

數學教育에 있어서의 새로운 思想

金 道 相

本稿는 Howard F. Fehr(Teachers College, Columbia University, New York)에 依하여 The Mathematics Teacher, N. C. T. M. Oct. 1960)에 發表된 New Thinking in Mathematical Education 을 번역한 것이다, (譯者)

數學教育에 있어서 改革을 하기에 앞서서 개혁자들은 이 論說에서 제기된 문제점을 고려해야 한다.

이 論文은 문제점을 진술했을 뿐이지 그에 對한 해결에 關한 것은 아니다. 다음에서는 단지 문제를 제기하는데 관심을 둔것이지 어떠한 見解를 소개하거나 논의하는데. 영향을 주려고 한 것은 아니다.

우리의 關心은 數學的으로 健全하고 社會的으로도 重要하고 우리 時代에 있어서 教育的으로 적합한 數學教育계획을 결정하는데 있는 것이다.

교사들이나 教育行政家들의 임무는 이처럼 분명하다.

우리들은 數學者들이 오늘날 重要하다고 생각하는 순수 및 응용數學에 關하여 말을 들어왔고 또 현재도 듣고 있다.

또 初等 및 中等數學을 指導하는데 關한 중요성을 가진 새로운 생각 이 對하여도 역시 듣는다.

數學이란 무엇이며 어떠한 數學이 重要視되느냐 하는것은 마땅히 수학자들이 결정할 일이다.

數學의 어느部分이 大學수준 이하에서 指導될 수 있으며 그것을 누구에게 가르칠 것이며 또 그것을 가르치는 方法에 對한 研究는 우리들의 문제다.

학교당국자의 임무는 다음과 같다.

- a) 初等 및 中等數學에 있어서 現任의 課程과 시험을 보고 그 內容이 오늘날 젊은이의 교육에 적합한가를 現代數學의 發達에 비추어 따져 볼일.
- b) 能力있는 젊은이들이 大學에 가서 科學, 工學 및 數學을 더 깊이할 경우 배워야할 수학의

종류를 결정한다는 것.

- c) 또 大學교수들이 처음 공부하는 학생에게 어떠한 수학적 훈련과 능력을 요구하는가를 알아내는 일.

많은 나라에서 공업, 정부 및 연구기관, 혹은 敎職기관에 필요한 科學的으로 교육받은 人材들이 부족한것을 생각하여 가능하면 수학에 있어서 資格(質)이 있는 많은 중·고등학교 졸업자들을 배출하기 위하여 어떻게 數學이 제시되어야 하는것을 발견하는 것.

- d) 책임있는 당국자나 수학자들이 改訂에 대한 必要性을 느끼면서 그들이 개척하는데 영향을 줄수 있도록 현재의 교육 과정의 교정, 참가, 삭제 및 개선에 關하여 권고를 하는 것.
- 以上の 課題는 개혁에 대한 必要性에 입각된 것이다.

그러나 우리들이 착수 하기 전에 개혁의 필요성에 대한 조사와 답답이 있어야 한다.

훌륭한 계획은 몇 사람들이 그것에 대하여 불만이 있다고 해서 변경되서는 아니된다.

과거 10년 내지 15년의 활동은 당장 개혁하지 않더라도 냉정히 생각해 보면 개혁의 고려는 있어야 한다는 충분한 근거를 말해준다.

지금 간단히 몇 가지의 고려점을 말하려 한다.

- a) 연구기관의 수학에 있어서의 새로운 발전은 고등학교 수학에 있어서 강조점에 있어서 변화가 필요하다는 것을 말하여 준다.

수학에 있어서 새로운 생각은 추상대수, 위상수학, 선형공간, 집합론 등에 關하여 많이 알려져 있으며, 이것들은 오늘날 수학이 무엇이나? 하는 관점에서 필요한 변화를 지시하고 있

다.

b) 수학의 새로운 응용은 새로운 문제자료를 보여 준다.

확율, 통계적추정, 게임이론, 선형제화법, 수치해석, 自動機械 等の 모든것은 수학의 應用과 有用한 目的에 있어서 變化를 指示한다.

c) 記號 論理學의 發達과 數學과의 밀접한 관계는 수학의 古典的 取扱 속에 들어있는 概念의 再考慮에 對한 必要性을 指示한다.

d) 수학의 여러 分野에 있어서 學問의 놀랄만한 發展으로 말미 아마 中·高等 수준에서 습득된 것을 종합하고 보다 넓게 基礎를 固하여야 한다.

오늘날 수학 교육은 새롭고 효과적이고 포괄적이고 一般化된 것을 요구한다.

e) 많은 나라의 문화 공업 경제面에서의 變化는 教育面에서도 기초적인 變化를 요구한다.

보다 많은 사람들이 科學的知識에 훈련을 받아야 한다.

專門家가 아니라도 科學을 理解하여야 하며 오늘날 數學을 안다는 것은 科學을 理解하는데 기초가 된다.

이와같이 개혁해야 할 實情에 놓여 있다는 것은 분명하다. 그러나 어떤것을 개혁해야 되는가 하는 것이 우리의 임무다.

우리들은 初·中·高等의 教育에 관계하고 있기 때문에 학자적 자질을 가진 學生들의 教育은 물론이거니와 數學이 一般教育에도 關係된다는 點을 고려하여 수학을 생각해야 한다.

다음과 같은 3 가지의 目標을 세우는데 이들은 서로 중복은 되데 또 서로 相反되어서는 아니된다.

a) 自由教育으로서의 數學(心性的 自由서의 數學)

b) 生活을 爲한 基礎로서의 數學(人間的 必要한 道具로서)

c) 基礎科學으로서의 數學(大學의 研究를 爲한 토대로서)

이상과 같이 우리들이 數學을 指導함에 있어서 이 3 가지의 目標 하나하나에 맞도록 서로다르게 進展시킬 것인가? 그렇지 않으면 일정한 연령 또는 일정한 학년에 있는 학생들에 정신능

력에 잘 적응시켜 하나의 教育課程 속에 모든 目標가 함께 達成되도록 하느냐? 하는 것이다.

특히 다음 質問에 答할 必要가 있다.

a) 우리들은 어떠한 數學을 가르쳐야 하나?

이것은 어떤 分野를 말하는 것뿐만 아니라, 어떠한 概念, 用語, 記號 및 主題의 有機性을 뜻하는 것이다.

b) 누구에게 數學을 가르쳐야 하나?

모든 學生? 能力있는 學生에게만? 혹은 數學을 必要로 하고 科學에 對한 關心이 많은 學生에게 할 것인가?

c) 어떻게 數學을 指導할 것인가?

一종의 技巧的인 재주로서 가르칠 것인가?

하나의 思考體制로서?

直觀的인 經驗성을 가지던 간에 構造의 한 體制로서?

抽象性을 띤 具體的인 학문으로서?

또 數學을 푸는것을 강조할 것인가?

혹은 概念을 理解하는 것을 강조할 것인가?

그렇지 않으면 同等하게 강조할 것인가?

代數, 幾何, 三角法, 解析을 따로따로 분리시켜 다룰 것인가? 數學의 連續的인 발전으로서 통일되어 취급할 것인가?

다음 節은 各分野마다 具體的으로 질문한 것이다.

算術

모든 어린이들이 세고, 自然數와 分數를 가지고 計算하며 公約數를 알고 또 이 算術을 問題를 푸는데 利用하는 方法을 배워야 한다는데 對하여는 一般的으로 누구나 말하는 것이다.

그러나 算術을 가르칠 때 얼마나 많은 年數를 通해서 指導하느냐? 어떠한 方法으로 하느냐? 即 機械的인 反復에 依하느냐? 理解의 發見에 依하느냐 하는 것에 對해서는 對答이 없다.

5歲부터 12歲까지의 어린이들이 一般化하고 抽象化하고 機械的인 計算보다도 오히려 數學的인 科學으로서 算術을 理解할 수 있느냐?

算術이 物體를 對象으로 하여 始作한다는 것은 認定된 事實이다.

오늘날 많은 사람(Montessoric, Sten Cuisenaire Gattegno Dienes Lazar, etc)들이 意味있는 算術을 發達시키기 爲하여 어떤 것은 색깔에 基

概念을 두고 資料를 發展시키고 있다. 그런데 이러한 方法은 算術을 배우는데 必要한 것인가?

數에 關한 演算을 배운 어린이가 이것은 正確히 應用하여 問題를 풀것이나? 만일 그렇지 않다면 어린이들이 量的인 問題를 푸는 道具를 習得하도록 하려면 算術은 어떻게 가르칠 것인가?

다시 말하면 實際의인 物體에서 始作하여 점차 概念과 原理와 演算過程을 抽象化하여 集合과 그의 演算을 通하여 算術은 가르칠 수 있는가?

어떻한 算術을 어떻게 指導하여야 하느냐 하는것을 우리들은 알아야 한다.

왜냐하면 이것은 앞으로의 數學工夫에 있어서 基礎가 되기 때문이다

다음에는 算術工夫에 있어서 어느 程度로 넓혀갈 것인가?

數學에 關한 理論은 얼마나 必要한가?

끝으로 概念이 技術보다 더 重要하나?

(왜냐하면 計算機가 發達되었기 때문이다)

혹은 技術이 더 重要하나? 하는 것이다.

代 數

代數의 古典的인 取扱은 一種의 機械的이고 技巧的인 工夫에 지나지 않는다. 代數敎科書에는 언제나 定理과 證明이 缺如되어 있고 主로 規則과 原理가 大部分이다.

한편 代數를 一種의 一般化된 算術로서 생각할 變數, 變域, 值域, 關係函數, 變換같은 概念의 使用은 極히 드물다.

지난 30餘年間의 抽象代數의 굉장한 發展에 비추어서 現在의 代數指導를 批判的으로 주의깊게 조사해야 한다.

특히 우리의 指導를 成功的으로 改善하기 爲하여는 다음 물음에 研究를 할 必要가 있다:

a) 代數의 工夫는 어떻게 始作되어야 하나?

一般化된 算術로서?

數系의 研究에 依하여?

方程式과 公式을 通하여?

그 外의 다른 方法이 없나?

b) 方程式의 풀이는 어떻게 가르칠 것인가?

演算合理를 通해서?

진술形式 및 同值方程式을 使用하여?

c) 不等式은 어느 程度로 소개될 것이며 어떠한

記號($<$, $>$, $<=$, $>=$, \leq)를 使用할 것인가?

集合의 用語는 (union, intersection, solution def 等) 使用되어야 하나?

絕對値는 어떻게 取扱되어야 하나?

d) 代數에 있어서 그림표에 關해서는 어떤것을 취급해야 하나?

不等式의 體系에 있어서 간단한 線型計劃法의 問題는 소개되어야 하나?

e) 數의 概念의 擴張은 어떻게 취급해야 하나?

陰의 有理數는 陽의 分數와 零에 덧붙이는 것으로 할것이나?

그렇지 않으면 有理數는 整數의 順序 지워진 擘으로서 이루어져야 할것이나?

同型에 關하여 소개되어야 할 것인가?

특히 實數는 어떻게 취급해야 하나?

이것을 無限小數로서 취급할 것인가?

그렇지 않으면 有理數에 있어서의 數列과, 切斷으로서 할것이나?

f) 代數的構造가 얼마나 소개되어야 하나?

交換律, 結合律, 分配律을 通하여 推論을 강조할 것인가? 그렇지 않으면 한층 古典的인 方法으로 취급되어야 하나?

g) 現代代數學은 高等敎科 課程에서 어느 程度로 導入되어야 하나?

특히 群, 環, 體, 行列, 構造, 線型空間에 對하여 工夫해야 하나? 만일 이것이 高等敎科의 수학의 한部分이 될것 같으면 왜 그것은 重要한가? 또 그것은 무엇에 도움이 되나?

h) 어느 程度로 集合은 導入되어야 하나?

集合의 使用은 무엇에 도움이 되나?

우리들은 Cartesian 積, 順序 지어진 雙의 集合, 및 同值關係는 使用해야 하나?

Boolean algebra는 指導해야 하나?

i) 關係와 函數의 어떠한 概念이 高等敎科 代數에 있어서 취급되어야 하나?

函數는 언제나 一價인 것이야 되나?

어떠한 記號가 使用되어야 하나?

위의 問題의 大部分에 對하여 어떤 一致하는 意見이 있을 때까지는, 代數指導에 있어서 改善할 수가 없다.

幾 何

幾何가 우리가 사는 世界의 物體의 表現으로

서 初等教育에서 많은 역할을 해야 한다는 것은 一般적으로 인정된 것이다.

直觀幾何가 演譯科學으로서의 幾何學研究에 준비가 된다는 것은 一般적으로 인정되어 있다.

그러나 演譯幾何의 高等학교 수준에서 취급하는 종류는 수학교육에 있어서 오늘날 아마 논쟁의 문제점이 되어 있다.

Euclid 幾何는 결점이 있음에도 불구하고 지난 200 年동안이나 高等학교 수학에서 한무대를 차지하고 있어 왔다.

Hilbert, Veblen의 엄밀한 방법은 추론 幾何를 처음 배우는 사람에게는 너무 어렵다. 그러면 어떠한 것을 해야 할 것인가?

- a) 현재의 방법을 지킬 것인가?
- b) 立體綜合幾何를 演譯적으로 취급하느냐? 혹은 平面幾何의 性質을 三次로空間에 擴張한 것으로서 直觀적으로 다룰 것인가?
- c) 代數幾何는 實數와 그의 性質을 가정하고 affine line을 가지고 출발할 것인가? 이것은 代數적인 思考가 숙달됨을 예상하여야 한다.
- d) 計量的 性質이 變하지 않는 變換을 구성하여 시작할 수 있는 소위 Klein의 Erlangen program의 해석을 사용하고 平面幾何를 더 엄밀하게 해나갈 것인가?
- e) Euclid 幾何를 解析幾何에 依하여 또 Vector 幾何에 依하여 해나갈 것인가?
- f) Vector가 導入된다면 어떻게 할 것이며 어느 程度로 線型空間을 發展시킬 것인가?
- g) 화립幾何는 高等학교 수학에서 여전히 가르쳐야 하나? 만약 가르친다면 어느 程度로 할 것인가? 또 그것은 어떤 目的에 도움이 되는가?
- h) 高等학교에서 非 Euclid 幾何는 導入되어야 하나? 만약 그렇다면 理由는?
- i) 射影幾何는 高等學校에서 가르쳐야 하나?

幾何는 數學者들에 등한視 하여 왔다. (位相적인 內容을 除外하고는)

그럼에도 불구하고 幾何는 教授의 큰 主題의 하나가 되어 왔다.

三 角 法

大部分의 나라에서 교육課程 속에 直角三角形의 銳角에 關한 三角比를 일찌기 導入하고 있다.

여러 사람들이 三角形의 解法으로서의 三角法의 價値는 함수의 周期的인 性質에 關한 주제에 比하면 오늘날에는 적은 편이다.

다음과 같은 것을 생각해 보자.

- a) 三角法을 좌표의 使用을 通하여 角의 理論으로서 어느 程度로 發展시킬 것인가?
- b) 좌표 위에서의 한終點의 한偏角에 關한 實數의 函數로서 發展시킬 것인가?
- c) 三角法을 發展시키는데 $\cos(x-y)$ 는 重要的 函數이나?
- d) 三角法의 應用은 어떤것에 重點을 둘 것인가?
- e) 三角法은 特別한 主題로서 취급할 것이냐 그렇지 않으면 代數와 幾何의 한 部分으로서 또 합시키고 解析으로서 級數를 通하여 취급할 것인가?

解 析

大部分 나라에서 大學에갈 準備를 하는 學生들은 高等학교에서 해석기하와 해석을 많이 공부한다.

解析을 高等學校數學의 한部分으로서 어느 程度 屬하게 한다면 形態와 소개되는 程度를 결정지어야 한다. 아직도 이 主題의 취급에 對한 現代化는 實로 問題點이다.

다음의 質問은 考慮點을 暗示해 준다.

- a) 權限과 連續性은 어떻게 취급할 것인가? $\delta-\epsilon$ 方法은 적합한가? 엄밀성은 어느 程度로 必要한가?
- b) 어떠한 특수함수 (代數·指數·對數·三角·逆三角)가 취급되어야 하며 어떠한 概念과 記號로 할 것인가?
- c) 어느 程度로 集合체 기반을 두고 발전시킬 것인가?
- d) 微分과 積分은 처음부터 같이 소개할 것인가? 積分의 처음시작은 微分의 逆算으로 할 것인가 그렇지 않으면 승으로서 취급할 것인가? 微分과 積分은 基本定理를 通해서 關聯시킬 것인가 혹은 직관적인 方法으로서 할 것인가?
- e) 解析幾何는 分離된 幾何의 한 過程으로 등장시킬 것이냐 혹은 解析의 한 過程으로서 취급할 것인가?
- f) 解析幾何에 vector를 使用하면 어떤가?
- g) 集合函數와 그의 確率에 對한 應用은 어느 程

度로 指導할 것인가?

h) 統計的 推定은 高等학교 수준에서 가르칠 것이냐? 方法과 程度는?

結 論

上述한 문제에 對한 對答은 數學의 完全한 教育課程을 만드는데 充分하지는 않다.

모든 敎師들이 이質問에 對하여 對答할 必要가 있다.

이 문제에 對하여 더 이상 연구할 바가 있지만 그러나 위에서 제기된 질문으로 우리의 생각을 집중시킨다면 다음에 關한 어떤 結論을 가져온다.

a) 大學수준 以下에서 어떤 特定한 數學을 가르칠 수 있으며 또 가르쳐야 하느냐? 즉 어떠한 概念, 論題, 記號, 用語 및 문제나 하는 것이다.

b) 여러 수준의 能力에 있는 學生에 對한 特定한 數學의 發展을 결정짓는 데 어떤 特定한 目標을 우리들은 머리 속에 두어야 하나?

c) 오늘날 重要하다고 생각되는 數學에 우리의 數學을 一致시키려면 어떻게 改革하고 組織할 것이냐?

d) 이 目的과 계획을 어떻게 널리 社會에 傳達할 것이냐? (弘益大學)

全國數學教育研究大會 開催案內

韓國數學教育會가 大韓教育聯合會의 傘下團體로서 發足하여 滿2個年이 지났습니다. 그間 本會는 大韓教育聯合會에서 主權하는 全國教育研究大會의 數學教育分科를 主管하고 왔습니다. 그런데 이러한 分科의 主管만으로는 本會가 試圖하는 우리나라 數學教育의 改善과 發展을 期待하기 어렵고, 數學分科가 지니고 있는 現實과 問題點解決에의 特殊性은 他敎科와 比할 바 못 됩니다. 여기에 數學教育會만의 全國研究大會를 갖기로 豫定하고 있습니다.

한편, 今日本의 世界數學教育界의 動向은 國際的視野에 시시 研究를 進行하고 또 國際的 協力下에 研究를 進行시킬 수 있다는 것에 特徵이 있습니다. 本會는 于先 今般 研究大會에 日本 數學教育界의 元老 戶田 清敎授를 招請해서 “日本數學教育界의 現況” 이라는 講演을 부탁하려고 하고 있습니다. 이번 機會에 日本數學教育界의 實情을 알고 우리나라 現實과 比較檢討하므로써 우리들 數學教育研究에 어떤 보탬이 있었으면 하고 있습니다. 또 우리나라 數學教育課程도 國民學校에서는 이미 實施되었고, 中學校도 來年부터 새로운 教育課程으로 實施될 段階에 있습니다. 이에 對한 또는 對備한 여러가지 現場研究를 一線敎師는 가지고 계실 것입니다.

이러한 實踐結果를 土産로 하여 서로서로가 研究發表와 討議를 하므로써 우리나라 數學教育이 不斷히 改善해 나갈수 있을 것입니다 이것이 本會가 意圖하는 方向이기도 합니다.

以上과 같은 趣旨에서 다음과 같이 研究大會를 가질 豫定으로 있습니다. 여러 會員의 積極的인 後援과 協調 있기를 바랍니다.

日 程 : 8 月 27 日~29 日
場 所 : 忠 清 南 道 大 田 市
行 事 : 特 別 講 演, 研 究 發 表, 協 議 會

1965年 5月

韓國數學教育會