Vol. 3, No. 1, 1966. 10

Homology 代數

——基礎概念을 中心으로 하여——

李 起 安

1. 序 言

Topology 는 位相空間 X 에 複體(幾何)를 對應시키고 그 單體들을 生成元으로 삼아 가령 整數環 X 에 係數를 갖는 Abel 群 A 를 이룩하여 空間 X 의 性質究明을 Abel 群 A 의 性質究明에 歸着시키고 있다. 이 때 Abel 群 A 는 有階 Z-加群이며 $A=\Sigma A_n$ (直合; A_n 는 Z-加群)와 같이 表示된다.

따라서 A 의 性質究明에는 境界作用素

$$\partial_n : A_n \longrightarrow A_{n-1} \quad (\partial_{n-1}\partial_n=0)$$

를 定義하여

$$\cdots\cdots\longrightarrow A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \longrightarrow$$

$$\cdots\cdots\longrightarrow A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \longrightarrow 0$$

에서의 가령 ∂_n 의 像 $\mathrm{Im}\,\partial_n$ 와 ∂_{n-1} 의 核 $\mathrm{Ker}\,\partial_{n-1}$ 의 商으로 된 $n-1$ 次 Homology 群 $H_n(X, Z)$ 等의 階數와 不變系를 찾는 것이 普通이다.

이와 같이 群의 系列과 그들 사이의 寫像을 適切히 驅使하는 手法을 代數系의 性質究明에 使用함으로써 約 15年前에 Cartan, Eilenberg 는 所謂 그들이 命名하였던 Homology 代數를 創設하였다.

이 글은 指定된 紙面內에서 Homoloy 代數의 基礎概念을 一瞥하도록 試圖한 것이다. 그러므로 이 글에서 例擧될 定理와 性質들의 證明은 省略할 수 밖에 없다. 그러나, 筆者의 工夫不足을 自認하면서 自身의 당돌함을 부끄러이 여기나, 不足과 未備點에 對하여는 先輩諸賢의 많은 指導를 바라는 바이다.

2. Λ-加群

Λ 는 單位元 1을 가지는 環, A 는 加法에 의한 Abel 群이라 하자. A 가 左側 Λ-加群이라 함은 $A\ni x,\ x_1,\ x_2$; $\Lambda\ni\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ 에 對하여 乘法 λx 가 定義되어 있고, 다음을 滿足시킴을 말한다.

(i) $\lambda(x_1+x_2)=\lambda x_1+\lambda x_2$

(ii) $(\lambda_1+\lambda_2)x=\lambda_1 x+\lambda_2 x$

(iii) $\lambda_1(\lambda_2 x)=(\lambda_1\lambda_2)x$ (iv) $1x=x$

위 條件에서 λx 等이 $x\lambda$ 等으로 代置되면 A 를 右側 λ-加群이라 한다. 便宜上 앞으로는 λ-加群은 左側 λ-加群을 指稱한 것으로 約束한다. A, B 가 Λ-加群일 때 寫像 $f: A\to B$ 는 $A\ni x_1,\ x_2$; $\Lambda\ni\lambda$ 에 對하여 다음 條件을 滿足하 때 λ-準同型寫像(앞으로는 約하여 Λ-寫像이라 함)이라 한다.

(i) $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

(ii) $f(\lambda x_1)=\lambda f(x_1)$

이 때 $f(A)$를 f의 像($\mathrm{Im}\,f$), B 의 零元 0 에 對하여 $f^{-1}(0)$를 f의 核($\mathrm{Ker}\,f$), $B/\mathrm{Im}\,f$를 f의 餘核($\mathrm{Coker}\,f$), $A/\mathrm{Ker}\,f$를 f의 餘像($\mathrm{Coim}\,f$)라 일컫는다. 또.

$\mathrm{Im}\,f=B$ 이면 f를 全射($A\longrightarrow B$ 로 表示)

$\mathrm{Ker}\,f=0$ (A 의 零元)이면 f를 單射($A\rightarrowtail B$ 로 表示)

따라서 f가 全射이고 同時에 單射(全單射)이면 $A\cong B$(同型)이다.

Λ-加群 A', A, A'' 및 Λ-寫像 φ, ϕ 에 對하여

$$A' \overset{\varphi}{\rightarrowtail} A, \qquad A \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} A''$$

이고 $\mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Ker}\,\phi$ 이면

$$A' \overset{\varphi}{\rightarrowtail} A \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} A'' \text{ 또는}$$

$$0\longrightarrow A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\phi} A'' \longrightarrow 0 \ \text{(exact)}$$

라 쓰고 3項完全系列이라 말한다. 特히 $A=A'\oplus A''$(直合)이면 이 列은 分解(split)한다고 말한다.

Λ-加群 A 가 F 의 部分集合이고 F 의 元 x 는 $\lambda_i\in\Lambda$, $x_i\in A$ 에 對하여 唯一한 有限合 $x=\Sigma\lambda_i x_i$ 로

表示되면 F는 A를 基로 가지는 Λ-自由加群이라 하며, F_A로 表示한다. 이 경우 $F_A \twoheadrightarrow A$인 λ-寫像이 存在하며, 이것의 核을 R_A라 하면 $R_A \rightarrowtail F_A \twoheadrightarrow A$이다.

$$\cdots\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots\cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_0$$

인 Λ-加群列에서 $\operatorname{Im}\varphi_n=\operatorname{Ker}\varphi_{n-1}$ $(n=2, 3, \cdots\cdots)$이면 完全系列이라하며 列의 맨 끝에 (exact)을 補充하여 表示하고 $\operatorname{Im}\varphi_n \subset \operatorname{Ker}\varphi_{n-1}$ $(n=2, 3\cdots\cdots)$이면 準完全系列이라고 일컫는다(3項準完全系列의 뜻은 自明)

Λ-加群과 그들 사이의 Λ-寫像으로 된 다음 圖式들이 可換이라 함은 各各

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[d, "\psi"] \\ A_3 \arrow[r, "g"'] & A_4 \end{tikzcd}$$ 에서 $\psi\varphi=gf$;

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & A_2 \arrow[dl, "\psi"] \\ & A_3 & \end{tikzcd}$$ 에서 $\psi\varphi=f$

가 成立됨을 말한다.

定理 1. Λ-加群 및 그들의 Λ-寫像으로 된 다음 可換圖

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "h_0"] & A_{-1} \arrow[r, "f_{-1}"] \arrow[d, "h_{-1}"] & A_{-2} \arrow[d, "h_{-2}"] \\ B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_0 \arrow[r, "g_0"'] & B_{-1} \arrow[r, "g_{-1}"'] & B_{-2} \end{tikzcd}$$

에서 다음이 成立한다.

(i) $\operatorname{Coker} h_2=\operatorname{Ker} h_1=\operatorname{Ker}_{-1}=0 \Longrightarrow \operatorname{Ker} h_0=0$

(ii) $\operatorname{Coker} h_1=\operatorname{Coker} h_{-1}=\operatorname{Ker} h_{-2}=0$
$\Longrightarrow \operatorname{Coker} h_0=0$

(이것은 Homology 代數에서 定理의 證明에 많이 使用된다.)

λ-加群中 Homology 代數에서 가장 有益한 두개를 다음에 說明한다.

射影的加群(Projective modules) :

Λ-加群 P는 左圖에서 f, φ가 주어져 있을 때 $\varphi g=f$인 g가 반드시 存在하면 射影的 Λ-加群(約하여 射影加群)이라 말한다. 射影加群의 하나의 例는 Λ-自由加群인 것이다. 그리고 射影加群 P에 對하여 $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow P$이면 이 列은 반드시 分解한다.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \text{(exact)}$$

定理 2. 任意의 Λ-加群 A는 어떤 射影加群의 準同型寫像의 像이다. 즉 A에 對하여 $P \longrightarrow A \longrightarrow 0$(exact)인 射影加群 P가 반드시 存在한다.

이 定理를 活用하여 보자. 任意의 Λ-加群 A에 對하여 $A_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} A$인 射影加群 A_0가 存在한다. 이때 $\operatorname{Ker}\varepsilon=L_0$이라 하고 위 定理를 적용하면 $A \overset{g_1}{\twoheadrightarrow} L_0$인 射影加群이 存在하며, $L_0 \overset{f_0}{\rightarrowtail} A_0$라 할 때 $f_0 g_1=d_1$과 같이 놓으면

$$A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \ \text{(exact)}$$

를 얻는다 이것을 繼續하면 모든 A_n이 射影的이며, A의 射影分解라고 일컫는 다음의 完全系列을 얻는다.

$$\cdots\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots\cdots$$
$$\longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \ \text{(exact)}$$

任意의 Λ-加群 A에는 위에서와 같이 반드시 射影分解가 存在하며, 만약 A_n이 射影加群이면 $A_{n+1}=\cdots\cdots=0$이라 놓아도 좋다. 이와 같은 가장 작은 n을 A의 (Λ-)射影次元이고 부르고 $\dim_\Lambda A$ (때로는 $\mathrm{l.dim}\, A$)等으로 表示한다. ($\mathrm{r.dim}_\Lambda A$의 뜻은 自明) 이 때 $\dim_\Lambda A$에는 無限大를 許容할 것이며, $\dim_\Lambda A$가 -1, 0이라함은 各各 A가 Zero, 射影加群임을 表示한다.

單射的加群(Injective modules) :

Q는 Λ-加群이고 左圖에서 f, φ가 주어지고 $g\varphi=f$인 g가 반드시 存在하면 單射的 Λ-加群(單射加群)라 한다. 이 때 다음의 定理가 成立한다.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd} \text{(exact)}$$

定理 3. 任意의 Λ-加群 A는 어떤 單射加群 Q의 部分加群과 同型이다. 換言하면 $0 \longrightarrow A \longrightarrow Q$ (exact)인 單射加群 Q가 반드시 存在한다.

Λ-加群 A가 0 및 그 自身을 除外하고는 部分加群을 가지지 않으면, 單純이라 하고, 單純인 部分加群의 直合이면 半單純이라 부른다. Λ를 Λ-加群으로 看做하였을 때 半單純이면

첫째 : Λ의 모든 左側 ideal은 單射的 λ-加群이다.

둘째 : 모든 Λ-加群은 射影的이고 同時에 單射

的이다.

等이 成立한다. 그리고 單射加群 Q에 對하여 $Q \rightarrowtail A \twoheadrightarrow B$는 반드시 分解한다.

위 定理를 任意의 Λ-加群 A에 活用하여 보자. $A \overset{\varepsilon}{\rightarrowtail} A^0$인 單射加群 A^0가 있다. 이 때 $\mathrm{Coker}\,\varepsilon = L^0$라 하면 $A \overset{\varepsilon}{\rightarrowtail} A^0 \overset{f^0}{\twoheadrightarrow} L^0$이며 또 $L^0 \overset{g^0}{\rightarrowtail} A' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} L'$가 成立하는 單射加群 A'이 存在한다. $g^0f^0=d^0$라 하면 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A^0 \xrightarrow{d^0} A'$ (exact)를 얻고, 이것을 繼續할 때 모든 A^n이 單射加群이며, A의 單射的分解라고 일컫는 다음의 完全系列을 얻는다.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A^0 \xrightarrow{d^0} A' \longrightarrow \cdots\cdots$$
$$\longrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots\cdots \quad \text{(exact)}$$

이와 같은 單射的分解에서 어떤 n에 對하여 $A^n=0$이면 $A^{n+1}=\cdots\cdots=0$이 된다. 이러한 가장 작은 n을 A의 (Λ-)單射次元이라 부르며 $\text{inj-dim}_\Lambda A$ (또는 $l.\,\text{inj-dim}_\Lambda A$)로 表示한다.

3. Homology

Λ-加群 A에 對하여 Λ-寫像 $d: A \longrightarrow A$가 $dd=0$이면 d를 微分作用素라 하고, 이 경우 다음의 記號를 定義한다.

$Z(A)=\mathrm{Ker}\,d$ (輪體加群), $\quad Z'(A)=\mathrm{Coker}\,d$

$B(A)=\mathrm{Im}\,d$ (境界加群), $\quad B'(A)=\mathrm{Coim}\,d$

이 때 $\delta: B'(A) \cong B(A)$ (同型)이며,

$A \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A)=A \twoheadrightarrow B'(A)$,

$B(A) \rightarrowtail Z(A)$

等의 Λ-寫像이 있기 때문에 d는 다음과 같이 分解된다.

$$A \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow B'(A) \xrightarrow{\delta} B(A)$$
$$\longrightarrow Z(A) \longrightarrow A$$

이 系列에서 $\tilde{d}: Z'(A) \longrightarrow Z(A)$와 같이 定義하면 다음이 成立한다.

첫째: $0 \longrightarrow B(A) \longrightarrow Z(A) \xrightarrow{\tilde{d}} Z'(A) \longrightarrow B'(A) \longrightarrow 0$ (exact)

둘째: $\mathrm{Coker}\,\tilde{d}=Z(A)/B(A)=\mathrm{Ker}(Z'(A) \longrightarrow B'(A))=\mathrm{Ker}\,\tilde{d}$

여기서 $\mathrm{Ker}\,\tilde{d}=H(A)$로 表示하고 A의 Homology 加群(또는 Homology 群)이라 말한다. 이 때 다음과 같은 性質들이 있다.

첫째: $0 \longrightarrow H(A) \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow Z(A) \longrightarrow H(A) \longrightarrow 0$ (exact)

둘째: 다음의 圖式은 可換이다.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B(A) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & Z(A) \arrow[r] \arrow[d] & H(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
0 \arrow[r] & B(A) \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & Z'(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{(exact)} \\
 & & B'(A) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & B'(A) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & \text{(exact)} & \text{(exact)} & &
\end{tikzcd}$$

Λ-加群 A, A'이 各各 微分作用素 d, d'를 가지며, Λ-寫像 $f: A \to A'$가 $fd=d'f$를 만족하면 f를 d-寫像이라 假稱한다. 지금 f, g가 $A \to A'$의 d-寫像이고, $S: A \to A'$인 Λ-寫像이 있어 $Sd+d'S=g-f$이면, f와 g는 homotopic이라 하며, S를 f와 g의 homotopy라 한다. f와 g가 homotopic이면, 이들로부터 誘導된 A, A'의 Homology 群 $H(A)$, $H(A')$사이의 群準同型寫像 f_*, g_*는 同一함이 證明된다. (이 때 f_*, g_* 등을 homology 寫像이라고 말하는 경우가 있다)

定理 4. Λ-加群 A', A, A''가 微分作用素를 가지며, $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$일 때, 다음의 完全系列을 얻는다.

$$\cdots\cdots \longrightarrow H(A'') \longrightarrow H(A') \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A'')$$
$$\longrightarrow Z'(A') \longrightarrow Z'(A) \longrightarrow Z'(A'') \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$
$$0 \longrightarrow Z(A') \longrightarrow Z(A) \longrightarrow Z(A'') \longrightarrow H(A'')$$
$$\longrightarrow H(A) \longrightarrow H(A'') \longrightarrow \cdots\cdots \quad \text{(exact)}$$

A가 Λ-加群인 環이고 $\Lambda \ni \lambda$, $A \ni x, y$에 對하여 $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$가 成立되면 A를 Λ上의 多元環이라 한다. 이경우 $A^0, A^1, \cdots\cdots, A^n, \cdots\cdots$ 等이 A의 Λ-部分加群이고

$$A=\Sigma A^n \text{ (直合)} \qquad A^k \cdot A^l \subset A^{k+l}$$

이면 A를 Λ上의 有階多元環이라 한다. 이 때 A^n을 A의 n次成分, M의 元 x는 有限合, $x=\Sigma x^n$, $x^n \in A^n$로 表示되며, x^n은 x의 n次成分, M의 部分加群 N이 $N \ni x$이면 $x^n \in N$일 때 N을 M의 同次部分加群等으로 各各부른다.

위의 有階多元環 A가 一次微分作用素(어떤 n에 對하여 $d^n: A^n \to A^{n+1}$, $d^{n+1}d^n=0$) d를 가지

면 Λ-複體라고 말하며, 이경우 $\mathrm{Im}\, d^n \subset \mathrm{Ker}\, d^{n+1}$ 이므로 다음의 準完全系列을 얻는다.

$$\mathrm{A}: \quad \mathrm{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathrm{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathrm{A}^2 \longrightarrow \cdots\cdots$$
$$\longrightarrow \mathrm{A}^n \xrightarrow{d^n} \mathrm{A}^{n+1} \longrightarrow \cdots\cdots$$

이 때 $\mathrm{Ker}\, d^n/\mathrm{Im}\, d^{n-1} = \mathrm{Z}^n(\mathrm{A})/\mathrm{B}^n(\mathrm{A}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{A})$ 와 같이 쓰며, 이것을 A의 n次 Homology 群이라고 한다. 여기서 $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \Sigma \mathrm{Z}^n(\mathrm{A})$ (直合), $\mathrm{B}(\mathrm{A}) = \Sigma \mathrm{B}^n(\mathrm{A})$ (直合) 및 $\mathrm{H}(\mathrm{A}) = \Sigma \mathrm{H}^n(\mathrm{A})$ (直合) 等은 A의 同次部分加群이 된다.

Λ-複體 $\mathrm{A} = \Sigma \mathrm{A}^n$(直合), $\mathrm{B} = \Sigma \mathrm{B}^n$(直合)의 微分作用素을 모두 d로 表示하면, A에서 B에의 0次 Λ-寫像 f가 $df = fd$ (가령, $d^n f^n = f^{n+1} d^n$)이면 複體寫像이라 한다. 여기서

$$f(\mathrm{Ker}\, d^n = \mathrm{Z}^n(\mathrm{A})) \subset \mathrm{Ker}\, d^n = \mathrm{Z}^n(\mathrm{B}),$$
$$f(\mathrm{Im}\, d^{n-1} = \mathrm{B}^n(\mathrm{A})) \subset \mathrm{Im}\, d^{n-1} = \mathrm{B}^n(\mathrm{B})$$

가 成立하므로 다음의 可換圖을 얻는다.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Z}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}(\mathrm{A}) \\ f\big\downarrow & & \big\downarrow f^* \\ \mathrm{Z}(\mathrm{B}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{H}(\mathrm{B}) \end{array}$$

φ, ψ: 自然的寫像

f^*: f의 homology 寫像

위의 경우 f_1, f_2가 $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$의 두개의 複體寫像일 때 A에서 B에의 -1次 Λ-寫像 s가 있어 $ds + sd = f_1 - f_2$이면 $f_1^* = f_2^*$가 成立됨이 證明된다. 이 때 f_1, f_2는 homotopic이고, s는 f_1, f_2의 homotopy이다. 그리고 任意의 Λ-加群 A의 射影 및 單射分解는 A의 Λ-複體이며 同型寫像 $\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 때문에 A의 여러 개 存在할 수 있는 射影 및 單射分解는 同型의 見地에서 보면 各各 唯一的임이 證明된다.

定理 5. Λ-複體 3項完全系列 $\mathrm{L} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{M} \xrightarrow{\psi} \mathrm{N}$ 에 對하여 다음의 homology 群으로 된 無限完全系列을 얻는다.

$$\cdots\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{N}) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{H}^n(\mathrm{L}) \xrightarrow{\varphi^{*n}} \mathrm{H}^n(\mathrm{M})$$
$$\xrightarrow{\psi^{*n}} \mathrm{H}^n(\mathrm{N}) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{L}) \longrightarrow \cdots\cdots$$

(여기에서 δ^n 등은 連續寫像이다)

4. Category 와 Functor

位相空間과 連續寫像, 群과 群準同型寫像 등을 同時에 생각할 때 Category의 槪念에 到達한다.

定義 1. 元 γ들의 集合 $\mathscr{C}$는 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}$에 對하여 $\gamma_2 \cdot \gamma_2$가 $\in \mathscr{C}$ 되게 定義되어지면 乘法系라 하고 $\mathscr{C} \ni \varepsilon$일 때 $\gamma_2 \cdot \varepsilon = \gamma_2$, $\varepsilon \gamma_1 = \gamma_1$을 滿足하면 ε을 恒等元이라 부른다. 乘法系 $\mathscr{C}$가 다음을 滿足하면 抽象 Category라 한다.

(i) $\mathscr{C} \ni \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$에 對하여 $\gamma_3(\gamma_2\gamma_1)$은 $(\gamma_3\gamma_2)\gamma_1$이 定義되어질 때만 定義되고, 이것을 $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$로 表示한다.

(ii) $\gamma_3\gamma_2\gamma_1$은 $\gamma_3\gamma_2$ 및 $\gamma_2\gamma_1$이 同時에 定義되여질 때 定義된다.

(iii) $\gamma \ni \mathscr{C}$인 γ에 對하여 $\gamma\varepsilon_1, \varepsilon_2\gamma$인 恒等元 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$이 存在한다. (이 경우 恒等元 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$는 唯一的이다) ($\mathscr{C}$의 元들은 寫像이다)

定義 2. Category $\mathscr{C}$는 Object c들과, 寫像 γ들의 集合으로 形成된다. 이때 $\{\gamma\}$는 抽象 Category를 이루며, Object의 集合 $\{c\}$는 이 抽象 Category의 恒等元으로 된 部分集合과 1對1의 對應을 한다. (곧 Object c에는 恒等元 i_c가 唯一的으로 對應하며 이 逆도 眞이다). 따라서 γ에는 $\gamma i_{c_1}, i_{c_2}\gamma$인 c_1, c_2가 唯一的으로 對應하며, 이 경우 c_1, c_2를 γ의 變域 및 値域이라고 부른다.

Λ-複合體로부터 Homology 群을 誘導한 H와 같이 Category 사이의 寫像인 Functor를 定義함은 퍽 自然的이다.

定義 3. $\mathscr{C}, \mathscr{D}$를 Category라 하자. 다음 條件을 滿足한 T를 $\mathscr{C}$에서 $\mathscr{D}$에의 共變 Functor라 말한다.

(i) $\mathscr{C} \ni c, f \Longrightarrow \mathrm{T}(c), \mathrm{T}(f) \in \mathscr{D}$

(ii) c_1, c_2가 f의 變域과 値域이면 $\mathrm{T}(c_1), \mathrm{T}(c_2)$는 $\mathrm{T}(f)$의 變域과 値域이다.

(iii) f가 $\mathscr{C}$의 恒等元이면 $\mathrm{T}(f)$도 $\mathscr{D}$의 恒等元이다.

(iv) $f, g \in \mathscr{C}$, $gf \in \mathscr{C} \Longrightarrow \mathrm{T}(gf) = \mathrm{T}(g)\mathrm{T}(f) \in \mathscr{D}$

萬若 (ii), (iv)에 다음의 (ii)′, (iv)′이 代置되면 T는 反變 Functor라 한다.

(ii)′, c_1, c_2가 f의 變域 및 値域이면 $\mathrm{T}(c_2)$, $\mathrm{T}(c_1)$은 $\mathrm{T}(f)$의 變域과 値域이다.

(iv)′ $\mathrm{T}(gf) = \mathrm{T}(f)\mathrm{T}(g)$

가령 Λ-複體의 A의 Homology 群 H(A)의 H는 共變 Functor이다. 그러나, Category $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$를 變域, Category $\mathscr{D}$를 値域으로 갖는 Functor가 있

다. 이 Functor T 는 f_1, $c_1\in\mathscr{C}_1$; f_2, $c_2\in\mathscr{C}_2$ 에 對하여 $T(c_1, c_2)\in\mathscr{D}$, $T(f_1, f_2)\in\mathscr{D}$ 가 成立한다. 이와 같이 두 개의 變數를 갖는 Functor 에는 여러 가지 種類가 있으나, 두 變數에 對하여 모두 共變인 것과 一變數에서는 共變, 他에는 反變인 두 가지가 Homology 代數에서는 重要한 役割을 한다. 이들의 例를 다음에 들어보기로 한다.

例 1. B는 右側 Λ-加群, C는 左側 Λ-加群인 경우 $B\ni b$, $C\ni c$ 에 對하여 組(b, c)를 基로 갖는 Z-自由加群 Z(B, C)를 만들고, 다음을 滿足하는 元들로 된 가장 작은 Z(B, C)의 部分加群을 Y(B, C)라 하자. 단 $b, b_1, b_2\in B$; $c, c_1, c_2\in C$; $\lambda\in\Lambda$ 이다.

(i) $(b_1+b_2, c)-(b_1, c)-(b_2, c)$

(ii) $(b, c_1+c_2)-(b, c_1)-(b, c_2)$

(iii) $(b\lambda, c)-(b, \lambda c)$

여기서 $Z(B, C)/Y(B, C)=B\otimes_\Lambda C$ 를 定義하면 $B\otimes_\Lambda C$ 는 Z-加群이며, 이것을 Λ 上에서의 B, C의 Tensor 積이라 일컫는다. $b\otimes c$ 를 $(b, c)\in Z(B, C)$ 의 自然的寫像에 의한 像, 즉 $B\otimes_\Lambda C$ 의 元이라 하면,

$$(b_1+b_2)\otimes c=b_1\otimes c+b_2\otimes c,$$
$$b\otimes(c_1+c_2)=b\otimes c_1+b\otimes c_2,\quad b\lambda\otimes c=b\otimes\lambda c$$

等이 成立한다.

Tensor 積 $\otimes_\Lambda$는 두 變數에 관하여 모두 共變인 Functor 이다. B, B′ 은 右側 Λ-加群, C, C′ 는 左側 Λ-加群이면, $f, f_1, f_2 : B\to B'$; $g, g_1, g_2 : C\to C'$ 인 Λ-寫像에 對하여 $f\otimes g : B\otimes_\Lambda C\to B'\otimes_\Lambda C'$ 를 $(f\otimes g)(b\otimes c)=f(b)\otimes g(c)$ $(b\in B,\ c\in C)$ 되게 定義하면

$$f\otimes(g_1+g_2)=f\otimes g_1+f\otimes g_2,$$
$$(f_1+f_2)\otimes g=f_1\otimes g+f_2\otimes g$$

가 成立한다. 故로 $\otimes_\Lambda$는 加法的 Functor 이다(위 式이 成立되는 Functor 를 加法的이라 하며, f_1+f_2 는 $B\ni b$ 에 對하여 $(f_1+f_2)(b)=f_1(b)+f_2(b)$을 뜻한다. 以下 모두 이런 뜻으로 使用된다. 그리고 B″, C″ 가 各各 右側 및 左側 Λ-加群이고, $f' : B'\to B''$, $g' : C'\to C''$ 이면, 또 다음이 成立된다.

$$(f'\otimes g')(f\otimes g)=f'f\otimes g'g$$

定理 6. 右側 Λ-加群 B′, B, B″ 에 對하여 $B'\overset{f}{\rightarrowtail}B\overset{g}{\twoheadrightarrow}B''$ 이고 C가 左側 Λ-加群이면 다음의 完全系列을 갖는다. 단 i_C 는 $C\to C$ 의 恒等寫像이다.

$$B'\otimes_\Lambda C\xrightarrow{f\otimes i_c}B\otimes_\Lambda C\xrightarrow{g\otimes i_C}B''\otimes_\Lambda C\longrightarrow 0\ \text{(exact)}$$

이 性質을 右完全이라 하며, B들 또는 C가 射影加群이거나, 위 3項完全系列이 分解되면 $B'\otimes C\rightarrowtail B\otimes_\Lambda C\longrightarrow B''\otimes_\Lambda C$ 인 것이다.

例 2. B, C가 모두 右側 또는 左側 Λ-加群일 때 $B\to C$ 인 모든 Λ-寫像의 集合을 $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$로 表示하면 寫像의 一般的 加法에 의하여 이것은 Z-加群이다. $f : B'\to B$, $g : C\to C'$ 가 Λ-寫像, $\phi\in\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$에 對하여 $g\phi f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(B', C')$ 이므로 $\mathrm{Hom}(f, g)\phi=g\phi f$ 되게 定義하면 $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$는 B에 關하여 反變, C에 關하여 共變인 Functor 이다. (勿論, $\mathrm{Hom}(f, g) : \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(B', C')$). 그리고 이것은 加法的 Functor 이다. 왜냐하면, $f, f_1, f_2\in\mathrm{Hom}_\Lambda(B', B)$; $g, g_1, g_2\in\mathrm{Hom}_\Lambda(C, C')$; Λ-寫像, $f' : B''\to B'$, $g' : C'\to C''$ 에 對하여 다음이 成立되기 때문이다.

$$\mathrm{Hom}(f_1+f_2, g)=\mathrm{Hom}(f_1, g)+\mathrm{Hom}(f_2, g)$$
$$\mathrm{Hom}(f, g_1+g_2)=\mathrm{Hom}(f, g_1)+\mathrm{Hom}(f, g_2)$$
$$\mathrm{Hom}(ff', g'g)=\mathrm{Hom}(f', g')\cdot\mathrm{Hom}(f, g)$$

定理 7. (右側) Λ-加群 B′, B, B″ 및 C 그리고 $B'\overset{f}{\rightarrowtail}B\overset{g}{\twoheadrightarrow}B''$ 에 對하여 다음의 完全系列을 얻는다. 단 i_c는 C의 恒等寫像이다.

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(B'', C)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(g, i_c)}\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(f, i_c)}\mathrm{Hom}_\Lambda(B', C)\ \text{(exact)}$$

이 性質을 左完全이라 부르며, B들이 射影加群, C가 單射加群 또는 3項 完全系列이 分解이면 $\mathrm{Hom}_\Lambda(B'', C)\rightarrowtail\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Lambda(B', C)$ 이다.

例 3. 右側 Λ-加群 A, 左側 Λ-加群 B의 射影分解를 各各 :

$$\cdots\cdots\longrightarrow A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\longrightarrow A_1\xrightarrow{d_1}A_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0\ \text{(exact)}$$
$$\cdots\cdots\longrightarrow B_n\xrightarrow{d^{\prime}}B_{n-1}\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\longrightarrow B_1\xrightarrow{d_1'}B_0\xrightarrow{\varepsilon'}B\longrightarrow 0\ \text{(exact)}.$$

여기서 Z-加群

$$T_n(A, B)=\Sigma(A_l\otimes_\Lambda B_m)\quad(\text{단 } n=l+m)$$

를 定義하면 다음의 Z-複體를 얻는다.

$$\cdots\cdots\longrightarrow T_n(A,B)\xrightarrow{d\otimes d'}T_{n-1}(A,B)\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\longrightarrow T_1(A,B)\longrightarrow T_0(A,B)\longrightarrow 0$$

이 複體의 Homology 群 假令 n 次 Homology 群을 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A, B)$로 表示하면 Tor^{Λ} 는 Functor 인바, 이것을 Torsion functor 라고 부른다. (그實 derived functor 의 하나다) 이것에 關하여 다음 定理가 成立한다.

定理 8. A', A, A'' 는 右側 Λ-加群, B는 左側 Λ-加群, $A'\rightarrowtail A\longrightarrow A''$ 에 對하여, 이들의 射影分解로 만들어진 Torsion functor Tor^{Λ} 들은 다음의 完全系列을 만든다.

$$\cdots\cdots\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A',B)\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A,B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_n(A'',B)\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n-1}(A',B)\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_1(A'',B)\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A',B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A'',B)\longrightarrow 0\ \text{(exact)}$$

그러나 $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A',B)\cong A'\otimes_\Lambda B$, $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A,B)\cong A\otimes_\Lambda B$, $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_0(A'',B)\cong A''\otimes_\Lambda B$ 이므로 위 系列의 끝 部分은 다음으로 代置하여도 좋다.

$$\longrightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}_1(A'',B)\longrightarrow A'\otimes_\Lambda B\longrightarrow A\otimes_\Lambda B$$
$$\longrightarrow A''\otimes_\Lambda B\longrightarrow 0\ \text{(exact)}$$

例 4. (右側) Λ-加群 Λ, B 의 射影및 單射分解를 各各:

$$\cdots\cdots\longrightarrow A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\longrightarrow A_1\xrightarrow{d_1}A_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0\ \text{(exact)}$$
$$0\longrightarrow B\xrightarrow{\varepsilon'}B^0\xrightarrow{d'^1}B^1\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\longrightarrow B^n\xrightarrow{d'^n}B^{n+1}\cdots\cdots\ \text{(exact)}$$

여기서 Z-加群

$$T^n(A,B)=\Sigma\mathrm{Hom}_\Lambda(A_l,B^m)\quad(\text{단 } l+m=n)$$

를 定義하면 다음의 Z-複體를 얻는다.

$$0\longrightarrow T^0(A,B)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(d,d')}T^1(A,B)$$
$$\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow T^n(A,B)\longrightarrow\cdots\cdots$$

이것의 Homology 群 가령 n 次 Homology 群을 $\mathrm{Ext}_\Lambda(A,B)$로 表示하면 Ext_Λ 는 Functor 인바, 이것은 Extension functor (Derived functor 의 一種) 라 부른다.

定理 9. (右側) Λ-加群 A', A, A'' 및 B, $A'\rightarrowtail A\longrightarrow A''$ 에 對하여 A 들의 射影分解, B 의 單射分解로 만들어진 Funct or Ext_Λ는 다음의 完全系列을 만든다.

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A'',B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^0_\Lambda(A,B)$$
$$\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A',B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A'',B)\longrightarrow\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_\Lambda(A',B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A'',B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)\longrightarrow\cdots\cdots\ \text{(exact)}$$

그러나 $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A'',B)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(A'',B)$, $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A,B)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$, $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A',B)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(A'B)$이기 때문에의 系列의 첫 部分을 다음것으로 代置하여도 좋을 것이다.

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A'',B)\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A',B)\longrightarrow \mathrm{Et}^1_\Lambda(A'',B)\longrightarrow\cdots\cdots$$

5. 結 言

以上의 諸概念을 土臺로 하여 Homology 代數는 더욱 發展한다. 가령 有限群, Associative Algebra, Supplement Algebra 및 Lie Algebra 等에 適切한 係數環을 定義하여 複體를 만들고 그 Homology 群인 Tor^{Λ}, Ext_Λ를 만들어 그들의 Homology 및 Cohomology 論을 建立하여 이들 代數系를 綜合的으로 特徵지우려 한다. 여기서 가령 群의 2次 Cohomology 群 Ext^2_G과 그 擴大論이 連結되여 群擴大論을 그 Comology 論으로 解決토록 努力도 한다. 더 나아가 이들은 類體論에 깊이 파고 들어, 그것의 理論을 再編成하기도 한다. 그리고 Homology 는 自身의 理論發展을 돕기 위하여 새로운 理論 곧 Spectral Sequence 論等을 찾아 내기도 한다. 뿐만 아니라, 射影, 單射的次元等은 加群 및 環등의 一面을 特徵지우려 한다. 이토록 幅 넓은 Homology 代數의 全面에 걸친 解說에 있어서 오직 筆者의 力不及을 한탄할 따름이다.

數學의 各分野가 그러하듯 Homology 代數도 그 基本概念이 內包하고 있는 性質을 찾는 途中 以外의 것을 發見하여 새로운 分野를 建設하기도 한다. 그 하나의 例가 Category 論이라 하겠다.

Category 論은 發展하며 數學的 集合과, 그들 사이의 寫像을 同時에 考發하는 數學의 分野는 結局 Abelian Category 論임을 證明한다. (1960年, Freyd 및 Mitchell) 이러한 Abelian Category 는 그 定義에 複雜性을 갖고 있으며, 代表的으로 볼 때, Freyd 와 Machane 의 그것에도 多少의 差異가 있

(p. 21로 계속)

diction. Hence X is paracompact.

Corollary. Lemma 1 and Lemma 2 are sufficient as well as necessary for paracompactness respectively.

Proof. Paracompact space $\Longrightarrow$ Lemma 1. $\Longrightarrow$ Lemma 2 $\Longrightarrow$ Theorem 1 $\Longrightarrow$ Paracompact space.

References

Bourbaki, N.:

[1] *Topologie genèrale.* Actualités Sci. Ind. Paris, Chap. 1, 2, 1951.

[2] *Topologie genèrale.* Actualités Sci., Ind., Paris., Chap. 1.2. 1961.

Corson. H. H.:

[1] *The definition of paracompactness by uniformities*, Amer, J. Math., 80(1958) : 185—190.

Dieudonné. J.:

[1] *Une généralization des espaces compacts.* J. Math. Pures Appl, 23(1944), 65—76.

Kelley, J. L.:

[1] *General topology*, D. Van Nostrand Comp. Inc. New York, 1955.

Michael, E.:

[1] *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 831—838.

[2] *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), 822—828.

[3] *Yet another note on paracompact spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 309—314.

Stone, A. H.:

[1] *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948), 977—982

(Sogang College)

<p.31에서 계속>

다. 筆者는 Universal product를 새로 導入하여 "A Note on Abelian Categories"에서 Abelian Category의 定義를 比較的 綜合的으로 定義하여 보았다.

무딘 붓을 놓으면서, Homology 代數에 趣味를 가지고 더욱 工夫하려는 讀者를 위하여 參考書籍을 들어 둔다.

參考書籍

1. 彌永, 小平 : 現代數學槪說 I, 第5, 6, 9章, 1960.
2. Eilenberg, Steenrod : *Foundations of Algebraic Topology*, 1952.
3. Hilton, Wylie : *Homology Theory*, 1960.
4. Northcott : *An Introduction to Homological Algebra*, 1950
5. Cartan, Eilenberg : *Homological Algebra*, 1955.
9. MacLane : *Homology*, 1963

<漢陽大學校>