Vol. 3, No. 1, 1966. 10

三次元線幾何學의 Tensor 取扱 I.

鄭 慶 泰

序 論

이 論文에서는 三次元射影空間 P_3 에서 tensor 로 取扱된 線幾何學의 基本概念을 두 번에 걸쳐서 紹介한다. 여기에 紹介된 結果[1]는 새로운 것이 못되나 이 論文에서는 從來의 古典的 方法과는 달리 線幾何學을 tensor 을 써서 取扱한다. 이러한 表示法과 取扱方法은 最近에 發展된 새로운 것으로, 特히 Spinor 代數와 數學的 見地에서 본 統一場論에서 Non-holonomic frame 의 構造說明에 貢獻한 바 크다.

1. Indicator

規約(1-1) 이 論文에서 쓰이는 모든 희랍添字 $\omega, \mu, \lambda, \nu, \alpha, \beta, \cdots$ 는 1, 2, 3, 4 의 값을 取하는 것으로 約束한다.

이제 P_3 에서 射影同次座標 x^ν 의 射影變換群

$$x^{\nu'} = C^{\nu'}_\lambda x^\lambda, \qquad x^\lambda = C^\lambda_{\nu'} x^{\nu'} \tag{1.1 a}$$

을 생각하여 보자. 但 C_λ 은

$$\triangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Det}((C^{\nu'}_\lambda)) = 1 \tag{1.1 b}$$

되는 實常數의 集合이다. 그러면 (1.1)에 依하여 Tensor T 는 一般的으로 P_3 에서

$$T^{\cdot\cdot\cdot}_{\lambda'\cdots} = C^{\nu'}_\alpha \cdots C^\beta_{\lambda'} \cdots T^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}$$

에 依하여 定義된다.

定義(1-2) $T_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}$ 를 P 개의 添字를 가진 項들의 集合이라 하고, $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$ 의 偶置換(奇置換)을 添字로 가진 모든 T 의 和를 $E_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p}$ $(O_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p})$ 라 하면,

$$p!\ T_{(\lambda_1\cdots\lambda_p)} \overset{\text{def}}{=} E_{\lambda_1\cdots\lambda_p} + O_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

$$p!\ T_{[\lambda_1\cdots\lambda_p]} \overset{\text{def}}{=} E_{\lambda_1\cdots\lambda_p} - O_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

例

$$6\,T_{(\lambda\omega\mu)} = (T_{\lambda\omega\mu} + T_{\omega\mu\lambda} + T_{\mu\lambda\omega}) + (T_{\lambda\mu\omega} + T_{\omega\lambda\mu} + T_{\mu\omega\lambda})$$

$$6\,T_{[\lambda\omega\mu]} = (T_{\lambda\omega\mu} + T_{\omega\mu\lambda} + T_{\mu\lambda\omega}) - (T_{\lambda\mu\omega} + T_{\omega\lambda\mu} + T_{\mu\omega\lambda})$$

定義(1-3) **反變**[2] indicator $I^{\omega\mu\lambda\nu}$ 와 **共變**[3] indicator $i_{\omega\mu\lambda\nu}$ 는 모든 雙의 添字가 交代的인[4] 4 階 Tensor 로서, 이것의 값은

(a) $\omega\mu\lambda\nu$ 가 1234 의 偶置換이면 $+1$,

(b) $\omega\mu\lambda\nu$ 가 1234 의 奇置換이면 -1,

(c) 나머지 다른 境遇에는 0 이다.

規約(1-4) 이 論文에서는 T^ν_λ 와 ρT^ν_λ 을 同一한 Tensor 의 同次成分으로 본다. (ρ 는 比例常數) 特히 x^ν 는 反變 vector 의 同次成分으로서 幾何學的으로는 P_3 에서 點을 表示하고, 共變 vector 의 同次成分 y_λ 는 平面을 表示한다. 그러나 Kronecker delta δ^ν_λ 와 의에서 定義된 indicator 은 이 規約을 따르지 않는 것으로 約束한다. 따라서, 가령, $I_{\omega\mu\lambda\nu}$ 와 $\rho I_{\omega\mu\lambda\nu}$ 는 相異한 두 tensor 의 成分이다.

이 論文에서 우리가 取扱하는 量은 scalar, vector, 2 階交代 Tensor[5] 그리고 indicator 에 限한다. indicator 은 다음 論議에서 볼 수 있듯이 매우 有用한 tensor 이다.

定理(1-5) (a) 一次獨立인(共線아닌) 세點 y^ν, z^ν, t^ν 에 依하여 決定되는 平面 x_ω 는

$$x_\omega = i_{\omega\mu\lambda\nu}\, y^\mu z^\lambda t^\nu \tag{1.2 a}$$

이고, (b) 一次獨立인 세 平面 y_λ, z_λ, t_λ 에 依하여 決定되는 點 x^ω 는

$$x^\omega = I^{\omega\mu\lambda\nu}\, y_\mu z_\lambda t_\nu \tag{1.2 b}$$

이다.

證明 이 定理의 證明은 明白하다. 가령, 點

---

(1) V. Hlavaty, Differential Line Geometry, P. Noordhoff Ltd 를 보라.

(2) contravariant.

(3) covariant.

(4) skew-symmetric.

(5) skew-symmetric quadratic tensor.

y^ν, z^ν, t^ν 가 平面 x_ω 上에 놓인 條件은

$$y^\omega x_\omega=0,\quad z^\omega x_\omega=0,\quad t^\omega x_\omega=0$$

이다. 그런데 이 方程式의 解는

$$x_1:x_2:x_3:x_4=\begin{vmatrix} y^2 & y^3 & y^4\\ z^2 & z^3 & z^4\\ t^2 & t^3 & t^4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} y^3 & y^4 & y^1\\ z^3 & z^4 & z^1\\ t^3 & t^4 & t^1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} y^4 & y^1 & y^2\\ z^4 & z^1 & z^2\\ t^4 & t^1 & t^2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} y^1 & y^2 & y^3\\ z^1 & z^2 & z^3\\ t^1 & t^2 & t^3\end{vmatrix}$$

$$=i_{1\mu\lambda\nu}\, y^\mu z^\lambda t^\nu : i_{2\mu\lambda\nu}\, y^\mu z^\lambda t^\nu$$
$$: i_{3\mu\lambda\nu}\, y^\mu z^\lambda t^\nu : i_{4\mu\lambda\nu}\, y^\mu z^\lambda t^\nu$$

되므로 (a)가 成立한다.

式 (1.2)는 反變 vector 와 共變 vector 의 關係를 說明하여 준다.

定理(1-6) 주어진 2階交代反變 tensor 을 $t^{\lambda\nu}=t^{[\lambda\nu]}$ 라 하고, $t_{\omega\mu}$를 다음과 같이 定義하자.

$$t_{\omega\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\, i_{\omega\mu\lambda\nu}\, t^{\lambda\nu}, \qquad (1.3a)$$

그러면

(a) $t_{\omega\mu}$는 2階交代共變 tensor 이다.
i.e $t_{\omega\mu}=t_{[\omega\mu]}$

(b) $t^{\omega\mu}$와 $t_{\lambda\nu}$ 사이에 다음 關係式이 成立한다.

$$t^{\omega\mu}=\frac{1}{2}\, I^{\omega\mu\lambda\nu}\, t_{\lambda\nu} \qquad (1.3b)$$

證明 (a)는 明白하다. $(1.3b)$를 證明하기 위하여 $(1.3a)$의 兩邊에 $I^{\omega\mu\alpha\beta}$를 곱하고 ω, μ에 關하여 總和하면

$$I^{\omega\mu\alpha\beta}\, t_{\omega\mu}=\frac{1}{2}\, i_{\omega\mu\lambda\nu}\, I^{\omega\mu\alpha\beta}\, t^{\lambda\nu}\overset{(6)}{=}2\,\delta^{\alpha\beta}_{[\lambda\nu]}\, t^{\lambda\nu}$$
$$=(\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}-\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu})\, t^{\lambda\nu}=t^{\alpha\beta}-t^{\beta\alpha}=2\,t^{\alpha\beta},$$

따라서 $(1.3b)$가 成立한다.

逆으로 $(1.3b)$를 假定하면 $(1.3a)$가 成立한다.

定義(1-7) 두 2階交代 tensor $t^{\omega\mu}$ 와 $t_{\omega\mu}$ 가 (1.3)의 關係에 있을 때, $t^{\omega\mu}(t_{\omega\mu})$를 indicator 에 依한 $t_{\omega\mu}(t^{\omega\mu})$의 **同伴**[7]**tensor** 이라 부른다.

規約(1-8) (1.3)과 같이, indicator 은 **2階交代** tensor 의 添字를 올리고 내릴 때에만 쓰이는 것으로 約束한다. 그리고 同伴 tensor 은 同一한 核文字로 表示하로 한다.

定理(1-9) tensor $t_{\omega\mu}=t_{[\omega\mu]}$의 行列式을 t 로 놓으면

$$64\,t=4(t_{\omega\mu}\, t^{\omega\mu})^2 \qquad (1.4)$$

證明 $t=I^{\alpha\beta\gamma\delta}\, t_{1\alpha}\, t_{2\beta}\, t_{3\gamma}\, t_{4\delta}$

$$=(t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}+t_{31}t_{24})^2 \qquad (1.5)$$

한便

$$t_{\omega\mu}\, t^{\omega\mu}=\frac{1}{2}\, I^{\omega\mu\lambda\nu}\, t_{\omega\mu}\, t_{\lambda\nu}$$
$$=8(t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}+t_{31}t_{24})^2 \qquad (1.6)$$

(1.5)와 (1.6)을 比較하여 보면 (1.4)는 明白하다.

2. 直線의 Plücker 座標

定義(2-1) y^ν, z^ν (y_λ, z_λ)를 直線 l 위에 놓인 두 點(直線 l 을 지나는 相異한 두 平面)이라 하자. 行列式

$$p^{\lambda\nu}\stackrel{\text{def}}{=}y^{[\lambda}z^{\nu]},\quad (q_{\lambda\nu}\stackrel{\text{def}}{=}y_{[\lambda}z_{\nu]}) \qquad (2.1)$$

를 直線 l 의 **射影同次 Plücker 點(平面) 座標** 또는 簡單히 l 의 **Plücker 座標**라 한다.

注意 慣習上 直線 l 의 Plücker 點座標는 $(p^{14}, p^{24}, p^{34}, p^{23}, p^{31}, p^{12})$로, Plücker 平面座標는 $(q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{23}, q_{31}, q_{12})$로 表示한다. 特히, $p^{ii}=q_{ii}=0$, $p^{ij}=-p^{ji}$, $q_{ij}=-q_{ji}$ $(i\neq j)$임에 注意하라.

定理(2-2) (2.1)로 定義된 直線 l 의 Plücker 座標는 다음 性質을 가진 2階交代 tensor 이다.

(a) $p^{\lambda\nu}(q_{\lambda\nu})$는 l 上의 點 y^ν, $z^\nu\neq y^\nu$ (l 을 지나는 平面 y_λ, $z_\lambda\neq y_\lambda$)를 撰擇하는 方法如何에 不拘하고 一定하다.

(b) $p^{\lambda\nu}$와 $q^{\lambda\nu}$는 다음의 關係에 있다.

$$q^{\omega\mu}=\rho\, p^{\omega\mu},\quad (\rho\sigma\neq0) \qquad (2.2a)$$
$$p^{\omega\mu}=\sigma\, q^{\omega\mu} \qquad (2.2b)$$

(c) $p^{\lambda\nu}$ 와 $q_{\lambda\nu}$는 다음을 滿足한다.

$$p_{\omega\mu}\, p^{\omega\mu}=0 \qquad (2.3a)$$
$$q_{\omega\mu}\, q^{\omega\mu}=0 \qquad (2.3b)$$

證明 $p^{\lambda\nu}$, $q_{\lambda\nu}$ 가 2階交代 tensor 임은 定義에서 明白하다.

(a) 點列 l 上에서 相異한 두 點 y'^ν, z'^ν 를

$$y'^\nu=\alpha y^\nu+\beta z^\nu,\quad z'^\nu=\lambda y^\nu+\delta z^\nu$$
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \delta\end{vmatrix}\neq 0$$

로 定義하면

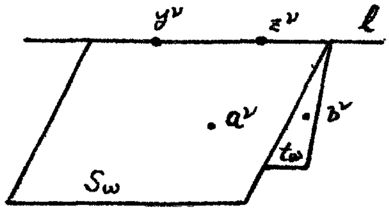
$$p'^{\nu\lambda}\stackrel{\text{def}}{=}y'^{[\lambda}z'^{\nu]}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \delta\end{vmatrix}\, p^{\lambda\nu}$$

따라서 $p^{\lambda\nu}$에 關하여 (a)가 成立한다.

(b) 任意의 두 點 a^ν, b^ν를 a^ν, b^ν, y^ν, z^ν 가 一次獨立되게 擇하면

(6) $i_{\omega\mu\lambda\nu}\, I^{\omega\mu\alpha\beta}=4\,\delta^{\alpha\beta}_{[\lambda\nu]}$

(7) associate.



$$\rho \overset{\text{def}}{=} i_{\omega\mu\lambda\nu}\, a^{\omega} b^{\mu} y^{\lambda} z^{\nu} \neq 0 \qquad (2.4)$$

a^{ν}, y^{ν}, z^{ν} 에 依하여 決定되는 平面 S_{ω} 는

$$S_{\omega} = i_{\omega\mu\lambda\nu}\, a^{\mu} p^{\lambda\nu} = i_{\omega\mu\lambda\nu}\, a^{\mu} y^{\lambda} z^{\nu} \qquad (2.5\,a)$$

이고, b^{ν}, y^{ν}, z^{ν} 에 依하여 決定되는 平面 t_{ω} 는

$$t_{\omega} = i_{\omega\mu\kappa\nu}\, b^{\mu} p^{\lambda\nu} = i_{\omega\mu\lambda\nu}\, b^{\mu} y^{\lambda} z^{\nu} \qquad (2.5\,b)$$

이다. 한便 (a)에 依하여

$$q_{\lambda\nu} = S_{[\lambda} t_{\nu]}. \qquad (2.6)$$

따라서 $(2.2\,a)$는 다음과 같이 證明된다.

$$q^{\omega\mu} \overset{(1.3b)}{=\!=} \frac{1}{2} I^{\omega\mu\lambda\nu} q_{\lambda\nu} \overset{(2.6)}{=\!=} \frac{1}{2} I^{\omega\mu\lambda\nu} S_{\lambda} t_{\nu} =$$

$$\overset{(2.5)}{=\!=} \frac{1}{2} I^{\omega\mu\lambda\nu} i_{\lambda\xi\eta\zeta}\, a^{\xi} p^{\eta\zeta} i_{\nu\alpha\beta\gamma}\, b^{\alpha} p^{\beta\gamma} =$$

$$\overset{(8)}{=\!=} (a^{\omega} p^{\mu\nu} + a^{\nu} p^{\omega\mu} + a^{\mu} p^{\nu\omega})\, i_{\nu\alpha\beta\gamma}\, b^{\alpha} p^{\beta\gamma} =$$

$$=\!= i_{\nu\alpha\beta\gamma}\, a^{\nu} b^{\alpha} p^{\beta\gamma} p^{\omega\mu} \overset{(2.4)}{=\!=} \rho\, p^{\omega\mu}$$

$(2.2\,b)$도 비슷한 方法으로 證明할 수 있다.

(c) $(2.3\,a)$의 證明은 다음과 같다.

$$p_{\omega\mu} p^{\omega\mu} = \frac{1}{2} i_{\omega\mu\lambda\nu}\, p^{\lambda\nu} p^{\omega\mu}$$

$$= \frac{1}{2} i_{\omega\mu\lambda\nu}\, y^{\lambda} z^{\nu} y^{\omega} z^{\mu} = 0$$

定理(2-3) $p^{\lambda\nu} = p^{[\lambda\nu]}$ 가 直線 l 의 Plücher 座標가 될 必要充分條件은 $(2.3\,a)$가 滿足되는 것이다. 萬若 이 條件이 滿足되면 tensor $p^{\lambda\nu}$ 는 座標가 $p^{\lambda\nu}$, $p_{\lambda\nu}$ 되는 直線 l 을 一意的으로 決定한다.

證明 $(2.3\,a)$가 必要條件임은 이미 定理(2-2)의 (c)에서 證明했다. 이제 $(2.3\,a)$가 成立한다고 假定하고, p 를 $p_{\lambda\nu}$ 의 行列式이라 하자. 그러면 (1.4)에 依하여 $p=0$. 따라서 行列 $(\!(p_{\lambda\nu})\!)$의 階數 r 은 $r<4$ 이다. 그런데 $p_{\lambda\nu}$ 는 交代的이므로 $r=1, 3$ 이 될 수 없다. 따라서 $r=2$. 이 境遇에 $p_{\lambda\nu}$ 는 初等代數의 定理에 依하여 $p_{\lambda\nu} = y_{[\lambda} z_{\nu]}$ 形이 된다. 그러므로 $p_{\nu\lambda}$ 는 y_{λ} 와 z_{λ} 의 交線 l 을 一意的으로 決定한다.

定理(2-4) (a) 直線 $p^{\lambda\nu}$ 가 座標平面

$$x^{i} = 0^{(9)} \qquad (2.7)$$

위에 놓일 必要充分條件은

$$p^{\lambda i} = 0 \qquad (2.8)$$

이다.

(b) 萬若 (2.8)이 滿足되지 않으면 直線 $p^{\lambda\nu}$ 는 이 座標平面과 點 $p^{\lambda i}$ 에서 만난다.

證明 便宜上 $i=4$ 되는 境遇에만 證明하자. $i=1, 2, 3$ 되는 境遇도 비슷하게 證明된다.

(a) $(\Longrightarrow)$ 直線 $p^{\lambda\nu} = y^{[\lambda} z^{\nu]}$가 平面 $x^4=0$ 와 一致하면 $y^4=z^4=0$. 따라서 $p^{\lambda 4}=0$ 이다.

$(\Longleftarrow)$ 逆으로, $p^{\lambda 4}=0$ 이 成立하면, 平面 $x^4=0$ 의 座標가 a_{λ} $(0, 0, 0, 1)$이므로

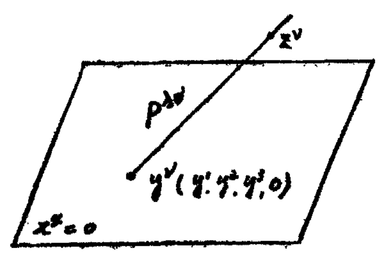
$$a_{\lambda} p^{\lambda\nu} = 0$$

이 滿足된다. 따라서 直線 $p^{\lambda\nu}$ 는 平面 $x^4=0$ 위에 놓인다.

(b) 이제

$$p^{\lambda 4} \neq 0 \quad (\lambda \neq 4)$$

로 假定하면 直線 $p^{\lambda\nu}$ 는 (a)에 依하여 平面 $x^4=0$ 위에 놓이지 않는다.



따라서 直線 $p^{\lambda\nu}$ 와 平面 $x^4=0$ 의 交點을 y^{ν} 라 하면 $y^4=0$ 이다. $p^{\lambda\nu}$ 의 다른 한 點을 z^{ν} 라 하면

$$p^{\lambda 4} = y^{[\lambda} z^{4]} = \frac{1}{2} y^{\lambda} z^{4} \quad (z^4 \neq 0)$$

따라서

$$p^{14} : p^{24} : p^{34} : y^{44} = y^1 : y^2 : p^3 : 0$$

---

(8) $I^{\lambda\omega\mu\nu} i_{\lambda\xi\eta\zeta} = 3!\, \delta^{\omega\mu\nu}_{[\xi\eta\zeta]}$ 이므로

$$\frac{1}{2} I^{\omega\mu\lambda\nu} i_{\lambda\xi\eta\zeta}\, a^{\xi} p^{\eta\zeta} = \frac{3!}{2} \delta^{\omega\mu\nu}_{[\xi\eta\zeta]}\, a^{\xi} p^{\eta\zeta} = \left(\delta^{\omega\mu\nu}_{\xi\eta\zeta} + \delta^{\omega\mu\nu}_{\eta\zeta\xi} + \delta^{\omega\mu\nu}_{\zeta\xi\eta}\right) a^{\xi} p^{\eta\zeta} = a^{\omega} p^{\mu\nu} + a^{\nu} p^{\omega\mu} + a^{\mu} p^{\nu\omega}$$

(9) 로마文字 i, j, k, …는 1, 2, 3, 4 의 어느 한 값을 取하는 固定된 添字로 쓰인다. 勿論 이 添字는 Einstein 의 總和規約을 따르지 않다.

3. 두 直線, 線束,[10] 二次線織面[11]

定理(3-1) 두 直線 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2)$가 만날 必要充分條件은

$$\underset{a}{p}_{\lambda\nu}\underset{b}{p}^{\lambda\nu}=0 \quad (a,\ b=1,2) \qquad (3.1)$$

證明 $\underset{1}{p}^{\lambda\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x^{[\lambda}y^{\nu]}$, $\quad \underset{2}{p}^{\lambda\nu}\stackrel{\text{def}}{=} z^{[\lambda}t^{\nu]}$

로 놓자. 그러면 이 두 直線이 만날 必要充分條件은 行列式 $|x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda, t^\lambda|$이 零되는 것이다. 그런데 이 條件이 (3.1)과 同等함을 다음과 같이 證明할 수 있다.

$$0=i_{\omega\mu\lambda\nu}x^\omega y^\mu z^\lambda t^\nu = i_{\omega\mu\lambda\nu}\underset{1}{p}^{\omega\mu}\underset{2}{p}^{\lambda\nu}$$

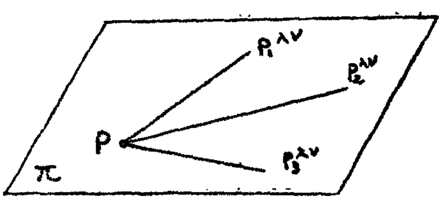
$$=2\underset{1}{p}_{\lambda\nu}\underset{2}{p}^{\lambda\nu}=2\underset{1}{p}^{\omega\mu}\underset{2}{p}_{\omega\mu}$$

定理(3-2) $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2)$를 서로 만나는 두 直線이라 하자. 그러면 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2)$에 依하여 決定되는 線束 $P_\pi\ \{r^{\lambda\nu}\}$의 解析的表示는

$$r^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{2} r^a \underset{a}{p}^{\lambda\nu} \qquad (3.2)$$

이다. 但 r^1, r^2는 變數이다.

證明 線束 P_π의 꼭지點을 P, 平面을 π라 하자. 그러면



(a) (3.2)로 주어진 $r^{\lambda\nu}$는 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2)$와 만나는 直線이다. 왜냐하면 (3.1)과 (3.2)에 依하여

$$r^{\lambda\nu}r_{\lambda\nu}=0, \quad \gamma^{\lambda a}\underset{a}{p}_{\lambda\nu}=0 \quad (a=1,2)$$

되기 때문이다.

(b) 이제 $S^{\lambda\nu}$를 P와 만나고 π위에 놓이지 않는(또는 π위에 놓이고 P를 지나지 않는) 任意의 直線이라 하자. 그러면

$$S^{\lambda\nu}\underset{a}{p}_{\lambda\nu}=0 \quad (a=1,2)$$

$$\therefore S^{\lambda\nu}r_{\lambda\nu}=0$$

따라서 $r^{\lambda\nu}$는 P를 지난다.(또는 π위에 놓인다). 곧 (3.2)로 주어진 $r^{\lambda\nu}$는 線束 P_π에 屬하는 直線이다.

(c) 逆으로 P_π에 屬하는 어떠한 直線도 (3.2) 形으로 表示됨을 쉽게 알 수 있다.

定理(3-3) $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2,3)$을 세 個의 서로 만나지 않는 直線이라 하자.

$$m_{cb}=m_{bc}\stackrel{\text{def}}{=}\underset{b}{p}_{\lambda\nu}\underset{c}{p}^{\lambda\nu}\quad (b,\ c=1,\ 2,\ 3)\qquad(3.3)$$

이면

$$\mathrm{Det}((m_{bc}))=2\,m_{12}m_{13}m_{23}\neq 0 \qquad (3.4)$$

이 成立한다. 그리고 세 直線 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}$로 決定되는 二次線織面 R의 解析的 表示는 R의 母線을 $r^{\lambda\nu}$로 表示하면

$$r^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{3} r^a\underset{a}{p}^{\lambda\nu}\qquad(3.5)$$

이다. 但 變數 r^1, r^2, r^3은 다음 條件을 滿足한다.

$$\sum_{b,c=1}^{1} r^b r^c m_{bc}=0 \qquad (3.6)$$

證明 다음과 같이 몇 段階로 나누어서 이 定理를 證明하여 보자.

(a) (3.4)의 證明

∵ 直線 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu}(a=1,2,3)$는 서로 만나지 않으므로

$$m_{12}m_{13}m_{23}\neq 0,\quad m_{11}=m_{22}=m_{33}=0$$

따라서 (3.4)가 成立한다.

(b) (3.5)로 定義된 $r^{\lambda\nu}$는, (3.6)에 依하여, 直線을 表示한다.

$$\therefore\ r_{\lambda\nu}r^{\lambda\nu}=\left(\sum_{b=1}^{3} r^b\underset{b}{p}_{\lambda\nu}\right)\left(\sum_{b=1}^{3} r^c\underset{c}{p}^{\lambda\nu}\right)$$

$$=\sum_{b,c=1}^{3} r^b r^c m_{bc}\stackrel{(3.6)}{=}0$$

(c) (3.5)로 定義된 直線 $r^{\lambda\nu}$는 서로 만나지 않는다.

∵ (3.5)로 定義된 相異한 두 直線을

$$r^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{3} r^a\underset{a}{p}^{\lambda\nu},\quad (\text{但}\ \sum_{b,c=1}^{3} r^b r^c m_{bc}=0)$$

$$r'^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{3} r'^a\underset{a}{p}^{\lambda\nu},\quad (\text{但}\ \sum_{b,c=1}^{3} r'^b r'^c m_{bc}=0)$$

라 하면, (3.4)에 依하여

$$r^{\lambda\nu}r'_{\lambda\nu}=\sum_{b,c=1}^{3} m r_{bc} r'^b r^c \stackrel{(3.4)}{\neq} 0$$

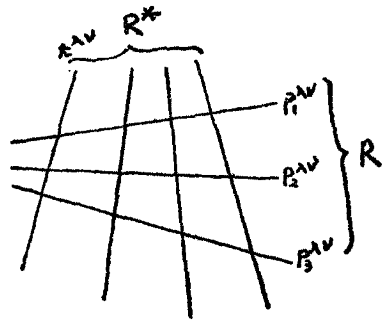
되기 때문이다.

(d) (3.5)로 定義된 直線 $r^{\lambda\nu}$는 二次曲面 Q를 生成한다.

∵ P_3의 任意의 直線 $t^{\lambda\nu}$가 $r^{\lambda\nu}$의 集合과 두 點

(11) pencil of lines.

(11) regulus.



에서 만남을 證明하면 된다. 이제

$$t_a \overset{\text{def}}{=} t^{\lambda\nu} \underset{a}{p}^{\lambda\nu} \quad (a=1,\ 2,\ 3) \tag{3.7}$$

로 定義하면, $r^{\lambda\nu}$와 $t^{\lambda\nu}$가 만날 條件은

$$r^{\lambda\nu} t_{\lambda\nu} = \sum_{a=1}^{3} r^a t_a = 0 \tag{3.8}$$

이다. 그런데 (3.6)과 (3.8)의 解 $r^a (a=1,\ 2,\ 3)$는 두 個(또는 重根) 存在하므로, $t^{\lambda\nu}$는 두 個의 直線 $r^{\lambda\nu}$와 만난다.

(e) 위의 論議 (b), (c), (d)에 依하여 (3.5)로 定義된 모든 直線 $r^{\lambda\nu}$는 同一한 二次線織面 R에 屬함을 알 수 있다.

(f) 逆으로 R의 모든 直線 $r^{\lambda\nu}$는 (3.5) 形으로 表示됨을 쉽게 證明할 수 있다.

모든 $\underset{a}{p}^{\lambda\nu} (a=1,\ 2,\ 3)$와 만나는 直線 $t^{\lambda\nu}$는 (ie (3.7)에 依하여 $t_a=0$) Q의 第二의 二次線織面 R*에 屬한다. 따라서 R*의 任意의 母線 $t^{\lambda\nu}$는 R의 모든 母線과 만나고, 逆으로, R의 任意의 母線은 R*의 모든 母線과 만난다.

(延世大學校)

<p. 37에서 계속>

에서의 linear functional의 積分表現論인 것이다.

第14章에서는 [0, 1] 및 L^p 위에서의 point mapping 및 set mapping의 性質을 調査함으로써 [0, 1], I^∞, L^p 等의 構造를 明白히 하고 있다.

以上에서 본 바와 같이 이 册의 主要 테마는 Lebesgue 積分論으로서, 이것을 三段階로 나누어 처음에는 Euclid 空間에서 古典的方法으로 다루고, 둘째 段階에서는 抽象集合위에서 現代的方法으로 이를 다루고, 세째 段階로서는 이 積分을 Functional Analysis의 立場에서, 곧 vector lattice 위에서의 linear functional로서 다룸으로써 初步者로 하여금 Lebesgue integral을 明確히 透視할 수 있도록 試圖하고 있는 데 그 特徵을 發見할 수 있으며, 또한 特記할 것은, 最近에 取扱되는 많은 좋은 問題를 各節마다 收錄하여 讀者로 하여금 册의 內容을 把握하는 데 도움이 되도록 하는 同時에 現代解析學의 基本되는 槪念들을 補充紹介하는 것도 게을리하고 있지 않다. 要컨대 一讀을 권하고 싶은 册이다.

(延世大學校)