集合을 導入한 體系的 確率의 指導硏究

庾 炳 祐

I. 序 論

數學이란 古來로부터 思考를 要하는 問題에 많이 使用되어 왔다. 더욱이 時代가 變遷됨에 따라 數學은 社會 敎養面에서 보나 科學 技術面에서 보나 分離시킬 수 없는 重要한 科目으로 되어 있다.

이와 같이 數學은 漸漸 發展하여 20世紀初부터 歐美 各國에선 數學敎育 改革運動이 活潑히 進行되었다. 그중 英國의 John Perry를 始初로 美國의 E.H. Moore, 獨逸의 F. Klein, 佛蘭西의 Borel 等이 그 代表者였다.

그런데 이들 大部分의 共通된 意見은 數學을 實用 및 應用的인 面, 그리고 他敎科와의 有機的, 統一的인 關聯을 맺은 綜合的인 融合을 主張하여 學生들로 하여금 學習心理를 북돋아 주자는데 意見을 一致하였다.

이리하여 數學敎育은 차츰 孤立的이고 傳統的인 테두리를 벗어나게 되었으며, 그 後 두차례에 걸친 世界大戰을 겪고 나면서부터 數學敎育에 對한 關心은 科學技術의 急進的 發達과 더불어 基礎科學의 根本要素로서 數學이 注目을 끌게 되었고 政治 經濟等 各方面에 數理的인 處理와 數學的인 Idea가 構成되었다.

이에 따라서 數學敎育의 再構成의 必要를 切實히 느끼게 되었다. 또한 數學自體의 槪念도 從來方法과는 달리 現代的인 抽象槪念을 일찌기 導入하여 新數學體系를 確立하였던 것이다.

이와 같은 數學敎育의 現代化는 1958年 英國의 Edingburch와, 1962年 Stockhorm에서 開催된 I.C.M.I (International Commission on Mathematical Instruction)에서 더욱더 뚜렷하여 졌고, 또 이 I.C.M.I에는 世界·各國으로 부터 많은 報告書가 提出되었는데 이들 報告內容의 主張을 보면 大體로 다음과 같다.

(1) 數學은 思考의 學問인 同時에 科學의 基礎的인 學問.

(2) 集合과 公理에 對한 論理的인 取扱.

(3) 現代數學에서 必要로 하는 抽象的인 槪念等이다.

이러한 數學敎育의 現代化에 따라 美國에선 1958年 "學校數學硏究團體" SMSG (School Mathematics Study Group)가 組織되었고, 1960年에 새로운 槪念의 實驗用 敎科書가 第7學年에서 第12學年까지 出版되었고, 1962年에 다시 改定版을 내었다. 이와 같이 數學敎育이 점차 現代化됨에 따라 우리나라에서도 敎育課程을 改定하였고, 1963年 2月 28日에 公布한 새로운 敎育課程에 依하여 이미 中學校 1, 2學年에선 履行措置에 따른 新敎科書가 出版되어 各 學校에서 使用하고 있는 중이다. 그러나 高等學校 數學에서는 아직껏 改定된 敎科書가 나오지 않고 있는 實情이다.

이러한 此際에 數學敎育의 現代化에 따라 集合을 導入하여 確率을 指導하는 것이 高等學校 學生들에게 어느 程度나 理解되며, 또 어느 程度나 받아들여질 것인가 觀察해 보기 爲하여 이 問題를 硏究하게 되었다.

다음 單元 II에선 이미 紹介한 SMSG 敎科書中 Mathematics for junior high school Vol. 2. Part II의 第8章 確率을 主로 分析硏究해 봄으로써 新數學敎育의 現況과 集合을 導入한 새로운 方法으로서의 確率指導에 對한 可能性을 調査해 보고, 單元 III에서는 具體的으로 確率을 指導해 보기 爲해 測度의 槪念을 導入한 集合函數로서 確率을 展開해 나갔고, 끝으로 單元 IV에서는 集合槪念을 4時間을 通해 指導한후 單元 III에 있는 集合을 導入한 體系的인 確率內容을 11時間

에 걸처 實際授業을 한後 40分間의 Test를 實施하여 그 結果를 分析하여 보았다.

Ⅱ. 新數學敎育의 現況에 따른 確率의 分析

—SMSG 敎科書를 主로—

Mathematics for junion high school Vol. 2의 第8章 第1節 偶然의 事件(Chance events)에서 "아마 비가 올 것이다." "綠色 샤스팀이 우승기를 차지할 것이다." "주사위를 굴리어 自由로 떨어지게 한다면 表面(Head)이 나올 것이다."와 같은 몇個의 偶然의 事件을 가지고 그 事件이 일어날 "偶然의 測度"(Measure of chance)로써 確率을 定義했다. 그리고 確率을 取扱하는데 數學的인 Model을 使用했고, 確率에 있어 事件이 發生할 偶然의 測度를 나타내는데 數를 使用함이 便利하다는 생각으로 發展시켰다. 이 册 312 페이지에서는 銅錢이 表面을 나타낼 事件을 文字 "A"를 使用하면 事件 A가 일어날 確率은 $\frac{1}{2}$이며 記號로 $P(A)=\frac{1}{2}$로 나타냈다. 그밖에 事件을 集合에 關聯시켜서 確率에 對한 演算을 하는데 이章 全體를 通하여 아무런 討論도 주어져 있지 않으며, SMSG Elementary functions의 各章이나, 特히 SMSG Mathematics for junior high school Vol. 2의 第7章(p. 291)의 順列과 組合等에서 나오는 集合記號 같은 것도 取扱되어 있지 않았다. 銅錢을 던졌을 때 나오는 境遇의 數를 表로 羅列한다거나, 323페이지의 經驗的 確率(Emprical probability)에 있는 日氣豫報의 標本 Data나 第8—3節의 Dial 그림에서 事件이 發生하는 相對度數를 求하여 確率을 생각한다는 것은 그림이나 視聽覺을 通한 直觀的인 接近은 可能하나 嚴格한 集合的인 解析엔 適合치 못할 것이다. 다음에는 좀더 細部的으로 調査해 본다.

317페이지 2個의 銅錢을 던지는 試行에서 나올 수 있는 모든 可能한 境遇를 羅列하여 한 個의 表面(H)과 한個의 裏面(T)이 일어날 事件 E의 確率을 求하는데 表에서 直接 $P(E)=\frac{2}{4}$ 곧 $\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다고 했는데, 萬若 集合을 使用한다면 全體의 可能한 事件은 集合을

$$E=\{(H,H)\ (H,T)\ (T,H)\ (T,T)\}$$

로 바꾸어 놓으므로써 E의 各 元素 하나 하나의 무게를 $\frac{1}{4}$로 對應시켜 그 測度의 合을 求하여 $P(E)=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$로 됨을 알 수 있겠다.

314페이지에서 事件 E가 일어나지 않을 事件을 "E가 아니다." (not E)로 나타냈는데 여기서 "아니다"는 餘集合을 意味하며 "$\bar{E}$"에 該當한다. 따라서

$$P(E)+P(\text{not } E)=1$$

를 $$P(E)+P(\bar{E})=1$$

로 表示할 수 있다.

329페이지에서 事件 A 或은 B중 어느것이 일어나는 事件을 "A 或은 B"로 나타냈는데 여기서 "혹은" (or)는 集合記號 "∪"(Union)에 該當되며 곧 "A∪B"라고 쓸 수 있겠고, 이것을 利用하면

$$P(A \text{ 혹은 } B)=P(A)+P(B)$$

를 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

로 表示할 수 있다.

또 335페이지에서 事件 A와 B가 同時에 일어나는 事件을 "A 그리고 B"로 나타냈는데 여기서 "그리고" (and)는 集合記號 "∩"(Intersection)에 該當되며 곧 "A∩B"라고 쓸 수 있겠다. 이것을 利用하면

$$P(A \text{ 그리고 } B)=P(A)\cdot P(B)$$

를 $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

로써 表示할 수 있다.

330페이지에서 두 事件 A와 B가 絕對로 同時에 일어날 수 없을 때 서로 排反事件(Mutually exclusive event)이라고 說明했는데, 이것은 두 集合 A와 B의 共通部分이 空集合이라는 것으로 $A\cap B=\phi$와 같이 나타낼 수 있다. 이책 第8章의 確率에 對해서 敎師用指針書를 보면, 이章에선 簡單하고 初步的인 것을 取扱했기 때문에 非形式的 接近方法을 使用하여 集合概念이나 合集合이나 積集合等을 紹介하지 않았다고 했다. 그러나 萬若에 集合의 記號와 合集合, 積集合等을 잘 아는 學生에게는 形式的인 取扱을하기 爲해 敎師들은 集合的인 思考로 가르치는 것이 좋다고 했다.

이와 같이 SMSG 教科書는 하나의 實驗用教科書로서 從來方法에 基礎를 두고 集合的인 概念을 導入하여 現代數學의 抽象的인 面을 理解시킬려고 하였음에 틀림 없다.

이러한 SMSG 教科書를 몇 個들어 보면 다음과 같다.

(a) First course in algebra
(b) Elementary functions
(c) Geometry Part I. II.
(d) Mathematics for junior high school Vol. 1. Part I, II.
(e) Mathematics for junior high school Vol. 2. Part I, II.
(f) Intermedidate mathematics Part I, II.

現在 우리나라 高等學校 數學教科書의 確率部面은 앞에 紹介한 內容만으로도 充分하나 다음 單元에서는 現代化에 따른 集合을 導入한 體系的인 內容을 展開해 보겠다.

Ⅲ. 集合을 導入한 體系的 確率의 指導

§1. 事件과 標本空間

A. 事件(Events)

一般的인 보기를 들기 위해 6個의 눈이 있는 주사위를 굴리는 實驗을 생각하자. 이때 주사위의 윗面이 나타나는 數로서 1, 2, 3, 4, 5, 6 을 觀察할 수 있다.

이와 같이 偶然히 일어나는 現象을 觀察하는 實驗을 "試行"(Trial)이라 하고 每試行의 結果로 나타나는 可能한 個個의 것을 그 試行의 "根元事件"(Elementary Event)이라고 한다. 위의 주사위를 굴리는 試行에서 나타나는 根元事件은 "1의 눈" "2의 눈" "3의 눈" "4의 눈" "5의 눈" "6의 눈"과 같이 6個이다.

그리고 一般으로 어떤 試行에 對應하는 根元事件의 集合을 "事件"(Events)이라 한다. 따라서 앞의 주사위를 굴리는 試行에서 1個 或은 2個以上의 몇 個의 눈의 集合 곧 {1의 눈}, {2의 눈}, {1의 눈 或은 2의 눈}, {1의 눈 或은 2의 눈 或은 5의 눈}, 等은 하나의 事件이다.

이와 같이 생각하면 주사위를 굴릴 때 偶數(Even number)의 눈이 나오는 事件 A를 根元事件의 合으로 다음과 같이 表示할 수 있다.

A = {2의 눈 或은 4의 눈 或은 6의 눈}

또 銅錢을 던질 때 "表面이 나온다"와 같이 어떤 "事件 A가 일어난다" 함은 事件 A에 包含된 根元事件이 試行結果로 나타남을 意味한다. 이때 事件 A에 包含되는 根元事件을 事件 A에 "有利하다"(Favorable)고 하고, 事件 A에 包含되지 않은 事件을 事件 A에 "不利하다"(Unfavorable)고 한다.

보기를 들면 주사위를 굴리는 試行에서 "1의 눈"이 나오는 根元事件은 奇數의 눈이 나오는 事件에는 有利하지만 偶數의 눈이 나오는 事件에는 不利하다.

B. 標本空間(Sample space, Event space)

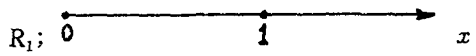
주사위를 굴리는 試行에서 나올 수 있는 모든 可能한 根元事件의 全體의 集合을 S라고 하면

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

와 같이 表示된다. 一般으로 어떤 試行에 對應하는 모든 可能한 根元事件 全體의 集合을 "空間" 或은 "標本空間"(Sample space)이라고 한다. 이때 個個의 根元事件을 하나의 點으로 생각하면 標本空間은 點集合이 된다.

다음에 標本空間의 보기를 생각해 보자.

〔보기 1〕 한 個의 銅錢을 던지는 試行은 2個의 可能한 結果 即, 表面(Head)과 裏面(Tail)으로 構成된 標本空間을 이룬다. 곧 表面을 "1", 裏面을 "0"인 數로 代置한다면 이 空間은 (그림 1)과 같은 數直線(R_1) 上의 點 $x_1=0$, $x_2=1$인 點의 集合 {0, 1}으로 表示되는 一次元 空間을 이룬다.



(그림 1)

〔보기 2〕 2個의 銅錢을 同時에 던질때 나올 수 있는 모든 根元事件은 表面을 "H" 裏面을 "T"로 表示하면,

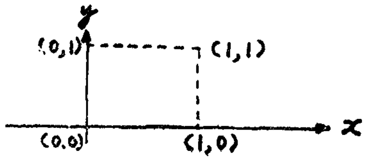
(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)

의 4個의 點의 集合으로 이루어지는 空間을 이

룬다. 萬若에 H→1, T→0으로 對應시켜 二次元의 點 (x,y)로 생각하면 4個의 點의 集合

{(1,1) (1,0) (0,1), (0,0)}

로 되는 그림 2와 같은 二次元 空間을 나타낸다.



(그림 2)

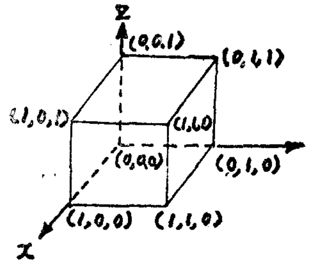
〔보기 3〕 3個의 銅錢을 던질때 나올 수 있는 모든 可能한 根元事件은

(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T),
(T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)

와 같이 8個의 點의 集合으로 되어 있는 空間을 이룬다. 위 보기 2와 마찬가지 方法으로 H→1 T→0으로 代置하여 三次元의 點 (x,y,z)로 對應시키면 모두 8個의 點의 集合

{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0),
(0,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)}

로 되는 그림 3과 같은 三次元의 空間을 나타낸다.



(그림 3)

以上에서 생각한 바와같이 여러 事件이 發生하는 根元事件을 나타내는 點全體의 集合을 標本空間이라 하고 各 根元事件은 이 空間의 點으로 나타내었다. 그리고 이러한 事件을 나타내는 空間을 생각하다보면 이 空間의 部分集合(Subset)에 關心을 기울이게 된다.

〔보기 4〕 한 個의 주사위를 굴릴때 偶數의 눈이 나오는 事件 A와 2보다 큰 눈이 나오는 事件 B를 생각해 본다. 주사위를 굴릴 때의 標本空間 S는 1次元空間

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

로 表示되고, 事件 A와 事件 B는 集合 S의 部分集合으로 各各

A={2, 4, 6}, B={3, 4, 5, 6}

과 같이 表示된다. 이러한 事件 A, B는 S의 部分集合이다. 곧 A⊂S. B⊂S.

§2. 事件과 集合演算

A. 事件과 集合

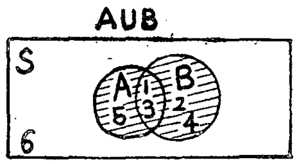
一般的인 보기를 들기 爲하여 6個의 눈이 있는 1個의 주사위를 굴리는 試行을 생각하자. 이때 空間을 S, 奇數의 눈이 나오는 事件을 A, 그리고 5보다 작은 눈이 나오는 事件을 B라고 하면 S, A 및 B는 다음과 같은 點集合으로 表示된다.

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, A={1, 3, 5}, B={1, 2, 3, 4}

實際로 中•高等學校 學生들에게 事件을 集合과 關聯시켜 指導하는데는 理論的으로 展開해 나가는 것보다는 直觀的으로 Venn diagram (或은 Euler diagram이라고도 함)을 그려서 指導하는 것이좋다. 우선 事件과 集合과의 關係부터 생각해 보겠다.

1. 合事件(Union event, Sum event)

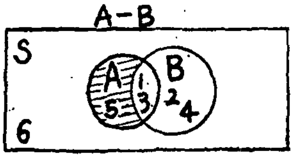
위의 보기에서 奇數의 눈 或은 5보다 작은 눈이 나오는 事件 A와 B, 둘중에 어느 것이나 일어나는 事件 곧 A, B둘중 적어도 하나는 일어나는 事件을 A와 B의 合事件이라 하고, 合集合 A∪B={1, 2, 3, 4, 5}로 表示한다. 이것을 Venn diagram을 그려보면 그림 4와 같다.



(그림 4)

2. 差事件(Difference event)

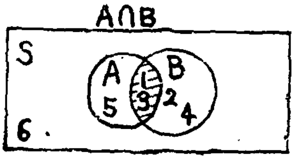
위의 보기에서 奇數의 눈으로 되어 있는 事件 A는 일어나지만 5보다 작은 눈으로 되어 있는 事件 B는 일어나지 않는다. 이러한 事件을 差事件이라 하며, 差集合 A−B={5}로써 表示한다. Venn diagram으로 表示하면 그림 5와 같다.



(그림 5)

3. 積事件(Product event)

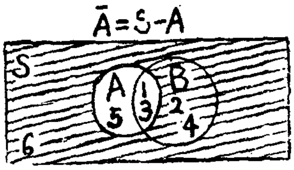
위의 보기에서 奇數의 눈인 同時에 5보다 작은 눈이 똑같이 나오는 事件은 A와 B가 同時에 같이 일어나는 事件으로 이것을 A와 B의 積事件이라 하고, 積集合 $A \cap B = \{1, 3\}$로 表示하며 그림 6과 같다.



(그림 6)

4. 餘事件(Complementary event)

위의 보기에서 偶數가 나타나는 事件은, 奇數의 事件 A가 일어나지 않는 事件으로, 이것을 事件 A의 餘事件이라 하고, 餘集合 $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$로 表示하며 그림 7과 같이 나타낼 수 있다.



(그림 7)

5. 全事件(Total event, Certain event)

한편 空間 S는 恒常 반드시 일어나는 事件으로 이를 全事件이라 하며 全空間 S로써 表示한다.

特히 全事件의 餘事件 $\bar{S}$는 絕對로 일어나지 않는 事件으로 이를 空事件(Empty event) ϕ로써 表示한다. 곧 $\bar{S} = \phi$. 이렇게 생각하면 空事件의 餘事件 $\bar{\phi}$는 全事件 S가 된다. 곧 $\bar{\phi} = S$.

B. 事件의 代數的 演算

앞에서는 事件과 集合과의 關係를 생각했는데 여기서는 이것을 基礎로 해서 事件의 基本的인 性質을 代數的 演算으로 나타내었으며 證明은 Venn diagram으로 說明했다.

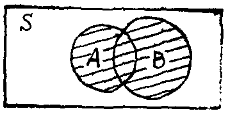
1. 交換法則(Commutative law)

(i) 덧셈의 交換法則

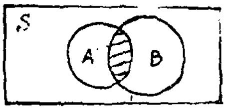
$A \cup B = B \cup A$

(ii) 곱셈의 交換法則

$A \cap B = B \cap A$



(그림 8)



(그림 9)

2. 結合法則(Associative law)

(i) 덧셈의 結合法則

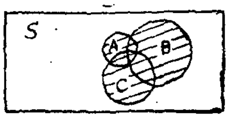
$A \cup (B \cup C)$

$= (A \cup B) \cup C$

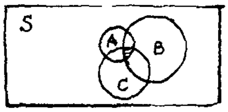
(ii) 곱셈의 結合法則

$A \cap (B \cap C)$

$= (A \cap B) \cap C$



(그림 10)



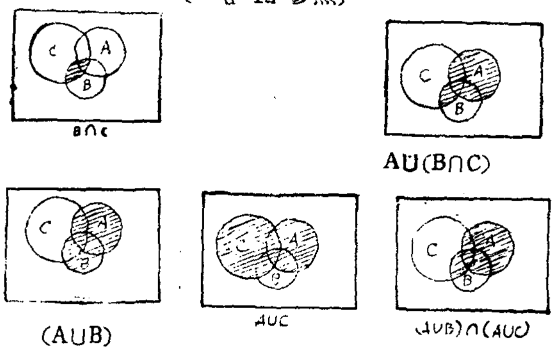
(그림 11)

3. 分配法則(Distributive law)

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(그림 12 參照)



(그림 12)

4. 論理的 眞의 法則(The law of toutology)

(i) $A \cap A = A$

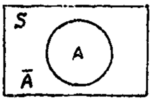
(ii) $A \cup A = A$

5. 餘集合의 法則(The law of complementary set)

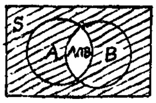
(i) $\bar{S} = \phi$, $\bar{\phi} = S$, $\bar{\bar{A}} = A$

(ii) $A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \phi$ (그림 13)

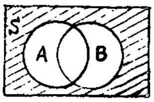
(iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (그림 14, 15)



(그림 13)



(그림 14)



(그림 15)

6. 包含關係

(i) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(ii) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

(iii) $A \subseteq B$ 이면 $A \cup B = B$ (逆도 成立)

(iv) $A \subseteq B$ 이면 $A \cap B = A$ (逆도 成立)

(v) $A \subseteq B$ 이면 $\bar{A} \supseteq \bar{B}$

以上에서 事件을 集合的으로 생각하고 그 演算과 包含關係를 說明하고 Venn diagram 을 그려서 생각해 보았는 데, 이 程度의 內容은 高等學校 學生들에게 充分히 잘 理解될 것이며 또한 興味도 있을 줄 안다.

다음 節에서 이것을 基礎로 하여 測度와 結付시켜 確率을 導入해 보고자 한다.

§3. 確率의 導入

지금까지 事件과 集合의 關係를 調査해 보았는데 나음에는 事件이 일어나는 確率에 對해서 考察하기로 한다. 그리하여 問題는 事件에 對해서 주어지는 確率을 어떻게 導入할 것인가이다. 가장 自然스러운 方法으로서 많은 實驗의 結果로서 度數分布에 對한 것을 생각하고 그 結果로써 어떤 事件이 일어나는 相對度數를 念頭에 두고 從來의 P.S. Laplace (1749~1827)나 R.V. Mises 가 定義하였던 古典的 確率과 經驗的 確率과는 달리 事件을 集合과 關聯시켜 集合函數로써 測度의 槪念을 利用하여 確率을 導入해 보겠다.

보기를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 6個의 숫자를 가지고 1자리의 숫자가 10자리의 숫자보다 크게 되는 2자리 정수를 만들었을 때, 이들 숫자로 이루어지는 모든 根元事件 全體의 集合 即 空間 S 는 다음과 같이 表示된다.

$$S = \left\{ \begin{array}{lllll} (12), & & & & \\ (13), & (23), & & & \\ (14), & (24), & (34), & & \\ (15), & (25), & (35), & (45), & \\ (16), & (26), & (36), & (46), & (56) \end{array} \right\}$$

이때 空間 S 의 部分集合中에서

10자리 數가 1인 事件 A 는

$A = \{(12), (13), (14), (15), (16)\}$,

10자리 數가 2인 事件 B 는

$B = \{(23), (24), (25), (26)\}$,

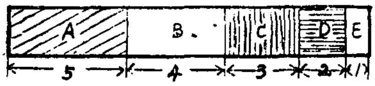
10자리 數가 3인 事件 C 는

$C = \{(34), (35), (36)\}$,

10자리 數가 4인 事件 D 는 $D = \{(45), (46)\}$,

10자리 數가 5인 事件 E 는 $E = \{(56)\}$,

여기서 空間 S 의 무게를 1로 보고 S 의 各根元事件 하나 하나가 똑 같은 程度로 確實하게 일어난다고 假定하고 各 根元事件에 $\frac{1}{15}$의 무게 (Weight)를 對應시킨다. 이것을 다음과 같이 테이프 形態로 그려서 생각하면 便利하다.

S;


(S 全體를 1로 본다)

(그림 16)

우선 空間 S 의 部分集合에서 根元事件의 무게의 合을 求해 본다.

空間 S 에 對한

A 의 元素의 무게의 合

$$\frac{1}{15} \times 5 = \frac{1}{15} \times (\text{A 의 元素의 數})$$

B 의 元素의 무게의 合

$$\frac{1}{15} \times 4 = \frac{1}{15} \times (\text{B 의 元素의 數})$$

C 의 元素의 무게의 合

$$\frac{1}{15} \times 3 = \frac{1}{15} \times (\text{C 의 元素의 數})$$

D 의 元素의 무게의 合

$$\frac{1}{15} \times 2 = \frac{1}{15} \times (\text{D 의 元素의 數})$$

E 의 元素의 무게의 合

$$\frac{1}{15} \times 1 = \frac{1}{15} \times (\text{E 의 元素의 數})$$

여기서 $\frac{1}{15}$의 무게는 測度를 考慮해서 테이프 全體의 길이에 對應하는 各 根元事件의 무게라고 한다. 그러면 空間 S 의 部分素合 A,B,C,D,E 의 무게의 合은

$$\frac{5}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

즉, 全事件 S 의 무게이다.

이때 A 의 元素의 무게의 合을 A 의 測度라고

하고 P(A)로서 表示한다. 나머지事件 B,C,D,E에 對해선 P(B),P(C),P(D),P(E)로 나타내어 진다.

이와 같이 測度的인 集合函數의 槪念으로서 위의 取扱을 다시 바꾸어 보면

{(12), (13), (14), (15), (16)}의 測度

$$P(A)=\frac{1}{15}\times5=\frac{1}{3}$$

{(23), (24), (25), (26)}의 測度

$$P(B)=\frac{1}{15}\times4=\frac{4}{15}$$

{(34), (35), (36)}의 測度

$$P(C)=\frac{1}{15}\times3=\frac{1}{5}$$

{(45), (46)}의 測度

$$P(D)=\frac{1}{15}\times2=\frac{2}{15}$$

{(56)}의 測度

$$P(E)=\frac{1}{15}\times1=\frac{1}{15}$$

以上에서 取扱한 測度 P(A), P(B), P(C), P(D), P(E)를 各各 事件 A,B,C,D,E가 일어날 確率이라고 定義한다.

〔보기〕 1에서 20까지 (1과 20포함)의 自然數中에서 어떤 數를 擇할 때 이 選擇된 數가 素數(Prime) 일 確率은 얼마이냐? 또 5의 倍數인 數일 確率은 얼마이냐?

<解> ① 1에서 20까지 自然數 全體의 集合 곧 空間 S는

$$S=\{1,2,3,\cdots\cdots,18,19,20\}$$

이다.

이 空間 S의 무게를 1로 보고 S의 20個의 各元素 하나 하나가 같은 程度로 確實하게 일어난다고 假定하고 各 元素에 $\frac{1}{20}$의 무게를 對應시킨다. 한편 空間 S의 各 元素中 素數 全體의 集合 A는

$$A=\{2,3,5,7,9,11,13,17,19\}$$

와 같이 8個의 元素를 包含하고 있다. 그러므로 求할려는 集合 A의 測度는

$$P(A)=\frac{1}{20}\times8=\frac{2}{5}$$

따라서 素數가 일어날 確率 $P(A)=\frac{2}{5}$이다.

② 1에서 20까지 自然數中 5의 倍數 全體의 集合 B는

$$B=\{5,10,15,20\}$$

그러므로 測度는

$$P(B)=\frac{1}{20}\times4=\frac{1}{5}$$

따라서 5의 倍數일 確率은 $\frac{1}{5}$이다.

§4. 確率의 理論 및 定理

지금까지 測度의 槪念을 利用하여 事件이 일어날 可能性에 對한 確率을 導入하여 보았다. 이때 導入한 順序를 생각해 본다면

(i) 事件이 일어날 모든 可能性의 全體의 集合을 空間 S라 하고,

(ii) 空間 S의 各元素 x_i에 全體의 合이 1인 實數値의 무게 $W(x_i)$를 對應시키고, (但 根元事件에 같은 무게를 對應시킨다.)

(iii) 空間 S의 任意의 部分集合 X의 測度로써 X의 모든 元素의 무게의 合

$$P(X)=\sum_i(x_i)=W(x)\times(X\text{의 元素의 數})$$

를 對應시킨다.

(iv) 다음에 事件 X가 일어날 確率로서는 (iii)에서 定義한 바와 같이 X의 모든 元素의 무게의 合인 P(X)를 對應시킨다.

以上과 같이 確率이란 偶然에 依해서 일어나는 事件에 주어지는 實數値로서 그 事件은 空間 S의 部分集合으로 나타내므로 S上이 集合函數(Set function) P(X)와 같은 槪念에서 出發하여 展開시켰던 것이다. 이 測度를 導入하여 생각한 確率에 對해서는 다음과 같은 性質이 成立한다.

〔性質 1〕 空間 S의 部分集合 A에 對해서 A가 일어날 確率의 값은 陰이 아닌 實數値이다.

곧 $A\subseteq S$이면 $P(A)\geq0$이다.

〔性質 2〕 $P(S)=1$

〔性質 3〕 空間 S의 任意의 2個의 部分集合 A, B에 對해서 $A\cap B=\phi$ 일 때

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

여기서 事件 A와 事件 B가 $A\cap B=\phi$인 條件을 滿足시킬 때 A와 B는 서로 排反事件(Mutually exclusive event)이라 한다.

一般으로 空間 S의 有限個의 部分集合

A_1, A_2,……, A_n이 任意의 i, j에 對하여

$A_i\cap A_j=\phi$인 條件을 滿足하면 即 A_1, A_2,……

A_n이 서로 排反事件이라면

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n)$
$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_n)$

인 性質을 갖는다.

윗 性質에서와 같이 $A \subseteqq S$인 集合 A에 對하여 P(A)를 事件 A의 確率이라 하고 이 性質을 滿足하는 集合 函數 P(A)를 "確率 函數" 或은 "確率 測度"(Probability measure) 라고 한다.

이와 같이 測度로서 確率을 定義하도록 發展시킨 사람이 A.N. Kolmogoroff 이다.

그러나 이러한 測度論的 思考를 具體的으로 取扱하는 것은 高等學校 學生들에게는 매우 어려우므로 簡單한 性質만 指導해야 할 것이다.

그리고 위의 性質로부터 다음 定理를 얻는다.

〔定理 1〕 空間 S의 任意의 事件 A에 對하여

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

〈證明〉 性質 1, 性質 2를 結合하면 된다.

〔定理 2〕 空間 S의 任意의 事件 A에 對하여

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

〈證明〉 $A \cap \bar{A} = \phi$ 이고 $A \cup A = S$ 이므로

性質 3에 依해서

$$P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

性質 2에 依해서 $1 = P(A) + P(\bar{A})$

〔定理 3〕 絕對로 일어날 수 없는 事件(Impossible event) ϕ의 確率 $P(\phi) = 0$ 이다.

〈證明〉 空間 S와 空事件 ϕ와는 서로 排反事件이고 또 $S \cup \phi = S$ 이므로 性質 3에 依해서 $P(S) + P(\phi) = P(S)$ 性質 2에 依해서 $1 + P(\phi) = 1$ 따라서 $P(\phi) = 0$

〔定理 4〕 任意의 2個의 事件 A,B에 對해서

$A \cap B \neq \phi$ 이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cap B = \phi$ 이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{〔性質 3〕}$$

〈證明〉 集合의 演算法則에 依해서

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$$

事件 A와 $(B - A \cap B)$는 서로 排反事件이다.

即 $A \cap (B - A \cap B) = \phi$

性質 3에 依해서

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B) \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

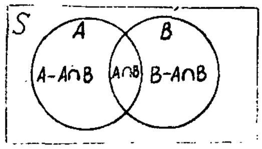
또 $B = (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$ 이고 $(A \cap B) \cap (B - A \cap B) = \phi$ 이므로

性質 3에 依해서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A \cap B)$$

따라서

$$P(B - A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$



(그림 17)

②를 ①에 代入하여

$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

여기서 特히 性質 3과 定理 3을 통털어 確率의 加法定理(Additional theorem)라고 부른다. 또한 定理 4에 對해서 다음 定理를 얻는다.

〔따름 定理 1〕 任意의 2個의 事件 A,B에 對하여 다음의 不等式을 얻는다.

$$P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B)$$

特히 이 不等式을 불 不等式(Boolean inequality) 이라고 부른다.

一般的으로 任意의 有限個의 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$에 對하여

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqq P(A_1) + P(A_2) \cdots + P(A_n)$$

인 關係가 成立한다. (證明은 附錄1 參照)

다음에 加法定理에 對한 몇 個의 보기를 들어 보겠다.

〔보기 1〕 트럼프에서 Ace와 Spade를 뽑을 事件을 各各 A, B라 할 때 "Ace 或은 Spade"를 뽑을 確率을 求하라.

<解> 트럼프를 뽑는 試行에서 Spade, Clover, Diamond, Heart를 各各 S,C,D,H,로 表示하기로 하면 이 試行으로 이루어지는 根元事件 全體의 集合 S는 $S = \{(S_1, S_2, \cdots\cdots, S_{13}), (C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{13}), (D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{13}), (H_1, H_2, \cdots\cdots, H_{13})\}$ 이다. 이 全體의 集合 S는 52個의 元素를 갖고 이들 하나 하나의 事件은 같은 程度로 確實하게 나온다고 假定하고 이들 各 元素에 $\frac{1}{52}$의 무게를 對應시킨다. 그러면 事件 A는

$$A = \{S_1, C_1, D_1, H_1\}$$

와 같이 4個의 元素로 되어있는 集合에 對應되고, 事件 B는 13個의 元素로 되어있는 集合 곧,

$$B = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \cdots\cdots, S_{13}\}$$

에 對應한다. 따라서 $A \cap B = \{S_1\}$.

事件 A가 일어날 確率 $P(A) = \frac{4}{52}$,

事件 B가 일어날 確率 $P(B) = \frac{13}{52}$,

事件 A,B가 同時에 일어날 確率은

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

이므로 求할려는 確率은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

한편 $A \cup B = \{S_1,\ S_2, \cdots\cdots, S_{13},\ C_1,\ D_1,\ H_1\}$ 이므로 確率의 定義로 부터

$$P(A \cup B) = \frac{1}{52} \times 16 = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

임을 알 수 있으므로 確率의 加法定理가 成立함을 알 수 있다.

〔보기 2〕 1個의 주사위를 굴리는 試行을 했을 때 "1의 눈 或은 5의 눈"이 나올 確率을 求하라.

<解> 지금 주사위를 굴리는 試行에서 나올 수 있는 눈의 全體의 集合 S는

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

이다. 이 6個의 元素 하나 하나는 같은 程度로 確實히 나온다고 假定하고 各 元素에 $\frac{1}{6}$의 무게를 對應시킨다.

"1의 눈"이 나올 事件을 A, "5의 눈"이 나올 事件을 B라고 하면 事件 A, B는 各各 $A = \{1\}$, $B = \{5\}$로 表示된다. 이때 事件 A, B의 測度 곧 A, B가 일어날 確率은

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

또 한편 $A \cap B = \phi$, 곧 事件 A,B는 서로 排反事件이므로 加法定理에 依해서 求하는 確率은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

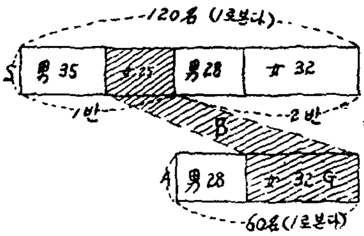
한편 $A \cup B = \{1, 5\}$, 따라서 $P(A \cup B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

§5. 條件附確率과 乘法定理

이 節에서는 確率 $P(A \cap B)$를 個個의 事件에 對한 確率로 어떻게 表示할 수 있을 것인가를 생각해 본다. 그러기 爲해서는 條件附確率(Conditional probability)에 對한 槪念을 誘導할 必要가 있다. 다음 보기를 들어 보자.

1班은 男子 35名, 女子 25名으로 構成되어 있고 2班은 男子 28名, 女子 32名으로 構成되어 있다. 이를 全體學生 120名의 集合을 S라 하고 2班의 學生이 選擇될 事件을 A, 두 班을 통털어 女學生이 選擇될 事件을 B라고 한다. 그러면 2班의 女學生이 選擇될 事件은 $G = A \cap B$로 表示된다. 이때 2班의 學生이 選擇될 事件 A가 確實히 發生한다는 條件下에서 2班의 女學生이 選擇될 事件을 B/A로 表示하고 이 事件이 일어날 測度를 $P(B/A)$라는 記號를 使用하여 이를 條件附確率이라고 한다.

이것을 다음 그림과 같이 생각한다.



(그림 18)

1, 2班 學生 全體의 集合 S의 무게를 1로 보면 S의 根元事件(學生 個個人) 하나 하나의 무게는 $\frac{1}{120}$에 對應하고 2班 學生 全體의 集合 A의 무게를 1로 보면 A의 根元事件 하나의 무게는 $\frac{1}{60}$에 對應하게 된다. 따라서 다음과 같은 關係가 있다고 한다.

$$\frac{1}{60} = c \times \frac{1}{120} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이것을 事件 A의 全體에 對해서 모으면 左邊은 1로 된다.

$$\frac{1}{60} \times 60 = c \times \frac{1}{120} \times 60 \quad \therefore \quad 1 = c \times \frac{60}{120}$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{\frac{60}{120}}$$

그러므로 ①은

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{\frac{60}{120}} \cdot \frac{1}{120}$$

다음에 A의 部分集合 G에 對해서 G에 屬한 모든 根元事件(元素) (32名)의 무게를 모으면,

$$\frac{32}{60} = \frac{1}{\frac{60}{120}} \times \frac{32}{120} = \frac{\frac{32}{120}}{\frac{60}{120}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

여기서

$\frac{32}{60}$은 A를 全空間으로 했을때 G의 測度 $P'(G)$

$\frac{32}{120}$은 S를 全空間으로 했을때 G의 測度 $P(G)$

$\frac{60}{120}$은 S를 全空間으로 했을때 A의 測度 $P(A)$

그러므로 ②는 $P'(G)=\frac{P(G)}{P(A)}$ ……………③

이때 $P'(G)$를 空間 S中의 事件 A가 일어난 다음에 B가 일어날 測度로 생각하면 $P(B/A)$가 되어 곧, 다음 式을 얻는다.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cdots\cdots④$$

④가 求하고자 하는 條件附確率에 關한 公式이다. 이것이 一般的으로 成立되기 爲해서는 $P(A)>0$이어야 한다는 것을 알 수 있다. 위의 公式 ④를 곱의 形態로 고치면 다음과 같은 定理를 얻는다.

〔定理 5〕 乘法定理(Multiplication theorem)

事件 A,B가 空間 S의 任意의 두 事件일때

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

앞의 公式 ④는 $P(A)>0$일때에 限해서만 成立되었으나, $P(A)=0$일때 右邊의 값을 0이라고 생각한다면 이 定理 5는 모든 境遇에 對하여 成立한다는 것을 알 수 있다. 한편 $A\cap B=B\cap A$이므로 위 定理 5는 다음과 같이 쓸 수 있다.

〔따름 定理 2〕 A, B가 空間 S의 任意의 두 事件일 때

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B) \text{이다.}$$

萬若에 事件 A가 일어나는 與否가 다른 事件 B가 일어나는 與否에 아무런 影響을 끼치지 않을 때 即 A,B가 空間 S의 任意의 두 事件으로서 $P(A)>0$이면서 $P(B)=P(B/A)$라는 條件을 滿足할 때 事件 A와 B는 獨立事件(Independent event)라 하고 그렇지 않을 때는 從屬事件(Dependent event)이라고 한다.

〔따름 定理 3〕 A와 B가 空間 S內의 獨立인 두 事件일 때

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \text{이다.*}$$

〔보기 3〕 2個의 주사위를 굴릴 때 2의 눈과 5의 눈이 同時에 나타날 確率을 求하라.

* 어떤 數學者는 따름정리의 내용으로 〈獨立〉을 定義하고 있다.

〈解〉 한個의 주사위는 2의 눈이 나오고 다른 주사위에선 5의 눈이 나온다고 하자. 그리고 2의 눈이 나오는 事件을 A, 5의 눈이 나오는 事件을 B라고 하면 A와 B는 獨立事件이므로 따라서

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

〔보기 4〕 10個의 제비중에 3個의 당첨권이 들어 있다. 萬若에 A,B 2사람이 모두 당첨권을 뽑을 때 A가 먼저 뽑은 後 B가 당첨권을 뽑을 確率을 求하라.

〈解〉 처음에 A가 뽑을 確率은 $P(A)=\frac{3}{10}$

A가 뽑고 난 다음 B가 뽑을 確率은 $\frac{2}{9}$

乘法定理에 依해서

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},$$

따라서 求하는 條件附確率 $P(B/A)$는

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}.$$

다음 章에서는 實際로 指導해 본 것을 Test 하여 그 結果를 分析해 보기로 하겠다.

Ⅳ. 實際指導 및 結果分析

A. 指導한 計劃 및 內容

지금까지 第Ⅲ章에서 展開해온 集合을 導入한 體系的인 確率을 實際로 指導해보기 爲하여 서울 ○○高等學校 2學年 5班 70名〔I.Q. 平均 105.4 中間考査 平均 61.4 (附錄 2, 3)〕을 選定하여 集合概念과 集合에 對한 理論的인 面을 直觀的으로 다음과 같이 우선 4時間을 通해 指導해 보았다.

(1) 集合의 定義 및 元素

(2) 集合의 表示法 (∪, ∩)

(3) 部分集合 및 包含關係(⊆, ⊂, ∈)

(4) 合集合, 共通集合(積集合), 差集合, 空集合, 餘集合.

위와 같은 集合概念을 指導한 後 體系的인 確率을 指導하기 爲하여 다음과 같이 11時間의 指導計劃을 세워 實施해보았다.

§1. 事件과 標本空間……………………2時間

§2. 事件과 集合演算……………………2時間

§3. 確率의 導入……………………1時間

§4. 確率의 理論 및 定理……………4時間

§5. 條件附確率과 乘法定理…………2時間

그러나 SMSG. Mathematics for junior high school 敎師用 指針書 Vol. 2. Part II. 第8章 確率을 보면 9~10時間의 指導計劃으로 잡으면 된다고 했지만, 本論文의 單元 III을 指導하는데 11時間으로 計劃했다. 비록 充分한 練習은 못했지만 全過程을 取扱하여 보았다. 그리고나서 實際 Test問題(附錄 4)를 作成하여 試驗을 實施하였다.

다음 結論에선 Test結果의 分析을 通하여 本論文의 主眼點에 對하여 說明하겠다.

B. 結 論

古典的인 從來方法으로 指導하던 確率部面에 集合을 생각하고 集合의 演算이나 測度를 導入하여 體系있는 指導方案을 세워보려고 努力한것이 本論文의 硏究 動機였다. 아직까지 集合에 對한 槪念과 理論的인 面에 經驗이 없는 學生들에게 多少 無理하게 생각은 했지만 授業時間을 通하여 볼 때 數學敎育의 現代化에 따라 集合의 必要性을 注知시켰으며, 또 集合의 記號 및 集合的인 思考를 Venn diagram으로 直觀的인 演算을 指導하였는데 이때 學生들은 상당한 好奇心을 가지고 大體로 쉽게 理解를 하는 것 같았다. 그러나 抽象的인 集合槪念을 確率에 適用하면서부터 느낀 것은 정말로 高等學校學生들에게 어느 程度의 効果를 거둘 것인가? 공연히 헛된 手苦만 하지 않는가 疑心을 품은 때가 한 두번이 아니었다. 그러나 Test問題(附錄 4)를 試驗 본 後 그 結果 (附錄 6)에 볼 수 있는 바와 같이 班 全體平均이 約 62였다는 것은 비단 問題自體가 쉽고 어려운 것은 不問에 부치더라도 豫想보다는 成績이 좋았으며 特히 (附錄 5)에서 보듯이 問6 같은 技能面 Test 問題의 正答率이 71.4% 였다는 것은 集合的인 思考없이는 그렇지 못했을 거라고 생각된다. Test 全體問題를 通하여 볼 때 解理面 全體의 正答率, 誤答率, 無答率의 平均이 各各 74.3, 23.5, 2.2인 것을 보면 大體로 理解는 잘 되었다고 보나 그렇게 滿足스러운 것이 못된다. 그리고 理解 技能面인 問5의 ①의 正答率이 7.1%로 상당히 좋지 못한데, 여기서는 짝수의 눈이 나올 事件 B를 B={2}라고만 쓴 學生이 大部分이었다.

좀더 注意만하면 充分히 좋은 成果를 얻으리라 믿는다. 또 技能面의 問 8의 事件은 從屬事件의 問題인데 亦是 理解가 잘 되지 않는 상 싶었다.

한편 敎師自身의 立場으로 볼 때 確率의 여러 事件中 獨立事件, 從屬事件, 그리고 條件附確率과 乘法定理를 集合的으로 取扱하기가 事實上 애매한 感도 들어 이곳에선 別로 集合的인 槪念을 導入시켜서 說明하지 않았다. 아무튼 今般實施해 본 結果를 通하여 高等學校 數學敎育課程에서도 集合的인 思考方式을 獨立的인 分野로 다루지 말고 여러面에 學生들의 理解 技能面은 勿論 興味를 誘發시키는 動機가 된다면 敎師自身은 集合的인 槪念을 導入시켜 指導하면 좋을 줄로 생각한다. 이러한 此際에 우리나라에서도 現代數學의 抽象的인 集合槪念을 高等學校 數學敎科課程에 時急히 取扱하여 數學敎育의 現代化에 좀 더 努力하였으면 한다. 그리고 數學擔當者들은 앞으로 이러한 問題에 繼續硏究를 하여야만 하겠다.

本 論文을 作成함에 있어 처음부터 끝까지 勞苦를 무릅쓰고 指導해주신 朴漢植 敎授님께 深甚한 感謝를 드립니다. 아울러 本人의 硏究에 있어 指導와 鞭撻을 아끼지 않으신 李星憲, 金應泰, 金致榮 敎授님들께 謝意를 表하는 바입니다. 그리고 SMSG 敎科書를 提供해 주신 李興天 敎授님께 感謝드립니다.

附 錄

<附錄 1> Boole 不等式의 歸納的 證明

(i) $n=2$ 일 때 成立, 곧

$P(A_1 \cup A_2) \leqq P(A_1) + P(A_2)$ (∴ 따름정리 1)

(ii) n 일 때 成立한다고 假定하고 $n+1$ 일 때 成立함을 證明하자.

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) \\ &= P([A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n] \cup A_{n+1}) \\ &\leqq P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n) + P(A_{n+1}) \\ &\leqq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

<附錄 2> I.Q.의 分布表

구분	80~90	90~100	100~110	110~120	120~130	130~140	합계	평균
인원	5	18	22	18	6	1	70	105.4

<附錄 3> 數學成績 度數分布

(中間考査 65. 11. 8)

點數	20~30	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100	合計	平均
人員	2	5	8	16	22	10	4	3	70	61.4

<附錄 4> Test 問題(40分間)

1. 事件 A 과 일어날 確率과 일어나지 않는 確率과의 合은 곧, $P(A)+P(\bar{A})=($ $)$ 이다.

2. 萬若에 事件 A와 B가 排反事件 일 때 事件 A와 B 둘 중에 적어도 하나는 일어날 確率을 求하는 公式은 ( )이다.

① $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$
② $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
③ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
④ $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

3. 다음 事件中 排反事件, 獨立事件, 從屬事件을 區別하여 ( ) 안에 써 넣어라.

(1) 주사위를 굴릴때 1의 눈이 나오는 事件과 5의 눈이 나오는 事件 ……………………( )

(2) 1個의 銅錢을 던졌을 때 表面이 나오는 事件과 裏面이 나오는 事件 ………………( )

(3) 트럼프에서 Ace을 꺼낼 事件과 Jack을 꺼낼 事件 ………………………………………( )

(4) 10個의 제비중 당첨권이 3個들어 있는 주머니에서 맘대로 選擇할 때 A가 뽑은 後 B가 뽑는 事件에서, A가 뽑을 事件과 B가 뽑을 事件 ………………………………………………( )

(5) 주사위를 굴리었을 때 2의 눈이 나올 事件과 奇數의 눈이 나올 事件……………( )

4. 2個의 銅錢을 던졌을 때 둘다 表面이 나타날 確率을 求하는데 다음과 같이 풀었다.( )을 채워라.

풀이;

(1) 나올 수 있는 모든 경우의 數의 集合 S와 둘다 表面이 나올 事件 A는 各各

$S=\{\quad\}$, $A=\{\quad\}$.

(2) 各 根元事件이 일어날 可能性이 같다면 그 무게는 ( )이다. 따라서 求하는 確率은 測度를 考慮해서 $P(A)=($ $)$이다.

5. 1個의 주사위를 굴릴 때 1의 눈 或은 偶數의 눈이 나올 事件의 確率은 求하라.

풀이;

(1) 1의 눈이 나올 事件을 A, 偶數의 눈이 나올 事件을 B라면

$A=\{\quad\}$, $B=\{\quad\}$.

(2) 따라서 A 或은 B가 나올 確率은

(   )이다.

6. 事件 A가 일어날 確率이 0.8 事件 B가 일어날 確率이 0.5, A와 B가 同時에 일어날 確率이 0.3일 때, 事件 "A 或은 B"가 일어날 確率을 求하라.

7. 2個의 주사위를 굴릴 때 눈의 合이 5인 確率을 求하라.

8. 10個의 제비중 당첨권이 4장들어 있다. A가 뽑은 後 다시 넣지 않고 B가 뽑게될 確率을 求하라.

<附錄 5> Test 問題 結果分析表

行動面	問題	正答者數	誤答者數	無答者數	計	正答率	誤答率	無答率
理解面	1	50	20		70	71.4%	28.6%	
	2	54	13	3	70	77.1%	18.6%	4.3%
	3	54	14	2	70	77.1%	20.0%	2.9%
		60	9	1	70	85.7%	12.8%	1.5%
		50	18	2	70	71.4%	25.7%	2.9%
		49	21		70	70.0%	30.0%	
		47	20	3	70	67.1%	28.6%	4.3%
	合計	394	115	11	490	519.8%	164.3%	15.9%
	平均	52			70	74.3%	23.5%	2.2%
理解技能面	4	41	23	6	70	58.6%	32.9%	8.5%
		44	22	4	70	62.9%	31.4%	5.7%
	5	26	42	2	70	37.1%	60.0%	2.9%
		33	33	4	70	47.1%	47.1%	5.8%
	合計	144	120	16	280	205.7%	171.4%	22.9%
	平均	46			70	51.4%	42.9%	5.7%
技能	6	50	15	5	70	71.4%	21.4%	7.2%
	7	44	17	9	70	62.9%	24.3%	12.8%

面	8	32	27	11	70	45.7%	38.6%	15.7%
	合計	136	49	25	210	180.0%	84.3%	35.7%
	平均				70	60.0%	28%	11.9%

<附錄 6> Test 成績의 度數 分布表(65. 12. 12)

點數	10～20	20～30	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100	合計	平均
人員	1	3	5	10	11	15	12	9	4	70	약62

參 考 文 獻

〔1〕 SMSG; First Course Algebra, New Haven; Yale University Press, 1961.

〔2〕 SMSG; Mathematics for Junior High School, Vol. 2. Part II. New Haven; Yale University Press, pp. 311～341.

〔3〕 SMSG; Intermediate Mathematics, Part I.II, New Haven; Yale University press, 1961.

〔4〕 Brumfel, Eicholz, Shanks; Probability, Science Education Series, Reading, Mas.; Addison-Wesley, 1962.

〔5〕 Z.W. Birnbaum; Introduction to Probability & Mathematical Statistics, 1962. Chapters 1.2.

〔6〕 Paul. G. Hoel; Introduction to Mathematical Statistics, 3rd Edition, New York; John Wiley & Sons, Inc., 1960. pp. 4～32.

〔7〕 Paul R. Halmos; Measure Theory, Princeton, New Jersey; D. Van Nostrand Co. Inc., 1951. pp. 184～192.

〔8〕 Herman Chernoff, Lincon E. Moses; Elementary Decision Theory, New York; John Wiley & Sons, Inc., 1959. pp. 41～56, pp. 68～75. pp. 89～94.

〔9〕 Samuel S. Wilks; Mathematical Statstics, Princeton; University Press, 1963. pp. 1～19.

〔10〕 Lionel Weiss; Statistical Decision Theory, New York; McGraw-hill Book Company Inc., 1961. pp. 1～10.

〔11〕 Murray, R. Splegel; Theory & Problems of Statistics, New York; Schaum Publishing Co., 1961. pp. 99～121.

〔12〕 Feller; An Introduction to Probility Theory and its Applications, Vol. 1. 2nd Edition, New York; John Wiley and Sons, Inc. pp. 1～25.

〔13〕 橫地淸外; 科學化을 爲한 數學敎育, 東京; 誠文堂新光社, 1964.

〔14〕 河田龍夫・國澤淸典; 現代統計學, 上卷, 東京; 廣川書店, 1956. pp. 7～13.

〔15〕 李星憲; 世界數學史, 서울; 敎學社, 1961. pp. 206～212.

〔16〕 鄭英鎭; 近代統計學의 理論과 實際, 서울; 寶晋齋, 1963. pp. 47～51.

ABSTRACT

According to the modernization of mathematics education, new abstract concepts such as the concept of sets are introduced in many fields of it.

The purpose of this thesis is to adopt the concept of sets to "probability" which is included in the curriculum of high school matematics education.

The considerations of the preceding chapter III, and their obvious generalizations to more complicated experiments, justify the conclusion that probability theory consists of the study of sets.

An event is a set, its opposite event is the complementary set; mutually exclusive events are disjoint sets, and an event consisting of the simultaneous occurrence of two other events is a sets obtained by intersecting two other sets it is clear how this glossary, translating physical terminology into set theoretic terminology, may be continued.

Furthermore, the important theorems of probability; Additional theorem, multiplication theorem, their applications and so on, are proved by the technical operations of sets.

Thinking of the mathematics education introduced by the concept of sets is very important in future. (서울女中)