

數學學習에서 素地가 미치는 影響

李 錫 暎

§0. 序 論

오늘날 中高等學校에서의 教育狀況을 보면 各科에 걸쳐 大部分 教科書에 準하여 그 教科書의 順序대로 內容을 指導해 나가고 있다.

그런데 學生들은 學年이 높아갈수록 學習에서의 낙오자가 많이 생기며 또 優劣의 差가 심하게 생기게 된다. 特히 數學은 系列性이 강한 學科로서 미리 배운 基礎事項의 不完全한 理解와 計算技能의 결핍으로 인하여 새로 나오는 單元學習에 있어서 學生들은 많은 애로와 沈증을 느끼어, 심하면 수학을 포기하는 상태에 까지 들어가게 된다.

따라서 새로운 單元을 指導하기 前에 그 單元全般에 걸쳐서 學習上 必要한 여러가지 基礎事項 (이것을 素地⁽¹⁾라함)을 미리 테스트하여 교정지도 하고 나서 그 單元의 內容을 가르치는 것이 學生들의 興味面에서나 또는 理解를 쉽게 하는 點에서 많은 效果를 볼것이다. 그런데 一般으로 이것으로 因하여 時間의 不足을 招來하는 것으로 생각하기 쉽다.

本論文은 一定한 時間의 一部를 素地確立에 割當하는 것이 數學學習의 效果를 向上시키는 데 보다 좋은 成果를 올릴수 있다는 것을 보이도록 하는 것이다.

§1. 實驗樣本選定

실험대상은 祥明女高 第2學年에서 學級成績이

A 반

점 수	학생 수
이상 미란	3
25 ~ 35	7
35 ~ 45	10
45 ~ 55	17
55 ~ 65	13
65 ~ 75	8
75 ~ 85	2
85 ~ 95	
합 계	60

B 반

점 수	학생 수
이상 미란	5
35 ~ 45	14
45 ~ 55	18
55 ~ 65	12
65 ~ 75	7
75 ~ 85	3
85 ~ 95	
합 계	59

A 반..... $\bar{x}_A=60$, $S^2_A=14.6^2$ $n_A=60$

B 반..... $\bar{x}_B=61$ $S^2_B=12.6^2$ $n_B=59$

비슷한 두 學級을 擇하여 A 반, B 반이라 하였다. 이 두반의 64년도 1학기 해석점수의 분포 狀況을 조사하면 앞과 같다.

이 두 學級의 成績은 F檢定과 t檢定에 依하여 母分散과 母平均이 같다는 假說을 reject 할수 없으므로 同質學級으로 認定된다.

§2. 學習單元 및 指導計劃

教科書는 李星憲지음 “고등학교 해석”을 使用하였고, 지도내용은 표본으로 선정된 두 學級이 高二에서 다룰 內容의 $\frac{2}{3}$ 를 마친 것으로 보고, 수열의 高찰중 등차수열과 등비수열을 指導하여 보았다. 時間은 A, B 두반 모두 9시간으로 配定하고, A반은 그 9시간중 2시간은 素地test 및 그 교정지도로 소비하고, 7시간에 B반이 9시간에 걸쳐서 다룬 內容을 해 내는 것이다.

[學習指導計劃]

A 반 (素地지도반)		
문	계	시 간
1. 素地 tset		1
2. 素地 교정지도		1
3. 수열의 뜻 등차수열의 정의 일반항식 및 그 응용		2
4. 등차중합, 등차수열의 합공식 유도 및 그 응용		2
5. 등비수열의 정의 일반항식 및 그 응용		1
9. 등비중합 등비수열의 합공식 유도 및 그 응용		2
계		9
B 반 (보통지도반)		
문	계	시 간
1. 수열의 뜻, 말항, 일반항 무한수열, 유한수열		1
2. 등차수열의 정의, 등차중합 일반항식 및 그 응용		2
9. 등차수열의 합공식 유도 및 그 응용		2
4. 등비수열의 정의 일반항식 및 등비중합 및 그 응용		2
5. 등비수열의 합공식 유도 및 그 응용		2
계		9

§ 3. A 반지도

등차수열과 등비수열을 學習하는데 있어서 學生들이 必要로 하는 素地를 分類하면 다음과 같다.

1. 수식 계산
2. 一次方程式의 변환
3. 인수분해
4. 정수의 성질
5. 2차방정식의 풀이 및 최대 최소값구하기
6. 지수법칙
7. 연립방정식
8. 부등식

9. 로그의 기본공식

以上 各項目의 問題를 2개씩 選定하여 모두 18問題로 第1차시에 예고없이 테스트를 실시하였다. 그 테스트의 성적분포표를 만든후 제2차시에 답안지를 다시 학생들에게 돌려주고, 정답을 알려준 다음 class standing이 좋지 않은 項目에 對하여는 特別指導를 행했고, 그래도 부족한 學生에게는 個人指導를 實施하였다.

本單元 指導에 있어서는 비슷한 문제는 반정도만 지도하고, 나머지는 숙제로 과하였다.

素地 test의 結果는 아래와 같다. (3)

[Pupil's responses before studying the unit]

번호	성명	수식의 계산		일차방정식 변환		인수분해		정수의 성질		이차방정식의 풀이 및 최대 최소값구하기		지수법칙		연립방정식		부등식		로그의 성질		Pupil Standing	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
1	박명실		X		X	X	X	X		X		X		X		X	X	X	X		12
2	이순분	X	X	X		X				X		X		X	X				X		9
3	최옥경	X	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	16
4	정천익	X		X					X	X		X		X		X	X				8
5	박명애					X													X		2
6	김원숙	X	X	X		X	X		X	X	X	X		X		X	X	X	X	X	14
58	정영임	X	X		X		X		X			X		X					X	X	9
59	김숙영	X	X	X	X	X	X		X			X		X	X	X	X			X	13
60	이능자	X					X							X							3
Class standing (정답수)		51	43	42	45	42	48	28	10	30	18	40	12	29	25	31	30	18	22		
Percent Correct (정답율)		% 85	71	70	75	70	80	47	17	50	30	67	20	48	42	51	50	30	37		
Familiar material		X					X														
need to reteach									X		X		X						X		

§ 4. B 반지도

처음 수열을 導入할때에 數列의 뜻을 說明하고, 무한수열, 유한수열의 定義 및 一般項과 末項의 差異點을 強調하는데 1時間을 소비하였다.

등차수열 및 등비수열의 一般項公式을 利用하여 應用問題를 풀어갈때에 식을 세우기까지는 이해하나 답을 낼때에는 一次方程式의 변환이나 연립방정식에 있어서 미지수가 x, y 가 아닌 다른 문자로 되어 있기 때문인지 풀어나가는 과정을

무척 어렵게 생각하고 있다.

B반지도는 指導計劃에 依해서 教科書順序대로 展開해 나갔는데, 다만 A반지도에서는 類似問題를 時間中에 다 풀지 않고, 그 一部를 숙제로 課하며, 후에 숙제조사를 철저히 한데 반하며, B반에서는 時間의 여유가 있어서 그 時間中에 學生들과 더불어 問題를 풀어 나갔다.

§ 5. 結果評價

A반, B반 모두 9시간에 걸쳐서 지도한 등차

수열과 등비수열의 內容中에서 理解面과 技能面을 中心으로 모두 10문제로 그 結果를 테스트해 보았다.

A반, B반의 成績分布狀況은 다음과 같다.

A반 (素地지도반)

B반 (보통지도반)

x	f
이상 미만	
30 ~ 40	10
40 ~ 50	6
50 ~ 60	7
60 ~ 70	10
70 ~ 80	11
80 ~ 90	9
90 ~ 100	7
計	60

x	f
이상 미만	
20 ~ 30	2
30 ~ 40	9
40 ~ 50	12
50 ~ 60	7
60 ~ 70	12
70 ~ 80	10
80 ~ 90	5
90 ~ 100	2
計	59

A반..... $\bar{x}_A=65, S^2_A=19^2, n_A=60$

B반..... $\bar{x}_B=55, S^2_B=18^2, n_B=59$

여기서 두 學級의 母分散이 같다는 假說을 檢定하자.

$$H_1: H_1: \sigma^2_A = \sigma^2_B$$

$$F = \frac{n_A S^2_A / (n_A - 1)}{n_B S^2_B / (n_B - 1)} = \frac{60 \times 19^2 / (60 - 1)}{59 \times 18^2 / (59 - 1)}$$

$$= \frac{60 \times 58 \times 19^2}{59^2 \times 18^2} = 1.11 < 1.73 = F_{0.05}^{(60, 59)}$$

따라서 위험을 5%로 H_1 을 reject 할수 없다. 곧 두 學級의 母分散은 같은 것으로 볼수 있으므로 두 母平均을 比較하는데 student의 t分布를 利用할수 있다.⁽²⁾

다음에 두 學級의 母平均을 比較하기 위하여 母平均이 같다는 假說을 세워보자.

$$H_2: m_A = m_B$$

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{n_A S^2_A + n_B S^2_B}} \sqrt{\frac{n_A n_B (n_A + n_B - 2)}{n_A + n_B}}$$

$$= \frac{65 - 55}{\sqrt{60 \times 19^2 + 59 \times 18^2}} \sqrt{\frac{60 \times 59 (60 + 59 - 2)}{60 + 59}}$$

$$= 2.92 > 1.96 = t_{0.05}$$

따라서 H_2 는 reject 된다. 곧 두 學級의 標本平均에는 有意差를 認定할수 있다.⁽²⁾

한편 各問項別로 두 班의 성적分布를 比較해 본 結果는 다음과 같았다.

위의 表에 나타난 바와 같이 素地指導를 한 A班과 素地지도를 하지 않은 B班과의 成績이 理解를 要求하는 問題에서는 거의 비슷한 結果를 나타내었으나 計算力과 應用力을 要求하는 問題

행 동 문 제	A 班				B 班				
	정답자수	오답자수	計	정답율	정답자수	오답자수	計	정답율	
理 解 面	1	45	15	60	75%	46	13	59	78%
	2	33	27	60	55%	31	28	59	52%
	7	40	20	60	66%	42	17	59	71%
	8	36	24	60	60%	34	25	59	57%
計	154	86	240	64.1%	153	83	236	64.8%	

행 동 문 제	A 班				B 班				
	정답자수	오답자수	計	정답율	정답자수	오답자수	計	정답율	
技 能 面	5	29	31	60	48%	22	37	59	37%
	6	26	34	60	43%	23	36	59	39%
	9	21	39	60	35%	17	42	59	28%
	10	20	40	60	33%	15	44	59	25%
計	96	144	240	40%	77	159	236	32%	

에 對해서는 A班의 성적이 B반의 성적보다 높고 등히 낮다는 것을 알수 있다.

§ 6. 結 論

中高等學校에서의 數學教育의 改善을 위하여 많은 研究를 하고 있는 이때에 實際로 그 研究의 效果를 느끼는 作業이 얼마나 많이 施行되고 있는 지 는 나 하는 點에서 는 약간 의 疑心을 품지 않을수 없다. 따라서 本論文은 우리가 항상 느끼고 있는 면서도 실천을 하지 못하고 있는 先素地指導 後 內容指導의 問題를 實驗을 통해서 그 效果를 檢證한 것이다. 그런데 一般으로 이 素地指導로 인하여 時間의 不足을 招來한다는 것으로 생각하기 쉽다. 그러나 本論文이 증명해 주는 바와 같이 一定한 學習時間의 一部를 素地確立에 할애함으로써 學生들의 興味面에서나 成績向上面에서 보다 좋은 效果를 올리는 것이 결코 餘分의 時間이 消費되는 것이 아님을 再三 느끼게 된다.

끝으로 本論文이 完成되기 까지 여러모로 指導해 주신 서울師大 朴漢植教授께 심심한 感謝를 드리는 바이다.

[Reference]

- (1) 朴漢植 數學教育小辭典 (1962) 서울師大教育會
- (2) Hoel. P.G. Introduction to Mathematical

Statistics., (1954) Wiley, New York
 (3) Butler & Wren The Teaching of Secondary Mathematics (1951).

Appendix

[素地 test 문제]

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \square$
2. $\frac{4}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \square$
3. $a + (n-1)d = l$ 에서 $d = \square$
4. $64 = \frac{n}{2}(1+35)$ 에서 $n = \square$
5. $n^2 - 19n + 78$ 을 인수분해 하며 n 을 구하라
6. $2n^2 + 7n + 3 = (2n+1)(\quad)$
7. 20 과 50 사이에 7의 배수는 몇개 있느냐?
8. 100 이하의 수중 3으로 나누어 지는 수는 \square 개이다.
9. $84 = \frac{x}{2} \{2 \times 21 + (x-1)(-3)\}$ 에서 x 를 구하라.
10. $\frac{1}{6}n^2 - \frac{31}{6}n = \frac{1}{6}(n^2 - \square n)$
 $= \frac{1}{6} \{ (n - \square)^2 - \frac{961}{4} \}$
11. $r^{n-2}r = r^{\square}$ 12. $(-2)^{-4} \times 2^9 = \square$
13. $\left. \begin{aligned} a + d &= \frac{3}{2} \\ a + 3d &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$ 에서 $a = \square$
14. $\left. \begin{aligned} xy &= -12 \\ xy^2 &= 36 \end{aligned} \right\}$ 을 풀이라.
15. 「 a 와 b 의 합의 2배는 음수이다」를 부등식으로 表示하라.
16. $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 에서 $a=2, r=3$ 을 代入한 것이 1000보다 크다」는 것을 식으로 써 보라.
17. $S = 2^{30}$ 의 양변에 로그를 취하여 $\log S = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.0300$ 이 되었다고 하면 S 는 몇자리의 수인가?
18. $\log \frac{x^2 8}{y} = 2 \log x + \square - \square$

[結果 테스트 問題]

(1) 다음 수열에서 등차수열도 등비수열도 아닌것은 어느 것이나?

- ① 8, 5, 2, -1, -4, ... ② 1, 4, 9, 16, 25, ...
 - ③ 1, 2, 4, 8, 16, ... ④ 1, $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, 9
- (2) 다음 수열의 () 속에 알맞는 숫자를 넣어라.
- ① 1, 5, (), (), (), ... (등차수열)
 - ② 8, (), 2, (), (), ... (등차수열)
 - ③ (), -12, 36, (), (), ... (등비수열)
 - ④ (), -6, (), -54, () ... (등비수열)
- (3) 다음 수열중에서 등차수열을 찾아 () 속에 ○표를 하고, 초항, 공차 및 일반항을 구하여라.
- ① 3, 6, 9, 12, 15, ... ()
 - ② 2, -2, 2, -2, 2, ... ()
 - ③ 3, 3, 3, 3, 3, ... ()
- (4) 다음 수열에서 등비수열을 골라 () 속에 ○표를 하고, 그 공비와 일반항을 구하여라.
- ① 2, 4, 6, 8, ... ()
 - ② $\log_2 1, \log_2 4, \log_2 16, \log_2 64, \dots$ ()
 - ③ 2.06, 2.02, 1.98, 1.94, ... ()
 - ④ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ()
- (5) 초항이 19이고, 제 7항이 1일때 공차는 얼마인가?
- (6) 초항이 100, 공비가 0.1인 등비수열의 제 5항은 얼마인가?
- (7) 세수 x, y, z 가 등차수열을 이룰때 등차중항은 어떻게 표시되는가?
- (8) a, x, b 가 등비수열을 이룰때 등비중항은 어떻게 표시되는가?
- (9) 제 n 항이 $2n+3$ 인 수열의 제 15항까지의 합을 구하여라.
- (10) 초항이 2이고, 공비가 3인 등비수열의 제 n 항까지의 합을 구하여라.

(서울大學校 師範大學 助教)