○ 數量指導의 段階는 數構造의 原理를 좇아 1～10, 11～20…으로 區分하는것이 慣習上의 合理性이다.

○ 數를 셀수 있다는것은 多少間의 數概念이 있다는 反證이기도 하다.

○ 낱수 하나하나를 세어서 集合數를 認定하는 過程과 1對 1의 對應으로서, 그리고 數差 1의 比較狀態로서 認識된 數概念은 順序數概念에 가깝다.

○ 적어도 同一 色彩中에 낀 異彩로운 存在는 보다 많은 注意를 끈다.

4. 假說

1) 數概念指導는 數詞指導로부터 Piaget 씨의 數概念形成을 위한 基礎工事의 4段階를 否定하는 것은 아니다. 그러나 그 工事는 無意圖的인 가운데 또한 分別할 수 없는 時期에 이미 이루어진 것이다. 따라서 意圖的인 作爲는 不必要한 敎育的 浪費가 될것이다.

2) 集合數의 直觀에 依한 數詞指導는 集合數概念形成과 더부러 計算思考構造의 基礎經驗이 될 것이다.

本假說을 肯定할만한 文獻的 根據를 못 가졌다. 또한 그것을 否定하는 記錄도 보지 못했다. 問題는 그 成就結果가 證據해 주기를 바랄밖에 없다. 따라서 偶然學習의 結果에서 얼마간의 偶然要因이 分析될 수 있다면 問題 3의 計算思考構造의 基礎要因들이 밝혀질 것이다.

<次號繼續> (全南 靈岩郡 永保國民學校)

確率指導上의 問題點

金 應 泰

§1. 序

確率은 統計와 分離해서 생각하는 것은 現代數學의 面에서보나, 또는 社會人의 敎養의 面에서 보나 穩當한 생각이라고는 볼 수 없다. 곧 現代에서는 두가지를 分離하지 않고 確率統計的인 思考方式을 理解하고, 判斷의 基準으로서 이것을 여러가지 경우에 適用하는 것이 要求된다.

從來의 古典的인 方法으로서는 確率은, 어떤 事件이 이러나는 경우의 數를 全體의 可能性의 總境遇의 數로 나눈 것으로서 定義하였다. 따라서 確率의 問題는 境遇의 數를 셈하는 問題, 곧 順列, 組合에 관한 確率로 되었고, 近代統計學에는 關係가 적은 獨立的인 分野로 되었었다.

이와 같은 古典的인 導入方法으로서는 現代數學과 確率을 結付시키기는 困難하다. 따라서 여기에서는 確率의 理論을 現代數學과 結付시키기 위하여, 集合과 關聯시커서 可能性의 空間 안에 測度의 概念을 導入하여 여러가지 命題의 確率을 그 命題의 眞理集合(事件)의 測度로서 定義하려고 한다. 아울러 從前에 取扱하였넌 曖昧한 定義 및 理論의 展開를 어느 程度까지 嚴密한 體系아래에서 해보려고 한다.

§2. 事件과 集合

어떤 觀察 또는 實驗을 試行(trial)이라고 하고, 每試行의 結果로 나타날 수 있는 個個의 것을 그 試行의 根元事件(eelementary event)이라고 한다. 또 한 試行에 있어서 이에 對應하는 根元事件들의 어떤 集合을 事件(event)이라고 한다. 주사위를 던져서 어떤 눈이 나오는가를 調査하는 實驗은 한 試行이고, 이 경우의 根元事件은 "1의 눈", "2의 눈", "3의 눈", "4의 눈", "5의 눈", "6의 눈"의 6個이며, 이들 중의 한 個 또는 몇 個의 눈의 集合 {1}, {1, 2}, {1, 3, 5} 등은 事件이다. 따라서 "事件E가 이러난다"는 것은 事件(곧 根元事件의 集合) E에 包含되는 根元事件의 試行의 結果로서 나타남을 뜻한다.

한 試行에 있어서 나타날 수 있는 根元事件全體의 集合을 空間(space)이라고 하고 이것을 S로 나타내면 事件은 空間 S의 部分集合을 뜻한다.

이와 같이 事件을 集合이라고 생각할 때 事件에 關한 論理的 取扱과 集合에 關한 演算과를

對應시켜서 集合에 關한 知識을 指導할 必要가 切實히 要求된다.

주사위를 던지는 試行에 있어서 그 結果 나온 눈이 짝수이거나, "또는" 4 以上인 境遇, 前者의 事件은 集合 $A=\{2, 4, 6\}$이고, 後者의 事件은 集合 $B=\{4, 5, 6\}$이므로 이때는 A "또는" B의 어느 쪽이든지 屬하는 元素의 集合 $C=\{2, 4, 5, 6\}$으로 나타나고, 이것은 集合 A와 B의 合集合으로 된다. 이와 같이 事件 A "또는" B의 어느 것인가가 일어난다는 사건 C를 A, B의 〔合事件〕이라고 하고 이것을 集合記號를 써서 $A\cup B$로 나타낸다.

또 事件 A와 B가 "동시에" 이러난다는 事件, 곧 A, B에 공통으로 屬하는 元素의 集合 $C=\{4, 6\}$을 A, B의 〔積事件〕이라고 하고 $A\cap B$로 나타낸나. 이것은 集合 A, B의 共通部分이다.

空間 S는 반드시 일어난다는 事件이고 이것을 〔全事件〕이라고 한다. 또 絕對로 일어나지 않는 事件을 〔空事件〕이라고 하고, 空集合의 記號 ϕ으로 나타낸다.

다음에 $A\cap B=\phi$ 일 때, 事件 A, B는 서로 〔排反事件〕이라고 한다. 곧 排反事件은 두 事件 A, B 중 한 쪽이 일어나면 다른 쪽은 일어나지 않는 境遇를 뜻한다.

또 事件 A가 일어나지 않는 것 곧 A가 아닌 事件이 일어난다는 事件을 $\bar{A}$로 나타내며, 이것을 事件 A의 〔餘事件〕이라고 한다. 이 $\bar{A}$는 空間 S에 관한 集合 A의 餘集合을 뜻한다.

위에서 말한 여러가지 事件과 空間의 部分集合과의 關係를 整理하면 다음과 같다.

事 件	集 合	
合事件……事件 A, "또는" 事件 B가 일어난다.	合集合	$A\cup B$
積事件……事件 A와 "동시에" B가 일어난다.	積集合	$A\cap B$
差事件……事件 A는 일어나고 事件 B는 일어나지 않는다.	差集合	$A-B$
餘事件……事件 A가 일어나지 않는다.	餘集合	$S-A=\overline{A}$
排反事件…事件 A와 事件 B가 동시에 일어나지는 않는다.	共通元이 없는 集合	$A\cap B=\phi$
全事件……반드시 일어나는 事件	全空間	S
空事件……不可能한 事件	空集合	ϕ

위에서와 같이 事件에 關한 論理的 取扱이 集合算과 關聯이 깊으므로 다음과 같은 集合에 關한 基礎演算法의 指導가 必要하다. 이 指導方法은, 集合論的인 方法은 高校學生에게는 無理한 것이므로 Venn 圖式으로 直觀的으로 指導하는 것이 좋을 것이다.

$A\cup B=B\cup A$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap\overline{A}=\phi$

$\overline{(\overline{A})}=A$

$A\cap B=B\cap A$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup\overline{A}=S$

§3. 確率의 導入

"한 화폐를 던질 때 表面이 나올 것인가? 또는 裏面이 나올 것인가?" 또는 "來日은 비가 올 것인가?" 우리는 이와 같은 確實性을 要求하는 問題를 推理하는 境遇가 많다. 이 確實性을 數量的으로 定義하려고 하는 것이 우리의 自然的인 慾求이고 여기에 〔確率〕이라는 말을 쓰게 된다.

確率의 導入方法은 여러가지 있겠으나 여기에서는 事件을 集合으로 생각한 以上 集合函數로서의 測度의 概念을 利用하여 確率을 導入해 본다.

1원짜리 貨幣와 5원짜리 貨幣 2個를 동시에 던진다고 하자.

이 때 같은 程度로 確實하게 일어날 수 있는 모든 根元事件의 集合 곧 空間 S를 생각하면 다음과 같다.

$S=\{(表·表), (表·裏), (裏·表), (裏·裏)\}$ …①

여기에서 "전부가 表面"이라는 事件 A는

$A=\{(表·表)\}$ ……………………………②

이고, 두 貨幣中 "하나는 表面, 하나는 裏面"인 事件 B는

$B=\{(表\cdot裏),\ (裏\cdot表)\}$ ……………………③

이며 "全部가 裏面"인 事件 C는

$C=\{(裏\cdot裏)\}$ ………………………………④

이다.

이와 같이 空間 S가 求해지면 그 空間의 各 元素(根元事件)에 對하여 全體의 合이 1로 되도록 〔무게〕(weight)라고 불리우는 수를 對應시킨다. 여기에서는 ①의 모든 根元事件이 일어나는 것이 같은 程度로 확실하다고 인정할 수 있으므로 各 元素는 $\frac{1}{4}$의 무게를 갖게 된다. 그리고 그 部分集合에 대해서는 그 元素의 무게의 합인 수를 對應시켜서 이것을 그 部分集合의 〔測度〕라고 한다.

곧 위의 事件 A, B, C에 대한 測度는

A의 測度 $\frac{1}{4}$

B의 測度 $\frac{1}{4}\times2=\frac{2}{4}$

C의 測度 $\frac{1}{4}$

이 때 "전부가 表面"인 事件 A의 確率을 이 集合 A의 測度 곧 $\frac{1}{4}$과 같다고 定義한다. 以下 마찬가지로 各 事件의 確率을 定義하고, 確率을 나타내는데 보통 기호 $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ 등을 利用한다. 곧

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{1}{4}$$

위의 공간 ①에 있어서 各 元素에 같은 무게 $\frac{1}{4}$을 對應시켰지만 이것은 각 根元事件이 일어나는 것이 같은 程度로 確實하다고 생각되기 때문이고 空間에 따라서는 각 元素에 서로 다른 무게가 대응하는 경우도 생각할 수 있다.

〔例 1〕 두 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 합이 5인 確率, 7인 確率을 구하여라.

〔풀이〕 根元事件 全體의 集合, 곧 全空間 S는 36개의 元素를 갖고, 이들 하나하나의 根元事件은 같은 程度를 確實하게 나온다고 생각되므로 그들 元素에 각각 $\frac{1}{36}$의 무게를 對應시킨다.

눈의 합이 5인 事件 A는

$A=\{(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)\}$

이므로 그 測度는 $\frac{1}{36}\times4=\frac{1}{9}$이다. 따라서 그 확률은

$P(A)=\frac{1}{9}$

눈의 합이 7인 事件 B는

$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

이므로 그 測度는 $\frac{1}{36}\times6=\frac{1}{6}$이다. 따라서 그 확률은

$P(B)=\frac{1}{6}$

§4. 確率空間

確率은 偶然에 의하여 일어나는 各事件에 주어지는 實數値이다. 이 事件은 空間 S의 部分集合으로서 나타내지므로 確率이란 一種의 集合函數라고 생각할 수 있다.

여기에서 論하려고 하는 것은 앞의 §3에서 測度를 利用하여 確率을 導入한 根本的인 理由를 追窮하려고 하는 것이다. 그러나 이들 事項에 關해서는 高校 學生에게 指導할 수는 없을 것이다.

集合의 集合函數라는 純粹한 數學的인 概念에서부터 出發하여 確率論을 理論體系로서 構成할 때는 條件을 明確히 規定해야 한다. 이와 같이 測度論的으로 確率論을 體系化한 것은 A. N. Kolmogoroff(1903～)이다.

〔確率空間의 公理〕

1) 空間 S가 주어지고 S의 元素를 根元事件이라고 한다.

2) S의 部分集合을 事件이라고 한다.

3) F는 다음 條件을 滿足하는 S의 部分集合의 集合이다.

i) $S\varepsilon F$

ii) $A\varepsilon F$, $B\varepsilon F$이면 $A\cup B\varepsilon F$

iii) $A\varepsilon F$이면 $\bar{A}\varepsilon F$

4) $A\varepsilon F$이면 A의 確率이라고 불리우는 다음 3 條件을 滿足하는 수$m(A)$를 對應시킬 수 있다.

a) $0\leq m(A)\leq 1$

b) $m(S)=1$

c) $A\cap B=\phi$ 이면 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$

이 때 $m(A)$를 〔確率函數〕 또는 〔確率密度〕 〔確率測度〕 等이라고 한다.

위의 4 條件 1), 2), 3), 4) 를 滿足하는 空間 S를 〔確率空間〕이라고 하고 $S(F, m)$으로 나타낸다.

〔例 2〕 k 個의 元素로 되어있는 集合 $S=\{c_1, c_2, \cdots, c_k,\}$를 空間이라고 하고서 S의 모든 部分集合의 集合을 F 라고 하면, F는 分明히 위의 公理의 條件 3)을 滿足한다. 한편

$m(\{c\})=p_i(i=1, 2, \cdots, k)$

$p_1+p_2+\cdots p_k=1 \quad 0\leqq p_i\leqq 1 \ (i=1, 2, \cdots, k)$

라고 한다. $A\varepsilon F$ 를

$A=\{c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in}\}$

라고 할때,

$m(A)=p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{in}$

이라고 하면, 이 $m(A)$는 分明히 위의 公理의 條件 4)를 滿足하여 S는 確率空間으로 된다.

〔定理 1〕 $S(F, m)$이 確率空間이면,

1) $\phi\varepsilon F$

2) $A\varepsilon F$, $B\varepsilon F$ 이면 $A\cap B\varepsilon F$, $A-B\varepsilon F$

3) $m(\phi)=0$

〔證明〕 1) $S\varepsilon F$ 이므로 $\bar{S}=\phi\varepsilon F$

2) i) $A\varepsilon F$, $B\varepsilon F$ 이면 $\bar{A}\varepsilon F$, $\bar{B}\varepsilon F$

$\therefore\ \bar{A}\cup\bar{B}\varepsilon F \quad \therefore\ \overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}\varepsilon F$

$\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}=A\cap B$ 이므로 $A\cap B\varepsilon F$

ii) $A\varepsilon F$, $B\varepsilon F$ 이므로 $\bar{B}\varepsilon F$ $\therefore\ A\cap\bar{B}\varepsilon F$

$A\cap\bar{B}=A-B$ 이므로 $A-B\varepsilon F$

3) $m(\phi\cup S)=m(\phi)+m(S) \quad (\because\ \phi\cap S=\phi)$

$\phi\cup S=S$ 이므로 $m(S)=m(\phi)+m(S)$

$m(S)=1$ 이므로 $1=m(\phi)+1 \ \therefore\ m(\phi)=0$

〔定理 2〕 確率空間 $S(F, m)$에 있어서 $A\varepsilon F$, $B\varepsilon F$ 이면

$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

〔證明〕 $A\cup B=A\cup(B-A)$ 이 때 $A\varepsilon F$, $B-A\varepsilon F$ $A\cap(B-A)=\phi$ 이므로 公理의 條件 4)의 c)에 의하여

$m(A\cup B)=m\{A\cup(B-A)\}=m(A)+m(B-A)$ ……………………………①

$B=(B-A)\cup(A\cap B)$이고 $B-A\varepsilon F$, $A\cap B\varepsilon F$ 이며 $(B-A)\cap(A\cap B)=\phi$ 이므로

$m(B)=m(B-A)+m(A\cap B)$

$\therefore\ m(B-A)=m(B)-m(A\cap B)$ ……②

①, ②에서

$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

§5 確率의 性質

위의 §3에서 어느 事件의 確率을 定義한 過程을 살펴보면 根元事件全體의 空間 S를 생각하고 S의 하나하나의 元素 a에 全體의 合이 1로 되는 양의 무게 $w(a)$를 對應시켜서 任意의 事件 곧 S의 任意의 部分集合 A의 測度로서는 A의 모든 元素의 무게의 합

$m(A)=\Sigma w(a)=w(a)\times\{A$ 의 元素의 個數$\}$ ……………………………①

(단 이 때는 각 根元事件에 같은 무게를 對應시켰음)

를 주었다. 다음에 事件 A의 確率로서는

$P(A)=m(A)$ ……………………………②

를 適用하였다.

여기에서 空間 S의 部分集合 A에 주어진 測度의 性質을 調査하면 다음과 같다.

〔定理 3〕 1) $A=\phi$ 일 때 $m(A)=0 \quad m(S)=1$

2) 모든 部分集合 A에 對하여 $0\leq m(A)\leq 1$

3) 모든 部分集合 A와 B에 對하여,

$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

$A\cap B=\phi$ 이면 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$

4) $m(\bar{A})=1-m(A)$

〔證明〕 1), 2)는 分明하다.

3) $A\cup B$의 測度 $m(A\cup B)$는 $A\cup B$의 元素의 무게의 合이다. $m(A)+m(B)$는 A의 元素의 무게의 合에 B의 元素의 무게의 合을 더한 것이다. 따라서 $m(A)+m(B)$ 중에는 $A\cap B$의 元素의 무게가 2重으로 포함되어 있다. 그러므로 이 $A\cap B$의 測度 $m(A\cap B)$를 한번 빼면 $A\cup B$의 모든 元素의 무게의 합, 곧 $m(A\cup B)$가 구해진다.

$\therefore\ (A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

특히 $A\cap B=\phi$ 이면 $m(A\cap B)=0$ 이므로

$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$

4) $A\cup\bar{A}=S \quad A\cap\bar{A}=\phi$ 이므로

$1=m(S)=m(A\cup\bar{A})=m(A)+m(\bar{A})$

$\therefore\ m(\bar{A})=1-m(A)$

이 定理의 結果에서 空間 S의 모든 部分集合의 集合을 F 라고 하고 위의 ①에서 定義한 測度 $m(A)$를 結付시키면 分明히 이 空間 S는 §4에서 말한 Kolmogoroff의 確率空間의 公理의 條件을 滿足시킴을 알수 있다.

確率의 定義 ②와 定理 3에 의하여 確率에 관한 다음 性質이 成立한다.

〔定理 4〕 1) $P(\phi)=0 \quad P(S)=1$

2) $0 \leq P(A) \leq 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$……③

$A \cap B = \phi$ 이면 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$④

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$……………………………⑤

이 定理의 4의 3) 等式 ③, ④를 確率에 있어서의 〔덧셈定理〕라고 한다. 普通 위의 ④를 덧셈定理라고 하지만 이것은 ③의 특수한 경우이기 때문에 ③도 덧셈定理라고 하는 것이 穩當할 것이다. 勿論 ③도 高校에서 指導해야 할 것이다.

위의 等式 ⑤는 餘事件의 確率을 計算하는 데 利用되는 公式이며, 等式 ④는 排反事件의 確率을 計算하는데 利用되는 公式이다.

〔例 3〕 3 개의 貨幣를 던질 때 적어도 1 개는 表面이 나오는 確率은 얼마인가?

〔풀이〕 적어도 1 個는 表面이 나오는 事件 A의 餘事件 $\bar{A}$는 3 個가 모두 裏面이 나오는 것이다.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

〔例 4〕 한 주사위를 던질 때 1의 눈이 나오거나 또는 짝수의 눈이 나오는 확률은 얼마인가?

〔풀이〕 1의 눈이 나오는 사건 A와 짝수의 눈이 나오는 事件 B는

$A = \{1\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A \cap B = \phi$

에서 서로 排反이다.

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{3}{6}$$

$$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

§ 6 條件確率

홍색의 주사위와 백색의 주사위를 동시에 던질 때 두 주사위의 눈의 수의 合이 4보다 작다는 條件아래에서 홍색 주사위가 1의 눈이 나오는 확률을 구해보자.

먼저 이 문제의 뜻을 생각하자. 두 주사위를 同時에 던질 때 눈의 수의 합은 4보다 작을 수도 있을 것이고 그렇지 않을 수도 있을 것이다. 그러나 눈의 수의 合이 4보다 작지 않은 根元事件은 모두 버리고 눈의 수의 合이 4보다 작은 根元事件만 모아서 다음과 같이 새로 縮少된 空間 S'를 만든다.

$$S' = \{(1, 1), (1,2), (2,1)\} = \{(r, c) \mid r + c < 4\}$$

이 3 根元事件은 原空間 S에 있어서 같은 程度로 確實히 일어나므로, 이들 각 根元事件은 縮少된 新空間 S' 內에서 같은 確率을 갖는다고 볼 수 있다. 따라서 S' 內에서의 이들 각 元素의 確率은 $\frac{1}{3}$이다. 이들 중 특히 홍色 주사위의 눈이 1인 것, 곧 $r=1$인 것은

$A' = \{(1, 1), (1, 2)\}$

이고 그 元素는 2 개이다. 따라서 縮少된 空間 S' 內에서의 홍色 주사위의 눈이 1인 事件, 곧 $r=1$인 事件의 確率은 $\frac{2}{3}$이다. 이 $\frac{2}{3}$를 $r+c<4$인 條件下에서의 $r=1$인 事件의 〔條件確率〕이라고 한다.

條件確率을 求하는 方法을 알기 위하여 原空間 S 內에서의 集合 $B = \{(r \cdot c) \mid r + c < 4\}$, 및 $A = \{(r, c) \mid r = 1\}$을 表로 만들면 다음과 같다.

條 件	事 件
$r+c<4$	$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
$r=1$	$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$

事件 B가 주어졌을 때의 A의 확률을 알려고 하는 것이기 때문에 A, B에 共通으로 包含되어 있는 點의 集合 $A \cap B$를 구하면 다음과 같다.

$A \cap B = \{(1, 1), (1, 2)\}$

지금 原空間 S 內에서의 事件 A, B, $A \cap B$의 確率을 구하면,

$$P(A) = \frac{6}{36} \quad P(B) = \frac{3}{36} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{36} \text{①}$$

事件 B가 주어졌을 때의 事件 A의 確率을 記號로 普通 다음과 같이 나타낸다.

$P(A \mid B)$

위의 例에서는

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3} \text{……………………………②}$$

한편 ①, ②에 의하여,

$$\frac{2}{36} = \frac{3}{36} \times \frac{2}{3}$$

이므로,

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \text{…………③}$$

인 關係가 있음을 알 수 있다. 等式 ③에 依하여 $P(A \mid B)$를 구하는 公式으로서 다음 關係式이 暗示된다.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

위의 例에 의하여 條件確率을 다음과 같이 定義한다.

〔定義 1〕 한 空間에 있어서의 두 事件 A, B에 對하여 $P(B) \fallingdotseq 0$ 일 때

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

를 B에 대한 A의 〔相對確率〕, 또는 B가 일어났을 때의 A의 〔條件確率〕이라고 한다. 이것을 記號로 $P(A \mid B)$ 나타낸다. 곧

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

〔定義 2〕 A, B가 한 空間에 있어서의 두 事件이고, $P(B) \fallingdotseq 0$ 일 때

$$P(A) = P(A \mid B)$$

이면 A는 B와 〔獨立〕이라고 한다. A가 B와 獨立이 아닐 때는 A는 B와 〔從屬〕이라고 한다.

〔例 5〕 홍백 2個의 주사위를 동시에 던질 때 2 주사위의 눈의 數의 合이 11인 事件 A와 홍색의 주사위가 5의 눈이 나오지 않는 事件 B는 서로 獨立인가? 從屬인가?

〔풀이〕 $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$

$B = \{(r, c) \mid r \fallingdotseq 5\}$ …30개의 元素의 集合

$A \cap B = \{(6, 5)\}$

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{30}$$

$P(A) \fallingdotseq P(A \mid B)$이므로 A는 B와 從屬이다

〔例 6〕 위의 〔例 5〕의 問題에서 홍색 주사위가 짝수의 눈이 나오는 事件을 A, 백색 주사위가 홀수의 눈이 나오는 事件을 B라고 할때 A는 B와 獨立인가? 從屬인가?

〔풀이〕 $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(A)$$

곧 A는 B와 獨立이다.

위의 定義 1, 2에서 다음 定理가 成立한다.

〔定理 5〕 A, B가 한 空間에 있어서의 두 事件일 때,

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(A \mid B)$$

또는 $A \cap B = B \cap A$ 에서

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(B \mid A)$$

A, B가 獨立일 때는

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

이 定理를 〔곱셈定理〕라고 한다.

〔例 7〕 10개의 심지 중에 3개의 당첨이 들어 있을 때 2명이 모두 당첨을 뽑는 확률은?

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B \mid A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

이다.

§7 整理

以上으로 高校에서의 確率指導에 있어서 比較的 曖昧하게 다루어지기 쉬운 面을 골라서 現代數學과 깊은 關聯을 지워서 다음과 같은 方法으로 嚴密한 取扱을 해보았다.

1) 事件을 根元事件의 集合으로 定義하였다
2) 確率의 導入은 統計 其他의 部門과 有機的인 聯關을 지우기 위하여 古典的, 經驗的, 直觀的 定義를 止揚하고 測度論的으로 定義하였다.
3) 餘事件, 排反事件, 獨立事件, 從屬事件 等의 定義 및 그들 事件의 確率計算은 從來의 教科書에서의 取扱方法을 全然 바꾸어 理論的인 體系를 세워 嚴密한 取扱을 하였다.

以上 主로 有限空間에서의 確率만을 取扱하였지만 無限空間에서의 確率에 對해서도 그 槪念만이라도 指導할 必要가 있지 않은가 생각 한다 統計分野에의 應用에 關해서도 그 指導方法을 充分히 硏究해야 할 것이다.

(서울大學校 師範大學)