 것의 證明도 어렵지 않다.

$k_1\left(=\frac{1}{F^2}\right)$은 普通商船의 速度 $0.15<F<0.3$에서 相當히 큰 數이므로 그때에 $S_1(a)$나 $S_2(a)$는 처음 몇 項이 가장 重要하다. Inui (1957). 特히 $S_1(0)$의 第一項은 $f_{x1}(0)$이니 bow의 entrance angle이어서, 이것이 얼마

나 低速에 있어 造波와 그 抵抗에 重要한 役割을 하는지 짐작된다.

造 波 抵 抗

(7)에서 自乘으로서 量이 적은 項을 無視하면

壓力은 $p = -\rho Uu - \rho gz + P$

로 된다. 이 x成分을 배의 물에 젖은 表面에서 積分하면 造波抵抗을 얻는다. 即 線型近似로

$$R = \iint_{S_s} f_x p \ dx\, dz \tag{48}$$

S_s外에서는 $f=0$이니 p가 常數일 때는 f_x는 곧 x에 關해 積分되어 R은 無視된다. 故로 다만 p의 처음 項만이 抵抗에 關係된다. 即

$$R = -\iint_{S_s} f_x \rho Uu \ dx \ dz$$

x는 L로, z는 H로, φ_x는 U로 nondimension 化해서 그 造波抵抗係數는

$$C_w = \frac{R}{\frac{1}{2}\ \rho U^2 LH} = 2\iint_{S_s} f_x \varphi_x(x,o,z) dx\, dz$$

(29)와 (37)을 여기 代入해서 整理하면

$$C_w = 8k^2{}_1 \int_{-1}^{0}\int_{x_1}^{1} f_x dx dz \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} f_{x1} d_{x1} d_{z1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k_0|z-z_1|\sec^2\theta} \sec^3\theta \cos\{k_1(x-x_1)\sec\theta\}\, d\theta \tag{49}$$

但, S_s의 xz平面에의 斜影이 $0<x<1$, $0>z>-1$일 때를 생각하였고, 下限이 x_1이었음은 (38)에서 본 바와같이 regular wave는 배 앞으로 傳播하지 않기 때문이다. 그러나

$$\cos\{k_1(x-x_1)\sec\theta\} = \cos(k_1 x \sec\theta)\cos(k_1 x_1 \sec\theta) + \sin(k_1 x \sec\theta)\sin(k_1 x_1 \sec\theta) \tag{50}$$

이고 偶函數이므로 이는 $4\,k_0{}^2 \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} dx\, dz \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} dx_1\, dz_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

과 같아져 結局

$$C = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (P^2 + Q^2)\cos^3\theta\, d\theta$$

$$\text{但 } \left.\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right\} = 4k_0 \iint_{SS} dx\, dz f_x e^{-k_0 z}\sec^3\theta \begin{cases}\cos(k_1 x \sec\theta) \\ \sin(k_1 x \sec\theta)\end{cases} \tag{51}$$

을 얻는다. 여기에서 local disturdance에 依한 壓力은 그 S_s에 있어서의 積分이 零이 됨이 過히 어렵지 않게 證明되나 여기서는 省略한다 (e.g. Lunde 1951).

이와같은 造波抵抗의 公式은 처음 Michell(1898)에 依하여 얻어졌고 그後 Havelork(1934)에 依하여 波動이 옮겨가는 Energy의 槪念을써서 誘導되었다. 먼곳에 까지 Energy를 옮겨가는 것은 regular wave뿐이므로 Havelock(1934)은 regular wave의 큰 x에서의 漸近値와 造波抵抗의 關係를 다음과 같이 明白히 하였다.

即 regular wave가

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{A(\theta)\cos(k_1 x \sec\theta) + B(\theta)\sin(k_1 x \sec\theta)\}\cos(k_1 y \sin\theta \sec^2\theta) d\theta \tag{52}$$

로 大槪 表示되는 것은 (37) 또는 (38) 또는 (40) 等에서 볼 수 있다. 이때에는 造波抵抗을

$$C_w = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{A(\theta)^2 + B(\theta)^2\}\cos^3\theta\, d\theta \tag{53}$$

로 表示된다.

여기서 곧 알 수 있는 것은 被積分函數가 恒常 陽數이니 C_w가 零이 될 수 있다면 A와 B가 모든 θ에 關

해서 零이 되어야 한다는것 即 regular wave가 零이 되어야 한다는 것이다.

또 (53)과 (46)을 兼해서 生覺할 때 造波抵抗은 船首波抵抗, 船尾波抵抗, 船首波와 船尾波의 干涉으로 나누어 생각할 수 있다.

無造波 抵抗 船舶

M.C. Krein(1955)은 無粘性 無渦動 均一 流體에서 有限한 面積과 體積을 가진 無造波抵抗 船舶은 存在하기 않음을 證明하였다.

그러나 有限한 面積과 體積이란 制限이나 或은 無渦動이란 制限을 없애면 그런 無造波形이 있을 수 있고 이런 概念은 實在 船舶을 取扱하는데 많이 도움된다.

우리는 (42)～(46)에서 배의 模樣과 regular waves의 關係를 表示하였다. 여기 (42)가 cosine 級數에 있어 서와 같이 偶數인 n만으로 되어있다면 $S_2(0)=0$이고 $-x$ 方向의 doublet를 다음과 같이 $x=0,\ y=0,\ -\infty<$ ≤ 0에 分布할 때 即

$$0>z\geq -1 \text{ 에서 } \mu_0(z)=-\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1} \tag{54}$$

$$z<-1 \text{ 에 } \mu_0(z)=-\sum_{n=0}^{\infty} b_n[z^{n+1}-(z+1)^{n+1}] \tag{55}$$

但
$$b_n=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n+1)!}\cdot\frac{k_0^n}{k_1^{2n+1}}a_{2n} \tag{56}$$

을 (39)에 代入하여 $z_1=-\infty$로 부터 $z_1=0$까지 積分해서 나오는 regular wave는 ζ_{sB}와 그모양이 全部 같고 그 符號가 反對이므로 그를 合한 것은 零이 된다 (Yim, 1963). 即 이와같은 doublet 分布에 依한 境界流線은 自由表面에 尖端을 두고 $-z$ 方向으로 퍼져 있는 無限이 넓은 底面을 無限이 깊은 곳에 둔 尖塔과 같은 模樣을 이루고 이 尖端에서는 sine 形과 비슷한 배 모양이 거기 船首를 두고 始作될 때 그 配合된 배의 regular bow wave가 없어진다는 것이다. 배가 그 中央部 $x=\frac{1}{2}$ 平面에 對해 對稱일 때는 그 stern regular wave가 全部 bow wave와 같음이 證明되니 stern에도 또 꼭같은 doublet를 分布해서 stern regular wave도 없앨 수 있어 우리의 線型理論 限度內에서 無造波抵抗形을 얻는다.

그 regular wave는 실상 깊은 곳에서의 影響이 $e^{-k_0|z|\sec^2\theta}$의 乘數에서 보는 바와 같이 大端히 적으므로 이런 半無限線上에 있는 doublet 分布를 自由表面에서 멀지 않는 곳에서 끊어 그 깊은 곳의 分布를 버리드라도 배에 依한 抵抗을 줄이는데 큰 効果가 있다. 그러나 實際 有限線上의 배의 bow wave를 가장 많이 없앤 double 分布를 求하는 것도 어렵지 않다.

이와같은 特異點의 分布는 doublet 線뿐이 아니라 (42)가 sine 級數에서와 같이 n이 全部 奇數일 때는 doublet 線 代身에 그 bow wave를 零으로 만드는 source 線分布 또는 quadrupole 線分布 等을 얻을 수 있다 (Yim 1963, 1964). 이때에는 이外에 다른 特異點을 더 考慮하여야 有限인 境界流線을 얻는다.

特異點을 한 點에서 適當히 配合함으로써 無造波 特異點(no wave singularity)을 만들 수 있다 即 x 方向의 quadrapole과 z 方向의 doublet를 適當한 强度로 配合하면 그 regular wave가 零이 되는걸 본다(Yim, 1963). 이와같은 特異點은 普通 有限인 境界流線을 이루지 아니하나 미리 存在하는 배의 特異點分布에 덧붙여 分布시킴으로써 造波抵抗이 一定하나 다른 模樣의 배를 無限이 많이 만들 수 있다. 點(x_1, y_1, z_1)에 있는 無造波特異點에 依한 potential을

$$g(x_1, y_1, z_1;\ x, y, z)$$

라 하면 이를 點(x_1, y_1, z_1)에 依한 微分이나 積分도 또한 無造波特異點이니 이런 特異點의 種類가 無限이 많이 있을 수 있다. 이 中에도 假令 $x_1=0$부터 $x_1=\infty$까지 均一하게 分布한 그 quadrapole+doublet 無抵抗特異點은 x方向 doublet와 vortex 要素를$(0,y_1,z_1)$에 놓은 것과 같게되어 이것은 하나의 球에 下向揚力을 주는 것으로 近似시킬수 있다.

勿論 그 球의 크기와 揚力의 强度는 Froude 數의 函數이고 一定한 關係로 推測하여야 한다. 그러나 物體의 體積이나 面積이 有限이면서 다만 一種의 特異 vortex 點에 依하여 circulation이 流場에 導入됨으로써 無造波를 이룰 수 있다는 點에서 뜻이 있다(Yim 1966 A).

極小 造波抵抗 船舶

어떤 速度에서 주어진 排水量을 가지고 가장적은 造波抵抗을 가진 배는 어떻한 模樣인가 하는 問題를 Sretenskii(1935)나 Karp, Kotik & Lurye(1960) 等은 無限이 깊은 draft를 가진 배에 關해서 Weinblum(1956)은

$$f(x,z)=X(x)Z(z)$$

의 型인 배에 關해서 論하였다. 그러나 이 問題는 數値計算이 굉장이 複雜하다. Wehausen, Webster, Lin (1963)은 表面積의 摩擦抵抗을 包含해서 全抵抗이 極小인 배의 模樣을 高速電子計算機를 써서 計算하였다.

萬一 우리들이 船首波나 船尾波에 依한 造波抵抗만을 極小로 하고 그의 相互干涉을 考慮하지 않는다면 그 計算은 相當히 簡單해 진다. 事實 stern wave는 粘性의 影響이 많아 大槪는 배의 다른 設計條件이 許諾하는 限 bow wave를 적게 하는 것이 좋다. 여기서 bow bulb가 適用된다. Krein(1955)은 極小造波船舶은 恒常 bow와 stern에 뭉쳐 있는 特異線이 있다는 것을 밝혔고 Sretenskii(1935), Vatic(1960), Weinblum(1957), Wehausen (1963) 等이 얻은 船型이 적은 Froude 數 外에는 모두 bow와 stern이 불러 있는 걸 본다. 이것이 바로 bow bulb나 stern bulb의 重要性을 나타낸다.

造波抵抗係數를 Froude 數에 對해서 表示할 때 그 曲線은 hump와 hollow인 部分을 交代로 가지고 꿈틀거린다. 이것은 bow wave와 stern wave가 서로 干涉하기 때문이라고 볼 수 있고 特히 hump인 Froude 數에서는 bow wave 抵抗이나 stern wave 抵抗을 各各 獨立해서 極小로 만들어도 많은 效果를 본다. 〔實驗結果는 計算에 依한 線型波動의 造波抵抗係數에 比해 hump와 hollow의 差가 甚하지 않지마는 그래도 역시 그 曲線이 凹凸이 있음을 볼수 있다. Taylor(1943) 參照〕.

船首波抵抗과 船尾波抵抗을 同時에 極小로 만들면 그 干涉도 같이 적어진다. 一般的으로 極小 造波抵抗船型問題는 船型을 冪級數나 Fourier 級數로 나타내서 거기에 解를 가질만한 여러가지 條件(假令 배의 排水量, 배의 表面에 對한 拘束 等)을 주어 이것을 Lagrange 乘數를 써서 造波抵抗을 極小로 하는 冪級數나 Fourier 級數의 係數를 求한다.

特히 船首波抵抗의 極小問題는 (42),(44),(54),(39)로 부터 큰 x에 있어서 물결을 (52)와 같은 形式으로 얻어 (53)을 利用해서 그 造波抵抗係數는

$$C_w=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{(A_1+B_1)^2+A^2\}\cos^3\theta\, d\theta$$

但

$$A_1=\{1-e^{-k_0\sec^2\theta}\}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}(2n)!\ k_1^{-2n-1}a_{2n}\ \cos^{2n}\theta$$

$$A_2 = -\{1-e^{-k_0\sec^2\theta}\}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)k_1^{-2(n+1)}a_{2n+1}\cos^{2n+1}\theta$$

$$B_1 - \sum_{n=0}^{\infty}k_0^{-n}(n+1)! \quad b_n\cos^{2n}\theta\{(1-e^{-k_0\sec^2\theta})\sum_{m=0}^{n+1}\frac{k_0^m\sec^{2m}\theta}{m!}\}$$

가 되니 여기서 a_i가 주어 졌다면

$$\frac{\partial C_w}{\partial b_n}=0 \qquad n=0,1,2,3, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

인 b_n을 適當한 條件下에 求할때 bulb를 나타내는 doublet의 分布를 얻을 수 있다(Yim 1963).
C_w나 $\partial C_w/\partial b_n$의 積分은 遂行하는데는

$$I_n(k_0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2k_0\sec^2\theta}\sec^{2n+1}\theta\, d\theta - \frac{e^{-k_0}}{2^{n+1}}G_n(k_0)$$

$$G_n(k_0) = \{2+\frac{n-1}{k_0}\}G_{n-1}(k_0) - \frac{2n-3}{k}G_{n-2}(k_0)$$

$$G_0(k_0)=K_0(k_0)$$

$$G_1(k_0)=K_0(k_0)+K_1(k_0)$$

但, K_0와 K_1은 各各 零次와 一次變形 Bessel 函數이다(e.g. 寺澤, 1954 參照).

과 같은 公式이 便利하다. 같은 理論으로 bow stern line 上에 주어진 點에 있는 point doublet의 强度도 船首波抵抗을 極小로 갖게 求할 수 있다.

計算의 結果에 依하면 bow의 stem line이 一直線인 배의 그 stem line에 doublet를 分布하였을 때 船首波抵抗을 極小로하는 分布狀態는 배의 底面에 가까워 갈수록 强度가 强해지고 Froude 數가 크면 이度가 甚해진다. 故도 point doublet도 배의 底面에 가까히 놓였을 때가 自由表面에 가까히 놓였을 때 보다 훨씬 船首波抵抗을 없새는 率이 좋다 (Yim, 1965). 이와같은 概念은 doublet wave와 bow wave의 振幅을 比較하여서도 大略 얻을 수 있다 (Inui, Takahei, Kumano, 1960).

線型 造波抵抗 理論의 缺陷과 應用

航空力學이나 空洞(cavity)理論과 같은 넓은 應用數學의 分野에서 問題의 線型化는 重要한 役割을 하며 그 結果도 實驗値와 잘 맞는 것을 본다. 그러나 이 船舶에 依한 表面波의 理論은 實驗의 結果와 比較해볼 때 배가 굉장히 엷은 것이 아니면 잘 맞지 않는다. 그 理由로 다음 몇가지를 들 수 있다. 1) 實在의 船舶은 그 길으에 比해 엷다(thin)는 것 보다 오히려 가늘다(slender)고 볼 수 있다. 이런 點에서 航空力學의 slender body理論을 船舶波動理論에 써보려는 傾向이 한창 盛하였다 [Vossers(1962), Tuck(1963), Maruo(1962), Joosen(1963)等]. 그러나 潛水艦같으면 모르지만 水表面船舶에는 이것의 適用이 어려운 것 같다. 2) 高次成分이 重要하다는 見地에서 高次船波理論의 近來의 發展이 注目된다 [Sisov(1960), Wehausen(1963), Eggers(1966), Yim(1966 B)]. 特히 粘性影響이 적은 船首波에는 이 高次理論이 切實이 必要한것 같다. 東京大學의 乾 敎授는 特히 船舶의 數學的表現이 線型論에서는 不充分 하다는 見地에서 적은 Froude 數에서 水面을 平面으로 보고 그 위에 船舶 singularity에 對한 鏡像을 考慮해서 그 流線方程式

$$\frac{dx}{U+u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

을 Runge Kutta의 數値積分法에 依하여 求하여, 그에 依하여 만든 實驗模型이 實驗値와 比較的 잘 맞는다고 報告하고 있다[Inui(1957)]. Wehausen(1963)과 Yim(1966 c)은 (28)에서 無視한 線積分이 高次成分中에도 더욱 重要하지 아니한가 하는 것을 檢討하였다. 이外에 더욱 重要한 것은 3) 粘性의 影響이다. 特히 境界層의

船尾波에 주는 影響이 相當히 큰것 같으나 이 方向의 硏究가 많지 않다 〔Wu(1963)〕.

船底나 船尾近處에서 生기는 vortex의 影響으로서 所謂 form 抵抗이란 것도 相當히 重要하다. 兼하여 배表面에서의 摩擦抵抗의 正確한 理解에도 硏究의 餘地가 많은 것 같다 〔J.Wu(1962)〕.

그러나 이 完全流體의 線型理論은 近來에 많이 應用된 感이 많다. Pien(1964)은 實驗値와 計算値를 견주어 보는 것 보다도 極小 造波抵抗理論을 高速計算機를 通해 배의 設計에 利用하여 많은 成果를 거두고 있다. 近來에 流行된 bulbous bow도 이 線型理論의 德이 크다고 볼 수 있다.

參考文獻

〔1〕 Michell, J.H., "The Wave Resistance of a Ship,"Phil. Mag. Vol. 45 p.106, 1898.

〔2〕 Milne, Thomson, L.M., "Theoretical Hydodynamics," The Macmillan Co. N.Y. 1955.

〔3〕 Kellog. O.D., "Foundations of Potential Theory," Dover Pub. Inc. N.Y. 1953.

〔4〕 Webster. A.G., "Partial Differential Equation of Mathematical Physics," Dover Pub. N.Y. 1955.

〔5〕 Lamb, H., "Hydrodynamics," Dover Pub. N. Y. 1945.

〔6〕 Jeffreys & Jeffreys., "Methods of Mathematical Physics," Cambridge University Press, 1962.

〔7〕 Havelock, T.H., "Wave Patterns and Wave Resistance." TINA Vol. 76 p. 430-443, 1934.

〔8〕 Lunde., "On the Linearized Theory of Wave Resistance for Displacement Ships in Steady and Accelerated Motion," Trans. SNAME. 1951.

〔9〕 Krein, M.G., Doklady Akademi Nauk, USSR. Vol. 100. No. 3. 1955.

〔10〕 Yim, B., "On Ships with Zero and Small Wave Resistance," International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Michigan University, 1963.

〔11〕 Yim, B., "Some Recent Developments in Theory of Bulbous Ships," 5 th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, 1964.

〔12〕 Yim, B., "Analysis on Bow Waves and Stern Waves and Some Small-Wave Ship Singularity Systems," 6 th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, 1966. A

〔13〕 Weinblum, G., "Schiffe geringsten Wicterstandes," Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, V. 51, 1957.

〔14〕 Karp, S., Kotch, J., and Lurye., "On the Problem of Minimum Wave-Resistance for Struts and Strut-Like Dipole Distributions," 3rd Symposium on Naval Hydrodynamics, O.N.R Department of Navy, United States, 1960.

〔15〕 Sretenskii, L.N., "Sur un Probleme de Minimum dans la Theorie du Navire," C.R (Dokl) Akad. Nauk, USSR. 3, 247-248, 1935.

〔16〕 Wehausen, J.V., Webster, W.C., and Lin. W.C., "Ships of Minimum Total Resistance," Proc. of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, The Univ. of Michigan, 1963.

〔17〕 Taylor, D.W., "The Speed and Power of Ships," 3 rd ed. U.S. Gov't Printing Office, Washington D.C, 1943.

〔18〕 寺澤寛一, "自然科學者の 爲の 數學概論," 岩波書店, 東京, 1954.

〔19〕 Yim, B., "Analysis of Spherical Bulbs on a Ship Bow," Hydronautics Technical Report. 117-8, Oct. 1965.

〔20〕 Inui, T., Takahei, T., and Kumano, M., "Wave Profile Measurements, on the Wave-Making Characteristics of Bulbous, Bow" S.N.A.J. 1960.

〔21〕 Vossers, G., "Some Applications of the Slender Body Theory in Ship Hydrodynamics," Ph. D Thesis, Delft, 1962.

〔22〕 Tuck, E.O., "The Steady Motion of a Slender Ships," Ph.D Thesis Cambridge, 1963.

〔23〕 Maruo, H., "Calculation of the Wave Resistance of Ships, the Draught of Which is Small as the Beam," S.N.A.J. 1962.

〔24〕 Joosen, W.P.A., "The Velocity Potential and Wave Resistance Arising from the Motion of a Slender Ship," Proceedings of International Seminar on Theoretical Wave-Resistance, Univ. of Michigan,1963

〔25〕 Sisov, V.G., "Contribution to the Theory of Wave Resistance of Ships in Calm Water," Izv. Akad. Nauk, USSR, Dept, of Tech. Sci, Mechanics & Machine Constructions, No 1, p 75～85, 1961 (Bureau of Ships Translation No 887.)

〔26〕 Wehausen, J.V., "Surface Waves, An Approach to Thin-Ship Theory," Proc. of International Seminar on Theoretical Wave-Resistance, Univ. of Michigan. 1963.

〔27〕 Eggers, K.W.H., "On Second Order Contribution to Ship Waves and Wave Resistance," 6th Symposium on Naval Hydrodynamics, O.N.R. 1966.

〔28〕 Yim, B., "Higher. Order Wave Theory for Slender Ships," Hydronautics Inc. Technical Report 503-1, Feb. 1966 B.

〔29〕 Inui, T., "Study of Wave-Making Resistance of Ships," S.N.A.J. 60th Anniversary Series, Vol. 2, 1957.

〔30〕 Yim, B., "Singulanties on the Free Surface and Higher Order Wave Height far behind a Parabolic Ship," Hydronautics Inc. Technical Report 503-2, Oct, 1966 C.

〔31〕 Wu, T.Y., "Interaction between Ships Waves and Boundary Layer," Proc. of International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Univ. of Michigan. 1963.

〔32〕 Wu, Jin., "The Separation of Viscous from Wave-Making Drag of Ship Forms," J. of Ship Research, Vol. 6. No. 1. June, 1962.

〔33〕 Pien, P.C., "The Application of Wave Resistance Theory to the Design of Ship Hulls with Low Total Resistance," 5th Symposium on Naval Hydrodynamics, O.N.R., 1964.