Vol. 3, No. 1, 1966. 10

◇解　說◇

노름空間에서의 微分에 관하여

宋　基　善

1. 緖　論

初等微積分學에서 우리가 먼저 다루게 되는 것은 函數 $y=f(x)$ 를 주었을 때, 한 점 x_0 에서의 f 의 微係數를 구하는 問題이다. 이것은 微係數를 구하는 定義過程을 따라서

(1) 獨立變數 x 의 Δx 만큼의 變化에 따른

(2) 函數 y 의 變量을 Δy 로 表示하였을 때

(3) 만일 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

의 極限値가 存在하면 우리는 函數 f 는 點 x_0 에서 微分可能이라 하였고, 그 極限値를 $f'(x_0)$로 표시하였다. 그리고 $f'(x_0)$의 幾何學的 뜻도 우리가 잘 아는 바이다. 즉, 曲線

$$y=f(x) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

위의 點 $P(x_0, f(x_0))$에서 그 곡선에 그은 接線의 기울기가 곧 $f'(x_0)$로 표시되므로 點 $P(x_0, f(x_0))$에서 그 曲線에 그은 接線의 方程式은

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

따라서 同一한 x 좌표에 대한 곡선 위의 點의 y 좌표와 接線上의 y 좌표와의 差는

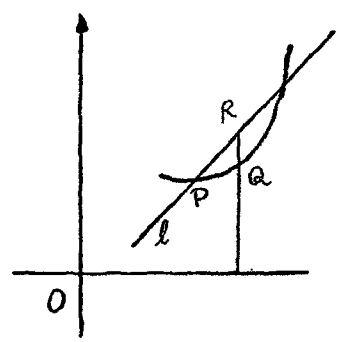
$$F(x)\equiv f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \quad\cdots (3)$$

이다.

그러면 곡선 (1) 위의 한 점 $P(x_0, f(x_0))$에서 곡선 (1)에 대한 接線이란 도대체 무엇인가? 우리가 直觀的으로는 "곡선 위의 또 한 점 $Q(x, f(x))$를 잡아 割線 PQ를 생각하고, 점 Q가 곡선을 따라 點 P에 接近하였을 때의 極限의 경우가 곧 點 P에서의 接線이다"고 說明하고, 또한 이 程度의 說明으로 初等微積分을 배우는 거의 모든 大學新入生들도 何等의 疑心을 품을 餘地가 없는 것으로 받아들인다. 지금 우리는 위와 같은 直觀的인 方法을 떠나서 解析的인 見地에서 이 問題를 다루어 보기로 한다. 곡선 (1)위의 한 점에서 곡선에 대한 接線을 다음과 같이 定義하여 보자. 즉

定義 1. 點 $P(x_0, f(x_0))$를 지나는 直線(一次方程式) 가운데 點 P 근방에서는 곡선 $y=f(x)$ 에 가장 가까운 직선.

이 定義가 우리의 直觀과 一致함은 讀者가 그림을 그려보면 곧 首肯이 갈 것이나, 위의 定義中에서 아직 그 뜻이 分明하여지지 아니한 부분은 어떠한 直線이 點 P 근방에서 준 直線에 가장 가까운 것이겠느냐 하는 點이다.



이것은 곧 다음과 같이 解明된다. 즉 x 의 값이 x_0 에 가까울 때 x 에 대한 곡선 위의 點 Q 와 x 에 대한 直線 l(點 P를 지나는) 위의 點 R 와의 사이의 거리 $\overline{QR}$ 이 $|x-x_0|$에 比하여 大端히 작다. 다시 말하여 $\overline{QR}=o(|x-x_0|)$ 되는 直線이 곧 點 P 에서의 接線이다. 다시 바꾸어 말하면

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{QR}}{|x-x_0|}=0$$

되는 直線 l 이 點 P 에서의 接線이 된다.

例컨대 $\quad y=x^3+2x^2+x-1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

의 점 $(0, -1)$ 에서의 接線은 준 函數의 一次項까지만 택하여

$$y=x-1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

이 될 것이다. 왜냐 하면 同一한 x좌표에 대한 곡선 (3)과 直線 (4) 위의 點의 좌표의 差는 x^3+2x^2이나 x가 0에 가까우면 x^3+2x^2은 x에 比하여 高次의 無限小가 되기 때문이다.

讀者諸位는 위에서 말한 定義에 따르면 果然 우리가 接線의 方程式을 얻음을 確認하여 보시기를 바란다.

以上을 綜合하여 우리는 다음과 같이 말할 수 있겠다.

函數 $y=f(x)$에 대하여 적당한 常數 a가 存在하되 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)|}{|x-x_0|}=0$ ……(5)

이 成立하면 우리는 $a=f'(x_0)$로 나타내고, 이것을 f의 x_0에서의 微係數, 그리고 이 때 f는 x_0에서 미분가능이라 한다. ($f(x_0)+a(x-x_0)$는 點 P(x_0, $f(x_0)$)를 지나고 기울기 a인 直線上의 x에 대한 y좌표임에 留意하라.)

2. 노름空間에 있어서의 第一次 微分

微分法의 槪念을 一般空間으로 擴張하는 데 우리의 出發點은 앞에서 본 等式 (5)이다. 이 等式 (5)를 念頭에 두면 다음의 擴張이 自然的인 것으로 생각될 것이다.

지금 E와 F를 두개의 노름공간이라고 하고, $\mathscr{L}$(E, F)로 E위에서 F로 가는 모든 連續 線變(線形變換)을 나타내기로 한다. 開集合 V⊂CE 위에서 定義되고 F로 가는 連續函數 f가 한 점 x_0에서 微分可能이라 하는 것을 다음 같이 定義한다.

$$\exists u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\ni\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-u(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

여기서 式 (5)와 式 (6)의 놀랄만한 類似에 着眼하여야 할 것이나 (5)에서는 $a\in\mathscr{L}(\mathrm{R},\mathrm{R})$, (實數 R에서 實數 R로 가는 連續線變 즉, $x\to ax$)이었으나 (6)에서는 $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$로 바뀌고 (5)에서 實數의 絶對値이었던 것이 (6)에서는 各各 空間 E, F에서의 노름으로 바뀌었을 뿐이다.

定理 1. 函數 f에 대한 假定이 위와 같을 때 f가 x_0에서 微分可能이면 (6)을 만족시키는 $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$는 一意的으로 決定된다.

證明. 지금 $u, v\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$가 同時에 (6)을 만족시킨다고 하고 $\mathrm{T}=u-v$로 놓으면 $\mathrm{T}\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$이고 우리가 밝혀야 할 것은 T=0이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(x-x_0)&=(u-v)(x-x_0)=u(x-x_0)-v(x-x_0)\\&=[f(x)-f(x_0)-v(x-x_0)]\\&\quad-[f(x)-f(x_0)-u(x-x)]\end{aligned}$$ 이므로

$$0\le\lim_{x\to x_0}\frac{\|\mathrm{T}(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\le\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-v(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}+\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-u(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\|\mathrm{T}(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$ 이므로 $y=x-x_0$로 놓아

$$\lim_{y\to 0}\frac{\|\mathrm{T}y\|}{\|y\|}=0$$

그러므로 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\gamma>0$이 존재하되

$$0<\|y\|\le\gamma\ \to\ \frac{\|\mathrm{T}y\|}{\|y\|}\le\varepsilon$$

따라서 $x\neq 0$에 대하여

$y=\dfrac{\gamma}{\|x\|}x$로 놓으면 $\|y\|=\gamma$ 이므로

$$\frac{\|\mathrm{T}y\|}{\|y\|}\le\varepsilon,\quad \frac{\frac{\gamma}{\|x\|}\|\mathrm{T}x\|}{\gamma}\le\varepsilon$$

즉 $$\frac{\|\mathrm{T}x\|}{\|x\|}\le\varepsilon$$

따라서 $\displaystyle\|\mathrm{T}\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|\mathrm{T}x\|}{\|x\|}\le\varepsilon$

$\varepsilon>0$은 임의이었으므로 T=0, 이것은 곧 우리가 到達하려고 하였던 것이다.

定義 2. E, F를 두 노름空間, U⊂E를 開集合이라 할 때 U위에서 定義되고 F로 가는 연속函數 f에 대하여 한 점 $x_0\in$U에서 (6)을 만족시키는 $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$가 존재하면 이 u를 f의 x_0에서의 一次微分이라 하고, 이것을 기호 $f'(x_0)$ 또는 $\mathrm{D}f(x_0)$로 표시하고 그 한 점 $y\in$E에서의 (F 안에서의) 값 $u(y)$를 $f'(x_0)\cdot y$, $f'(x_0;y)$, $\mathrm{D}f(x_0)\cdot y$ 등으로 나타낸다.

定義 3. f가 U의 各點 x에서 一次可微(微分可能)일 때 f는 U위에서 一次可微라 한다. 이 때 $x\in$U에 대하여 f의 x에서의 一次微分 $\mathrm{D}f(x)\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$을 다응시키는 函數 즉 $x\in\mathrm{U}\to\mathrm{D}f(x)\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$를 $\mathrm{D}f$로 나타내고 만일 $\mathrm{D}f$가 U위에서 연속 ($\mathscr{L}$(E, F)도 노름空間임에 주의)일 때 f는 U 위에서 連續的으로 一次可微라 한다.

f 가 U 위에서 連續的으로 一次可微이면 函數

$$Df : U \to \mathscr{L}(E,\ F)$$

에 대하여 위에서 f 에 대한 論法을 反復할 수 있는 것이므로 우리는 Df 의 一次微分을 생각할 수 있고 이 때 이것을 f 의 二次微分이라 하고, 따라서 기호 $D^2f(x_0)$, D^2f 등의 뜻도 짐작이 갈 것이다. 다만 D^2f 는 $U \to \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, F))$ 로 가는 函數가 된다.

3. 微分法의 諸公式

위에서 定義한 一般函數의 微分法에 대하여 우리는 初等微分學에서 이미 成立하는 諸公式이 果然 어느 程度로 擴張이 되겠는가? 本是 위의 定義가 初等微分 等의 概念의 一般空間에로의 擴張이었으므로 大部分의 基本定理가 그대로 擴張될 것이 期待된다. 사실 다음에 列擧하는 公式들이 成立한다.

定理 1. E, F 를 두 노름空間, U⊂E 를 開集合 $f : U \to F$ 를 상수함수라 하면 $Df = 0$

證明. 自明

定理 2. E, F 를 두 노름空間, $T \in \mathscr{L}(E, F)$ 라 하면 T 는 一次可微이고 $DT(x) = T \quad (x \in E)$

證明. 임의의 한 점 $x_0 \in E$ 를 택하면

$T(x) = T(x_0) + T(x - x_0)$

에서 곧 $DT(x_0) = T$ 임을 알 수 있다.

定理 3. f 와 g 가 點 $x_0 \in U$ 에서 可微이면 $f+g$ 도 x_0 에서 可微이고 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ 도 λ 가 스칼라일 때 λf 도 x_0 에서 可微이고 $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$. 따라서 x_0 에서 可微인 모든 函數들의 集合은 벡터空間을 이룬다.

定理 4. (微分의 連鎖律) E, F, G 를 세 노름空間, U⊂E, V⊂F 를 開集合, $f : U \to F$, $g : V \to G$ 를 연속함수, $f(U) \subset V$ 이라 하고 f 는 $x_0 \in U$ 에서 一次可微, g 는 $y_0 = f(x_0)$ 에서 一次可微이면 그 合成函數 $h = g \circ f$ 는 x_0 에서 一次可微이고 $h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$

이 證明은 省略하나 $f'(x_0) \in \mathscr{L}(E, F)$, $g'(y_0) \in \mathscr{L}(F, G)$, $h'(x_0) \in \mathscr{L}(E, G)$ 임에 주의하여 讀者께서 試圖해 보시기를 바란다.

다음에 微分學에서 가장 重要한 定理의 하나인 平均値定理에 대하여 보면, 이 때는 等號 대신에 一般으로 不等號가 성립한다.

定理 5. (平均値定理) E, F 를 노름空間, U⊂E 를 開集合이라 하고 $f : U \to F$ 가 U 위에서 一次可微라 하자. 만일 x_0, $y_0 \in U$ 이고 閉線分 $[x_0, y_0] = \{tx_0 + (1-t)y_0 : t \in [0, 1]\} \subset U$ 이면

$$\| f(y_0) - f(x_0) \| \leq \| y_0 - x_0 \| \sup_{x \in [x_0,\ y_0]} \| Df(x) \|$$

證明 : $x_0 = y_0$ 이거나 또는 $\sup \| Df(x) \| = \infty$ 이면 위의 不等式은 $x \in [x_0,\ y_0]$ 自動的으로 成立하므로, 우리는

$$x_0 \neq y_0 \text{ 이고 } \quad M = \sup_{x \in [x_0,\ y_0]} \| Df(x) \| < \infty$$

인 假定 밑에 증명한다.

지금 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여

$X = \{x \in [x_0,\ y_0] : \| f(t) - f(x_0) \| \leq (M + \varepsilon) \| t - x_0 \|,$ $(t \in [x_0,\ x])\}$ 로 定義하면 위선 $x_0 \in X$ 임은 分明하고 또 만일 $x \in X$ 이면 $[x_0, x] \subset X$ 이다. 지금 實數 R 에서 두 점 x_0 와 y_0 를 맺는 直線上의 點으로 가는 1−1 대응 $\lambda \to x_0 + \lambda(y_0 - x_0)$ 를 생각하면 $\lambda = 0$ 에 대하여는 $x_0 \in X$ 이고 위에서 본 $x \in X$ 이면 $[x_0,\ x] \subset X$ 의 관계에 의하여 만일 λ_0 에 대하여 $x_0 + \lambda_0 (y_0 - x_0) \in X$ 이면 $[x_0,\ x_0 + \lambda_0 (y_0 - x_0)] \subset X$ 이다. 따라서 지금

$$\Lambda \equiv \{\lambda \in [0,\ 1] : x_0 + \lambda(y_0 - x_0) \in X\}$$

로 놓으면 $0 \in \Lambda$ 이고, 또 $0 < \lambda \in \Lambda$ 이면 $[0,\ \lambda] \subset \Lambda$ 이다. 지금 $\mu = \sup \Lambda$ 라 하면 $\mu = 1$ 임을 말할 수 있으면 定理의 증명은 끝난다. 만일 $\mu < 1$ 이라 하고 μ 에 대한 線分 $[x_0,\ y_0]$ 위의 점을 z_0, 즉

$$z_0 = x_0 + \mu(y_0 - x_0)$$

라 하면 f 는 z_0 에서 一次可微이므로 처음에 준 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\delta > 0$ 가 존재하되

$\{z \in E : \| z - z_0 \| < \delta\} \subset U$ 이고,

$z \in U,\ \| z - z_0 \| \leq \delta \to$

$$\| f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0) \| \leq \varepsilon \| z - z_0 \|$$

이 成立할 것이나, 이는 곧

$\| z - z_0 \| \leq \delta \to \| f(z) - f(z_0) \| \leq \| Df(z_0) \| \ \| z - z_0 \| + \varepsilon \| z - z_0 \| \leq (M + \varepsilon) \| z - z_0 \|$

그런데 $z_0 \in X$ (이 증명은 간단하므로 省略)이므로 定義에 依하여

$$\| f(x_0) - f(z_0) \| \leq (M + \varepsilon) \| z_0 - x_0 \|$$

그리하여 만일 $z \in [z_0,\ y_0]$, $\| z - z_0 \| \leq \delta$ 인 z 를 택

하면

$$\|f(z)-f(x_0)\| \leq \|f(z)-f(z_0)\| + \|f(z_0)-f(x_0)\|$$
$$\leq (M+\varepsilon)\|z-z_0\| + (M+\varepsilon)\|z_0-x_0\|$$
$$=(M+\varepsilon)\|z-x_0\|$$

(x_0, z_0, y_0 가 同一직선 위에 있음에 주의).

그러므로 만일

$$z=z_0+\frac{\delta}{\|y_0-x_0\|}(y_0-x_0)=x_0+\left(\mu+\frac{\delta}{\|y_0-x_0\|}\right)$$

(y_0-x_0)이라 하면

$$\|z-z_0\|=\frac{\delta}{\|y_0-x_0\|}\|y_0-x_0\|=\delta$$

이므로 $\|f(z)-f(x_0)\| \leq (M+\varepsilon)\|z-x_0\|$ 이 되어

이는 곧 $\mu+\dfrac{\delta}{\|y_0-x_0\|}\epsilon \Lambda$, $\mu+\dfrac{\delta}{\|y_0-x_0\|}>\mu$

이므로 이것은 $\mu=\sup \Lambda$ 에 모순이다.

위의 平均值定理의 應用으로

定理 6. E와 F에 대해서는 위에서와 같다고 하고 $U\subset E$를 連結된 開集合이라 하자.

$$f: U \to F$$

가 一次可微일 때 $Df=0 \longleftrightarrow f$는 U위에서 상수.

證明: ($\leftarrow$)은 이미 밝혀진 바이고

($\rightarrow$)에 대하여:

임의의 한 점 $x_0\epsilon U$를 택하여

$$U_0 \equiv \{x\epsilon U : f(x)=f(x_0)\}$$

이라 놓을 때 $U_0=U$임을 말하면 足하다. 위선 f가 연속函數이므로 U_0는 U 안에서 閉이다. U_0가 U 안에서 開이면 U가 連結되어 있으므로 결국 $U_0=U$를 얻을 것이므로 U_0가 U 안에서 開임을 말하고자 한다.

한점 $y\epsilon U_0$를 택하면 $y\epsilon U$이고 U가 開集合이므로 $\exists\delta>0$ 하되

$$B_\delta(y)\equiv\{x\epsilon U : \|x-y\|<\delta\}\subset U$$

이고 $f(y)=f(x_0)$이다. 지금 $x\epsilon B_\delta(y)$이라 하면 $[x, y]\subset U$ 이고 따라서 平均值定理에 依하여

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\| \sup \|Df(z)\| \quad z\epsilon[x, y]$$

즉 $\|f(x)-f(x_0)\| \leq 0$

그러므로 $f(x)=f(x_0)$

따라서 $B_\delta(y)\subset U_0$ 즉 U_0는 U 안에서 開, 그리하여 위에서 말한 바에 依하여

$$U_0=U$$

4. 結 言

以上에서 簡單히 一般函數의 微分法에 대하여 概說하였으나 其外에 $\dfrac{dy}{dx}\ \dfrac{dx}{dy}=1$ 에 該當하는 定理 그리고 偏微分法의 擴張도 勿論 생각할 수 있고 Taylor 公式의 擴張도 可能하게 된다. 이와 같은 一般函數의 微分法은 Schwartz의 Distribution Theory에 應用되므로 이 方面에 더 仔細한 知識을 얻고자 하는 분은 다음의 參考圖書를 읽으시기를 권한다.

Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960

Nachbin, L., *Lectures on The Theory of Distribution*, Instituto de Fisica e Matematica, Universidade do Recife, 1964

Schwartz, L., *Théorie des distributions* I, II, Hermann, Paris, 1950-1951.