

2次方程式의 指導方案에 對한 實驗的研究※

金 斗 鉉

§ 1. 緒 言

1965學年度부터 새로 實施될 教育課程中에서 中學校 第 3學年 數學科의 數式部分에 關한 것 을 보면 大略 다음과 같다.

(1) 改訂의 要點

○第 3學年 內容에서

(가) 2次方程式의 內容이 擴充되어 完全平方 이나 根의 公式에 依한 解法이 指導되도록 되어 있고, 2次函數의 그래프에서도 이에 따라 理論 的으로 取扱할 수 있도록 되었다. 또한……

○學年目標에서

(2) 式의 領域에서는 1. 2學年에서 習得한 式 의 概念의 理解를 活用하여 式을 目的에 따라 自由로 變形할 수 있는 能力을 기르게 한다. 即 複雜한 式을 處理할 수 있는 簡單한 式으로 分解한다거나 合成하고, 公式를 利用하여 中間 의 思考過程의 反復을 省略하여 能率적으로 式 의 處理를 하도록 한다.

結局 여기서는 2次方程式, 聯立方程式, 分數 方程式의 解法等의 効率적인 運用으로써 形式의 으로 一般化하여 問題를 解決하는 能力을 기르 게 된다.

○指導內容에서

2學年에서 取扱한 1次方程式을 土台로 하여 簡單한 數係數의 2次方程式에 關한 式의 意義나 必要性和 푸는 方法을 理解하여 問題解決에 活 用하고 2次式의 概念을 確實히 한다. 그리고, 集合과 關聯시켜 指導할 수 있다.

○留意事項에서

⑥ 2次方程式은 係數가 有理數이고, 實根을 갖는 것만을 取扱한다. 따라서 虛根이 나오는 方程式의 풀이는 不可能함을 그래프를 통하여…

2次方程式을 根의 公式으로 푸는 方法은 解放 直後에도 中學校에서 指導하였으나, 程度가 높 기 때문에 中學生들에게는 無理하다고 해서

1955년에 教育課程을 改訂할때 高等學校 1學年 으로 옮겨서 指導하여 왔던 것이다. 그러나 今 般의 改訂에서는 위에서 보는 바와 같이 도로 中學校로 내리게 되었다. 改正의 理由는 不問하 고 果然 中學校에서 根의 公式을 指導할 수 있 으며, 또 어떤 順序로 指導하는 것이 가장 效率 的인가를 模索하는 것이 本研究의 趣旨이다.

§ 2. 主 題

2次方程式의 指導方案에 對한 實驗研究 問題; 2次方程式을 어떻게 效率적으로 指導할 것인가?

§ 3. 假 說

1. I. Q가 높은 集團은 根의 公式으로 指導하 면 其他는 自然히 解決될 것이다.

2. 2次方程式 指導에 있어서 I. Q가 比較的 높은 集團에 對하여는 歸納的 方法보다 演繹的 方 法이 效率의 일 것이다.

3. 2次方程式 指導에 있어서 I. Q가 比較的 낮은 集團에게는 演繹的 方法보다 歸納的 方法 이 效率의 일 것이다.

§ 4. 研究過程

1. 對象——本校 第 3學年 1, 2, 3, 4班(男子)
2. 期間——1963. 3~1963. 11
3. 節次

過 程	內 容	期 間
文 獻 研 究	方程式에 關한 것 新舊教育課程의 比較 計劃作成	4. 5. 6
基 礎 調 查	實驗集團과 比較集團의 I. Q test 2次方程式을 指導하기 爲한 基礎 學力檢査	9
指 導 順 序 決 定	指導順序와 學級選定 指導計劃書(教案)作成	10
實 驗	4가지順序로 4學級을 實地 授業	10
檢 證 및 解 釋	基礎學力比較 2次方程式의 解法 指導의 成就 度比較 I. Q 比較	11
整 理	統計處理 研究報告書 作成	12

※ 1963年度 文教部 指定研究校로서의 研究論文

[1] ① ②	[2] ① ②	②	[3] ①
②	③	④ ⑤	[4] ①
[5]	[6] ① ②	③ ④	
⑤	[7] ① ②	③ ④	
[8] ⑤	⑥		

§ 6. 實驗의 實際

于先 一般 2次方程式을 導入하기 前에, 純 2次方程式을 指導하였다.

<보기 1> $x^2=9$

<보기 2> $7x^2-15=0$

다음에는 $5x^2-3=22+x^2$ 과 같은 2次方程式을 1次方程式 $5x-3=22+x$ 와 比較하면서 指導하였다.

$$5x^2-3=22+x^2 \dots\dots 5x-3=22+x$$

未知項을 左邊에, 既知項을 右邊으로 移項해서

$$5x^2-x^2=22+3 \dots\dots 5x-x=22+3$$

양변을 未知數의 係數로 나눠서

$$x^2 = \frac{25}{4} \dots\dots x = \frac{5}{2}$$

1次方程式은 여기서 根이 求해졌으나, 純 2次方程式은 平方根을 求해야 한다는 것을 強調하였다.

$$x = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \pm \frac{5}{2}$$

以上과 같은 計算을 指導한 후에 一般 2次方程式에 들어 갔다.

<보기> 둘레가 16cm이고, 넓이가 15cm²인 直四角形의 세로의 길이를 求하였다.

세로를 xcm라고 하면 가로는 (8-x)cm 이므로

$$x(8-x)=15$$

즉, $x^2-8x+15=0$

① 完全平方式으로 고

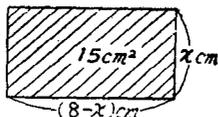
쳐서 푸는 方法

于先 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $a=1$ 인 경우

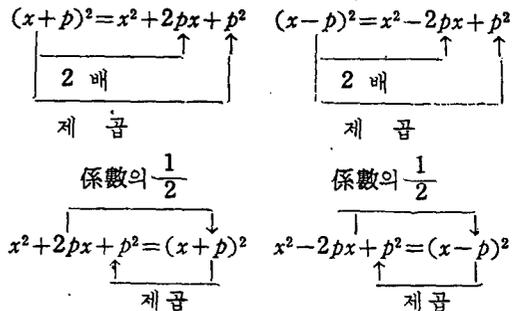
$$x^2+px+q=0$$
을 指導하였다.

$$(x+p)^2=x^2+2px+p^2, (x-p)^2=x^2-2px+p^2$$

을 提示하고 分析해서, 이제곱의 公式으로 展開



된 結果의 各構成을 생각하게 하였다.



以上을 綜合해서 다음과 같은 順序로 完全平方式을 만드는 練習을 시켰다.

$$x^2+bx \rightarrow (x+\frac{b}{2})^2 = x^2+bx+(\frac{b}{2})^2$$

<보기> $x^2+8x \rightarrow (x+4)^2 = x^2+8x+16$

以上과 같은 訓練을 充分히 시키고 나서, $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 의 境遇도 1次方程式에서와 똑같이 未知項을 左邊에, 既知項은 右邊으로 移項한다.

그리고, x^2 의 係數로 兩邊을 나눠서 x^2 의 係數를 1로 고치게 하였다.

즉, $ax^2+bx+c=0$ 을 풀자면,

未知項을 左邊에 既知項을 右邊으로 이항해서 $ax^2+bx=-c$

x^2 의 係數로 兩邊을 나눠서

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

左邊에 $(\frac{b}{2a})^2$ 이 덧붙었으므로 右邊에도 더해준다

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

通分해서 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 의 제곱근을 구하면 $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 와 $-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ 와}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

<보기> $x^2 + 2x - 15 = 0$ <보기> $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = 3, x = 5$$

$$x = 3, x = -\frac{1}{2}$$

<反省> 完全平方에 의한 解法은, 어디까지나 根의 公式를 誘導하기 爲한 한 階段이므로 지나치게 깊이 들어갈 必要는 없다고 생각되었다. 또 根이 無理數가 나올때도 檢算을 시켜야 하겠다.

② 根의 公式에 의한 解法

一般 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 $3x^2 + 7x + 12 = 0$ 과 對照하면서 指導하였다.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad 3x^2 + 7x + 12 = 0$$

상수항을 이항해서

$$ax^2 + bx = -c \dots\dots 3x^2 + 7x = -2$$

x의 係數로 兩邊을 나눠서

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \dots\dots x^2 + \frac{7}{3}x = -\frac{2}{3}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \dots\dots$$

$$(x + \frac{7}{2 \times 3})^2 = -\frac{2}{3} + (\frac{7}{2 \times 3})^2$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \dots\dots$$

$$(x + \frac{7}{2 \times 3})^2 = (\frac{7}{2 \times 3})^2 - \frac{2}{3}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \dots\dots$$

$$(x + \frac{7}{2 \times 3})^2 = \frac{7^2 - 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \dots\dots$$

$$x + \frac{7}{2 \times 3} = \pm \sqrt{\frac{7^2 - 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \dots\dots$$

$$x = -\frac{7}{2 \times 3} \pm \sqrt{\frac{7^2 - 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots$$

$$x = -\frac{7}{2 \times 3} \pm \frac{\sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = -2$$

특히 일일이 對照하는 것을 強調하였다.

다음에는 다음과 같은 <보기>를 제시하여 연습을 시켰다.

1) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ 2) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

3) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ 4) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

<反省>

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ 의 根의 公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{의 符호 土가 있}$$

기 때문에 처음에는 당황하지만, 根이 2個 있다는 것은 쉽게 理解시킬 수 있었다.

(2) 根의 公式의 導入이 끝나면, 完全平方에 의한 解法 以前에 取扱한 純 2次方程式 即 $b=0$ 인 境遇도 公式로 計算시킬 必要를 느꼈다. 純 2次方程式을 計算시키면, 根을 1個만 求하는 學生도 많았으나, 公式로 計算시켰더니 根이 2個 있다는 것을 理解시킬 수 있게 되었다.

③ 因數分解에 의한 解法

2次方程式이 $ax^2 + bx + c = 0$ 로 주워졌을 때, 公式로 根을 求하는 境遇에는, a, b, c 의 값이 어떤 것이더라도 機械的으로 計算해서 求할 수 있다. 그러나, 因數分解로 풀면, a, b, c 의 係數가 特別한 境遇에만 因數分解할 수 있으니까 問題가 생긴다. 특히 x^2 의 係數가 1이 아닐 때는, X型으로 곱하는 計算을 해야한다. 이렇게 되면 根의 公式로 求하는 것이 오히려 손쉽다. 따라서 x^2 의 係數가 1인 것.

即 $x^2+px+q=0$ 에 대해서만 適用시켰다.

곱하면 q , 더하면 p 가 되는 두 數 α, β 를 쉽게 찾아낼 수 있을 때는 $(x+\alpha)(x+\beta)=0$ 으로 因數分解할 수 있다는 것을 理解시켰다. 그리고 두 因數의 곱이 0이 되는 것은 적어도 한 因數가 0이 되어야 한다는 事實을 理解시킴으로서

$$x+\alpha=0 \text{ or } x+\beta=0 \text{에서}$$

$x=-\alpha$ or $x=-\beta$ 를 求할 수 있게 指導

하였다. 그러나 學生들은 잘 納得이 안가는 模樣인지 相當한 抵抗을 느꼈다.

<反省>

$ax^2+bx+c=0$ 에서 $c=0$ 인 경우 $x(ax+b)=0$ 으로 因數分解한 다음, 답을 求할 때 $x=-\frac{b}{a}$

만 求하고, $x=0$ 은 잊어버리는 사람이 많았다.

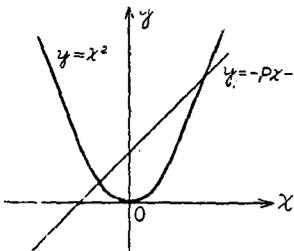
(4) 그래프에 依한 解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 의 根은, 2次函數 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 x 대와의 交點의 座標로 求할 수 있다. 그러나 2次方程式이 주어졌을 때마다 2次函數의 그래프를 그려서 풀어야 한다면, 그래프에 依한 解法은 그리 有用한 方法이 될 수는 없다. 왜 그러나 하면, 그렇게 되면, 2次函數의 그래프를 그리는 것이 큰 問題이기 때문이다. 그렇기 때문에

$ax^2+bx+c=0$ 을 變形해서

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{으로 한다.}$$

지금, $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$ 라고 하면



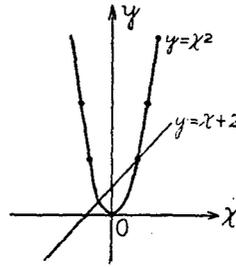
$x^2+px+q=0$ 에서 $x^2=-px-q$ 이다. 여기서 $y=x^2$ 과 $y=-px-q$ 의 交點의 座標를 求하면 되기 때문에 比較的 容易하게 된다.

<보기> $x^2-x-2=0 \quad x^2=x+2$

따라서 $y=x^2$ —(1) $y=x+2$ —(2)에서 (1), (2)의 交點의 座標를 구하게 하였다.

<反省>

(1) $y=x^2$ 과 $y=-px-q$ 의 그림표의 交點의 座標로 根을 求함과 同時에 根의 公式으로도 根을 求해서 比較해볼 必要가 있다.



(2) $y=x^2$ 과 $y=-px-q$ 의 그림표가 만나지 않을 때는 根이 없고 (虛根), 接할 때는 根이 1個(等根)만 있다는 것을 理解시킬 수 있다.

§7. 檢證 및 解釋

<檢證> 以上과 같이 指導한 後, 그 結果를 比較하기 爲해서 다음과 같은 問題로 學習成 就度를 檢査하였다. 그 結果는 다음과 같다.

	I. Q	基礎學力	2次方程式	順 位
3~1	130	69	68	1
3~2	128	68	61	4
3~3	129	70	65	2
3~4	127	70	62	3

學習成就度 檢査用 問題紙

[1] 다음 2차방정식을 풀어라.

(1) $3x^2=27$ (2) $-2x^2=-50$

(3) $x^2-2\frac{1}{4}=0$ (4) $18-2x^2=0$

(5) $\frac{3}{5}x^2-\frac{5}{3}x^2=0$ (6) $3x^2-5=x^2+27$

(7) $(x-1)^2=1$ (8) $(x+2)^2=9$

[2] 다음 각 식에 어떤 수를 더하면, 인수 분해한 결과가 $(x+a)^2$ 또는 $(x-a)^2$ 의 모양으로 되느냐?

(1) x^2-6x (2) x^2+x

[3] 다음 방정식을 완전제곱식으로 고쳐 풀어라.

(1) $x^2-6x+9=1$ (2) $x^2+12x+36=9$

(3) $x^2+14x+49=64$ (4) $x^2+2x=0$

(5) $5x^2-6x+1=0$ (6) $2x^2+3x=6$

[4] 다음 방정식을 풀어라.

(1) $(x-5)^2=0$ (2) $x(2x-3)=0$

(3) $(3x+2)(5x+1)=0$

(4) $(5x-\frac{2}{5})(2x+\frac{2}{3})=0$

[5] 다음 방정식을 인수분해해서 풀어라.

(1) $2x^2-3x=0$ (2) $x^2+15x=0$

(3) $x^2+16x+64=0$ (4) $6x^2-5x+1=0$

[6] 다음 방정식을 근의 공식으로 풀어라.

(1) $x^2-2x-2=0$ (2) $x^2-3x+2=0$

(3) $x^2-6x-8=0$ (4) $x^2-5x+3=0$

(5) $x^2+10x-4=0$ (6) $2x^2-11x+8=0$
 (7) $7x^2+6x+1=0$ (8) $-4x^2+8x-1=0$

<解釋> 以上 實驗에 依하면,

一般 2次方程式 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 의 解法

① 完全平方에 依한 解法 ② 根의 公式에 依한 解法 ③ 因數分解에 依한 解法 ④ 그림표에 依한 解法 等を 어떤 順序로 指導할 것인가?

④의 그림표에 依한 解法은 別問題로 하고,

① 完全平方方式으로 고쳐서 푸는 方法은 根의 公式를 指導하기 위한 한 階段이다. 따라서 2次方程式의 解法을 完成하기 爲해서는 반드시 거쳐야 할 過程이다. 그러므로 2次方程式의 指導에서 問題되는 것은 ② 根의 公式와 因數分解의 關係라고 볼 수 있다. 즉 根의 公式이 먼저냐? 因數分解가 먼저냐가 問題가 된다. 以上 4가지 方法을 比較하면 다음과 같다.

① 完全平方에 依한 方法

根의 公式를 導入하기 前에 꼭 指導하여야 할 過程이다. 完全平方을 指導하지 않고, 根의 公式를 導入하였더니, 다만 公式를 외우는 結果가 되고 말어 學生들에게 公式를 強要하게 되었다. 即 어떤 過程을 밟아서 根의 公式를 誘導하느냐를 納得시킬 必要를 切實히 느꼈다.

② 根의 公式에 依한 解法

根의 公式는 一般의인 解法으로서, 어떤 特別한 境遇라도 適用된다. 그리고, 根의 公式를 完全히 理解한 學生들은 2次方程式하면 아무리 因數分解가 쉽게되는 問題라도 根의 公式으로 解決하려고 하는 傾向이 많이 눈에 띄게 되었다

③ 因數分解에 依한 解法

因數分解에 依한 解法은, 特別한 2次方程式에 단 (簡單히 因數分解되는 것)適用되는 欠點이 있다. 또 因數分解하였을 때 0因子 $AB=0$ ($A=0$ or $B=0$)의 性質을 指導하는데 相當한 抵抗을 느꼈다.

따라서 根의 公式指導에 앞서서 指導할 수는 없을 것 같다. 그러나 簡單히 因數分解되는 것만은 根의 公式의 簡便法으로 指導할 수 있으며 이것이 또 그 長點인것 같다.

④ 그림표에 依한 解法

그림표에 依한 解法은 다음과 같이 2가지만을 指導하였다.

① 2次方程式의 根을

$y=ax^2+bx+c$ 와 X 대의 交點의 座標로 求하는 方法

② $y=x^2$ 과 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ 의 交點의 座標로 求하는 方法

①②을 比較하면, ②이 ①보다 쉽게 理解되고, 또 그림표도 그리기 쉬웠다. 그러나, 根이 近似值로 나오는 까닭에 興味를 느끼지 못하고, 根으로 正確한 根을 求해 놓고 그림표를 그리는 學生들이 있었다. 그러므로 計算으로 求하는 方法을 全部指導한 後에는 無意味하다 그러나, 根이 몇개 있다든지 또는 없다든지 하는 것을 알리는 데는 좋은 方法이라고 생각되었다.

§ 8. 結言 및 反省

2次方程式을 中學校에서 根의 公式으로 푸는 方法까지 指導하기로 擴充한 것은 數學教育의 振興이 切實히 要求되는 우리 나라에 있어서 오히려 늦은 感이 있으나 當局의 勇斷이라고 할 수 있다. 그러나, 이것이 中學校에서의 數式이나 方程式의 總決算인 同時에 學生들의 計算能力이나 思考發達의 程度로보아 從來 高等學校에서 取扱한 指導方法이나 指導內容을 그대로 移植할 수는 없다. 여기서, 中學校에서는 어떻게 指導하느냐가 問題된다. 또, 2次方程式을 充分히 익히기 爲해서는 問題를 많이 練習시켜 體驗시켜야 하겠지만, 이것만으로 끝나면, 形式的인 計算에 끝치고, 數學科에서 바라고 있는 理致를 따져서 課程을 밟아나가는 習慣이나, 事物을 생각해서 問題解決하는 態度를 기를 수가 없을뿐더러 한번 工夫한 것이라도 얼마 후이면 잊어버리기 쉽다. 이런 뜻에서 以上과 같은 內容으로 研究하였으나, 워낙 淺學한 까닭에 不足한 點이 한 두가지가 아니다.

(1) I, Q 가 높은 集團에서는 根의 公式에 依한 解法을 指導할 수 있으나 그렇지 못한 集團에서는 어떻게 할 것인가?

(2) 時期的으로보아 進學準備를 따로 하는 學生들은 家庭學習이나 其他 方法으로 이미 알고 있으므로 늦은 感이 있다.

(3) 文章題의 問題를 다룰 때 式을 세우는 手續을 어떻게 시킬 것인가 反省되는바 많다.

(서울師大附屬中學校)