<論　說>

進 法 研 究

李 華 永

本文은 1963. 4. 22~5. 20까지 4주간에 있었든 公州師範大學附設 中等敎員研修院 第1回 研修生들의 質疑中 "進法"에 對한 筆者의 講義內容의 一部分임 .

一. 進法의 歷史的考察

어떤 物件들의 集合이 있을때 이것을 세는 데는 가장 널리 이 地球上의 人間들에게 알려진 10進法의 方法이 있다 즉

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 ································

이와같은 10씩 10씩 되푸리 되며 다시 1. 2. 3. 4············로 세는 方法을 10進法이라 한다.

그러면 우리는 하필 10진법으로만 物件을 셀까? 가령 5씩 5씩 되푸리 되는 5進法으로도 物件을 셀수 있을 터인데 즉

하나 둘 셋 넷 다섯
다섯하나 다섯둘 다섯셋 다섯넷 둘다섯
둘다섯하나 둘다섯둘·················

이와같은 셈 법도 있을것 같다.

다음에 여러가지 進法의 歷史的考察을해 보자

2 進法···오스트렐리아에사는 쿠인 스라드土人은

「하나 둘 둘하나 둘둘 둘둘하나·········」

라고 세었으며 아프리카의 피구미族은

「*a oa oa—a oa—oa oa—oa—a*······」

라고 세었다 한다.

3 進法······古代人이나 未開人이 使用한것을 볼수 있다. 2진법보다 3進法을 使用한 證據가 確實한 便이다. 다스마니아土民은 「1. 2. 多數」라 使用했으며 테이라델휘고部族 야강 훼기앙은

「가웨리 (kaueli) 콤바이 (kombai) 마텡 (maten) 아코콤바이 (Akokombai) 아코마텡 (Akomaten)···」

이라고 셈 하였고 아프리카의 데마라는

「하나 둘 셋 셋하나 셋둘·········」

이라 세었다 한다 또 古代 훼니끼아 人은 初期의 記號의 어떤것은 表現 方法이 세개씩 모여서 이루어 진 것을 보면 三進法의 表示라고 볼수 있다.

4 進法······南아메리카 部族에서 볼수 있는데

「하나 둘 셋 넷하나 넷둘·· ··」

이라고 세어 넷을 가장 큰 수자로 보았다.

5 진법······最初로 널리 使用된 셈법은 5進法이다. 2. 3. 4進法은 人類들이 試圖한것으로 微力한것에 不過하다고 볼수있으며 좀 큰 수를 셀 하는데 한 손의 다섯 손가락으로 表示하게 된 데서 부터 5進法이 由來했다고 보고 있다. 이것은 南아메리카에서 볼 수 있고 아프리카의 一部族에서 同一한 方法을 볼 수 있는데

「하나 둘 셋 넷 다섯 다섯하나 다섯둘······」

이라고 셈한다. 로마數字는 우리가 現在 使用하고 있는 것으로써 5진법의 表現임을 곧 알수 있다. 즉.

「Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ Ⅸ Ⅹ Ⅺ Ⅻ······」

으로 5進法으로 옛날 수셈한것을 알수 있다.

7 進法······「1. 2. 3. 4. ······」와 같은 수의 表現이 아니더라도 1週日의 曜日인 「日月火水木金土」는 순환하는 값이며 「第三週月曜日」하면 마치「셋일곱둘」과 같은 것이라 보아도 무방할것이다. 그렇다면 曜日은 7進法의 表現이라고 볼 수 있다.

10進法······全世界를 通하여 各國에서 가장 널리 使用하는 것으로.

「하나 둘 셋 넷 다섯 여섯 일곱 여덟 아홉 열 열하나 열둘·········」

즉 10씩 10씩 되푸리 하고 있다.

이 셈법은 아득한 옛날부터 여러 民族間에 使用해 왔는데 이 10進法이 採用된 가장 큰 理由는 두 손의 손가락수가 10개 있기 때문이라고 보아야 할것이다. 손은 모든 物件을 우선 만지며 손 가락은 쉽게 그 수를 表現할수 있기 때문에 10진법이 널리 使用된것이다. 印度에서 由來한 現行의 아라비아數字는 10進法이다.

11進法······뉴지랜드에선 11진법이 사용되었었

다. 11진법은 佛蘭西의 數學者 라구란쥬같은 사람이 主張한 命數法으로 便利한 點은 10進法으로 表示된 小數 가령 0.6을 分數로 고치면 10進法에선 $\frac{6}{10}$ $\frac{3}{5}$의 두가지 表示方法이 있는데 11진법에서는 $\frac{6}{11}$이 되어 表示方法이 한가지 만으로 된다.

12進法……人間의 知慧가 發達됨에 따라나온 12진법은 1년의 月數(太陰曆)에서 由來하여 사람의 마음을 끌게하였다. 뿐만 아니라 12는 約數 2.3.4.6을 가지며 先史時代 世界各國에서 或은 測量에 使用했고 或은 方位에 或은 時間에 使用했다. 12進法의 例는 얼마든지 들 수 있어

거리 單位에서 1휘드는 12인치(inch)

갯수 셈에서 1打(Dozen)는 12개

금전 셈에서 1실링은 펜스

黃道의 方位인 12宮 時計의 시간표시板 中國에서 由來한 時間의 이름인 十二支 (子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥) 音의 十二律…………

그리고 수 셈의 遺物로는 英語에서 볼 수 있는 11을 eleven이라 부르며 one ten이라 부르지 않는 것으로 알 수 있다.

20進法……先史時代의 人間生活에서 20進法이란 當然이 있을법하다. 그 當時는 맨발로써 生活을 했기 때문에 손가락과 발가락을 합치면 20이었고 이것으로 數를 表示했기 때문이다.

現在 英語에서 使用하는 스코어(score)는 20이란 뜻이다(링컨의 Four score and seven years ago;87년전의 말에서도 볼 수 있다) 또 佛語의 80은 까뜨르 뱅(Quatre Vingt=4×20)120은 시스뱅(six－vingt=6×20) 등은 20進法의 遺物이며 和蘭人이 50을 「20의 2倍와 10의 合」이라고 말하는 것이라 든지 其他 멕시코의 마야人 그린랜드人이 20을 只今까지말 한方法으로 使用하고 있음을 볼 수 있다.

60進法……B.C 2300～B.C 1600에 바비로니아人이 使用한 證據가 있다 그들은 春夏秋冬이 約 230日이면 循環됨을 알았으며 그로 因하여 한 圓周角이 360°인 것이 나왔다 또 반지름으로 圓周를 나누어 보니 60°씩 6개로 나누어 짐을 알았다. 그들은 다시 1°=60′ 1°=60″로 생각하게 되었다. 이 60진법은 時間의 分과 秒에도 適用하게 되어 1時間=60分 1分=60秒로 하여 現在도 使用하고 있음은 60 進法의 유물이라고 할 수 있다.

二. 進法을 다시 생각하게 된 理由

今日 全 世界의 大多數의 나라가 10進法을 使用하고 있는데 어떤 物件의 集合을 셈하는데 있어서 10진법 이외의 方法도 생각 할 수 있다. 習慣上 10진법이 便宜한것 뿐이지 數學的인 意味에서는 2進法 以上의 어떤 進法으로도 數 셈은 可能하다고 볼 수 있다. 同一한 事物을 다른 角度에서 관찰하는 思考는 우리에게 새로운 뜻을 갖어다 주는 例가 있다.

美國에서 새로 만든 電子計算器(Value Computer)는 10進法의 數를 2進法으로 表現하여 記憶裝置 計算裝置 制御裝置로 되어 있어 眞空管 3,500本을 使用하여 2進法으로 부터 10進法으로 바꾸는 回路를 使用하여 만들어져 있다.

또 古代 中國에서 B.C1000年頃 發明된 주판(abacus)은 10進法의 計算道具(十露盤)로써 上段(天) 2개와 下段(地) 5個로 되어 있던 것이 上段 1개下段 5個로 日本에서 改良되었고 다시 改良되어 上段 1개 下段 4개로 되어 9進法의 形態를 가추게 되었다.

三. P進法의 數學的 表現

p를 1아닌 한 自然數(陽의 整數)라 하자 임의의 自然數 α를 p로 나누면 보통

$$\alpha=q_1p+a_0 \qquad a\leqq a_0\leqq p$$

라 쓸 수 있으며 위에서 q_1을 몫, a_0를 나머지라한다. 이때 $q_1<\alpha$이다. 위에서 $q_1\geqq p$면 다시 p로 나눈다. 이 계산을 계속하면

$$\alpha=q_1p+a_0 \quad o\leqq q_1<\alpha \quad o\leqq a_0<p$$
$$q_1=q_2p+a_1 \quad o\leqq q_2<q_1 \quad o\leqq a_1<p$$
$$q_2=q_3p+a_2 \quad o\leqq q_3<q_2 \quad o\leqq a_2<p$$

………………………………………

q_1 q_2 q_3………는 차츰 작아지므로 有限回에서 p보다 작어진다. 이것을 다음과 같이 쓰자.

$$q_{n-1}=a_np+a_{n-1} \quad o\leqq a_n<p \quad o\leqq a_{n-1}<p$$

이들 式을 차례로 代入하여 계산하면

$$\alpha=q_1p+a_0$$
$$=(q_2p+a_1)p+a_0$$
$$=q_2p^2+a_1p+a_0$$

$=q_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots\cdots+a_2p^2+a_1p+a_0$

여기서 $n \geqq o$ 일때 p의 계수를 부처 놓은 수

$$\alpha=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots\cdots\cdots a_2a_1a_0 \qquad (1)$$

를 α의 p進法表現이라 한다. 또 $n<o$면

$$\alpha=\underbrace{0.\,00\cdots\cdots0}_{n-1\text{ 개}}\ a_n\ a_{n-1} \qquad (2)$$

로 表現된다.

(참고) 위에서 $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots a_1, a_0$는 모두 $o \leqq a_i <$ p인 自然數이며 a_i의 값은 0이 되는 경우도 있으며 a_i의 數字는 0, 1, 2, …p−1까지 모두 p개가 使用된다.

보기1 : 10進法을 p=10이라 쓰자 그러면

p=10의 수 2304는

$$2304=2\times10^3+3\times10^2+0\times10+4$$

또 0.0723은

$$0.0723=7\times\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+3\times\frac{1}{10^4}$$

보기 2 : 10進法의 數 1689를 7進法으로 表現하면

$$1680=241\times7+2$$
$$241=34\times7+3$$
$$34=4\times7+6$$

1들을 차례로 代入하면

$$1689=241\times7+2$$
$$=(34\times7+3)\times7+2$$
$$=34\times7^2+3\times7+2$$
$$=(4\times7+6)\times7^2+3\times7+2$$

∴ (p=10)　1639=4632　(p=7)

간편셈으로 다음과 같이 해도 좋을 것이다.

7) 1689
7) 241…………2
7) 34…………3
4…………6

답 4632

보기 3 : p=10의 수 1698을 0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.a.b.의 12개의 自然數를 使用하여 12進法의 수로 고쳐라.

(p=10)　1698=11×12²+9×12+6=b96　(p=12)

(주의) 위의 보기에서 b96=1196이므로 그대로 쓰면 11이 한 수를 뜻하고 있으니 <u>11</u> <u>9</u> <u>6</u> 이라고 쓰는 것도 方法의 하나가 될것이다.

보기 4; 2進法에선 0.1의 두 수만 사용하게 되며 10進法의 數와 대응시켜 보면 다음과 같다.

p=10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9…
p=2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001…

(참고) p<10의 수의 整數表를 6에서 보라.

四. S進法을 r進法으로 고치기

(S.r는 10이 아닌 整數)

方法 1. S進法을 10進法으로 고친다.

2. 10進法으로 고친것을 r進法으로 고친다.

즉 (S진법)←→(10진법)←→(r진법)

보기 p=5의 수 2310은 p=7의 얼마냐?

(p=5)　$2310=2\times5^3+3\times5^2+1\times5+0$

$=250+75+5=330$　(p=10)

(p=10)　$330=6\times7^2+5\times7+1=651$　(p=7)

답 651 (p=7)

五. 四則計算의 例

덧셈과 곱셈에 對하여 뺄셈과 나눗셈은 그 逆算이므로 덧셈과 곱셈에 對한 數表를 만들어 보자.

p=2의 덧셈표

101	101	110	111	1000	1001	1010
100	100	101	110	111	1000	1001
11	11	100	101	110	111	100
10	10	11	100	101	110	111
1	1	10	11	100	101	110
0	0	1	10	11	100	101
가수/피가수	0	1	10	11	100	101

p=2의 곱셈표

⋮	⋮				
100	100	1000	1100	10000	10100
11	11	110	1001	1100	1111
10	10	100	110	1000	1010
1	1	10	11	100	101
승수/피승수	1	10	11	100	101

p=2의 加減乘除의 보기

$$\begin{array}{r}101\\+\ 11\\\hline1000\end{array}\qquad\begin{array}{r}1010\\-111\\\hline11\end{array}\qquad\begin{array}{r}1011\\\times\ 11\\\hline1011\\1011\ \\\hline100001\end{array}$$

```
          10.0110……
101) 1100
      101
     1000
      101
      110
```

(순환 소수가 된다)

```
      1.21……
22)120
    22
   210
   121
   120
```

(순환 소수가 된다)

p=3의 덧셈표

⋮						
11	11	12	20	21	22	100
10	10	11	12	20	21	22
2	2	10	11	12	20	21
1	1	2	10	11	12	20
0	0	1	2	10	11	12
/	0	1	2	10	11	12…

p=3의 곱셈표

⋮						
12	12	101	120	202	221	1010
11	11	22	110	121	202	220
10	10	20	100	110	120	200
2	2	11	20	22	101	110
1	1	2	10	11	12	20
/	1	2	10	11	12	20

p=3의 加減乘除의 보기

```
  121        121        121
+  22      -  22      ×  22
  220         22       1012
                      1012
                      11202
```

p=5의 덧셈표

⋮						
11	11	12	13	14	20	21
10	10	11	12	13	14	20
4	4	10	11	12	13	14
3	3	4	10	11	12	13
2	2	3	4	10	11	12
1	1	2	3	4	10	11
0	0	1	2	3	4	10
/	0	1	2	3	4	10…

p=5의 곱셈표

⋮						
11	11	22	33	44	110	121
10	10	20	30	40	100	110
4	4	13	22	31	40	44
3	3	11	14	22	30	33
2	2	4	11	13	20	22
1	1	2	3	4	10	11
/	1	2	3	4	10	11…

p=5의 加減乘除의 보기

```
  234        234        234          43
+ 103      - 103      ×   3      3)234
  342        131       1312         22
                                    14
                                    14
                                     0
```

六. 整數表. 小數表

p=10에 對應하는 10進法 以下의 進法에 對한 整數表

p=10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13…
p=2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101
p=3	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111
p=4	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31
p=5	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23
p=6	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15	20	21
p=7	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15	16
p=8	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15
p=9	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14

(참고) 위에서 p=10의 0은 다른 進法에서도 0이다.

p=10의 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9에 對應하는 다른 進法의 小數表.

p=10	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
p=2	$0.0\dot{0}01\dot{1}$	$0.\dot{0}01\dot{1}$	$0.0\dot{1}00\dot{1}$	$0.\dot{0}11\dot{0}$	0.1	$0.\dot{1}00\dot{1}$	$0.1\dot{0}11\dot{0}$	$0.\dot{1}10\dot{0}$	$0.1\dot{1}10\dot{0}$
3	$0.\dot{0}02\dot{2}$	$0.\dot{0}12\dot{1}$	$0.\dot{0}22\dot{0}$	$0.\dot{1}012\dot{1}$	$0.\dot{1}$	$0.\dot{0}22\dot{0}$	$0.\dot{2}00\dot{2}$	$0.\dot{2}10\dot{1}$	$0.\dot{2}20\dot{0}$
4	$0.0\dot{1}\dot{2}$	$0.\dot{0}\dot{3}$	$0.1\dot{0}\dot{3}$	$0.\dot{1}\dot{2}$	0.2	$0.\dot{2}\dot{1}$	$0.2\dot{3}\dot{0}$	$0.\dot{3}\dot{0}$	$0.3\dot{2}\dot{1}$
5	$0.0\dot{2}$	0.1	$0.1\dot{2}$	0.2	$0.\dot{2}$	0.3	$0.3\dot{2}$	0.4	$0.4\dot{2}$
6	$0.0\dot{3}$	$0.\dot{1}$	$0.1\dot{4}$	$0.\dot{2}$	0.3	$0.\dot{3}$	$0.4\dot{1}$	$0.\dot{4}$	$0.5\dot{2}$
7	$0.\dot{0}46\dot{2}$	$0.\dot{1}25\dot{4}$	$0.\dot{2}04\dot{6}$	$0.\dot{2}54\dot{1}$	0.3	$0.\dot{4}12\dot{5}$	$0.\dot{4}62\dot{0}$	$0.\dot{5}41\dot{2}$	$0.\dot{6}20\dot{4}$
8	$0.0\dot{6}31\dot{4}$	$0.1\dot{4}6\dot{3}$	$0.2\dot{3}14\dot{6}$	$0.\dot{3}14\dot{6}$	0.4	$0.\dot{4}63\dot{1}$	$0.5\dot{4}63\dot{1}$	$0.\dot{6}31\dot{4}$	$0.7\dot{1}46\dot{3}$
9	$0.\dot{9}\dot{8}$	$0.\dot{1}\dot{7}$	$0.\dot{2}\dot{6}$	$0.\dot{3}\dot{5}$	$0.\dot{4}$	$0.\dot{5}\dot{3}$	$0.\dot{6}\dot{2}$	$0.\dot{7}\dot{1}$	$0.\dot{8}\dot{0}$
10	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
11					$0.\dot{5}$				
12									
⋮									

윗 表에서 보면 가령 p=10의 0.1에 屬하는 類(Class)의 수는 같지 않은 進法에 對한 同一値라고 볼 수 있다. 즉

(p=10) $0.1=0.0\dot{0}01\dot{1}$ (p=2) $=0.\dot{0}02\dot{2}$

(p=3) $=0.0\dot{1}\dot{2}$ (p=4) $=\cdots\cdots\cdots\cdots$

이 계산방법은 다음과 같다.

$$(p=10)\quad 0.1=\frac{1}{10}=\frac{1}{1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0}$$

$$\frac{1}{1010}=0.0\dot{0}01\dot{1}\ (p=2)$$

```
          0.00011001
1010)10000
       1010
      ------
       1100
       1010
      ------
        10000
```

여기서 S進法의 分數는 小數로 表示可能인 것을 알 수 있다.

(참고) 위의 小數表는 p=10의 小數點 以下 한 자리의 경우에 對한 表인데 可能하면 2자리 以上의 경우에 對한 小數表도 만들고저 한다. 또 p=10을 基準으로 한 表인데 다른 進法을 基準으로 하여서 表를 만들수도 있는 것이다.

(公州師範大學)