# 立木材積 測定法에 關한 研究

## (用材樹木의 材積測定法을 中心으로)

李　光　南*

# A study on the method of measurement of the standing-tree volume

## (Particularly concerning the method of measurement of the timber volume)

Kwang Nam Lee


### Abstracts

Recognizing shortcomings and unresonable points of the usual methods of measurement of the standing-tree volume, author contrived measurement formula of standing-tree volume which is based on stem-curve equation, $y^2=2px$, resulted from the analysises and experiments on stem-curve by differentiation & integration.

The results of this study are as follows;

(1) The following is the formula.

$V=1/2\ g_{1.2}(h+1.2)$

$V$=volume of tree

$g_{1.2}$=sectional area at breast-heigh

$h$=height of tree

(2) So plain is the form of this formula that this formula is more convenient than usual formulas in mesuring.

(3) The percentage error of this fromula is negative and it is remarkably superior to usual formulas except Pressler's formula, in other words, the higher the tree that is measured is, the more inaccurate become pressler's formmla, and the percentage error of the breast-height form factor method is direct proportion to the grossness of the tree that is measured, but the higher the tree that is measured, the lower become percentage error of this formula in geometrical progression.


## I. 緖　言

立木材積測定에 關한 理論과 方法은 測樹學의 發展과 더부러 많은 學者에 依해서 이미 發表된바 적지않다. 그러나 現今 많이 應用되고 있는 여러 立木材積測定式中에는 測樹式으로서의 要件을 完全히 갖추었다고 할만한 것이 거의 없는데 그 理由는 測定對象인 樹木은 그 形狀이 千態萬像이므로써 立木이나 伐採木의 材積測定에 誤差를 주는 큰 影響因子가 되는 것이지만 더욱 立木은 伐採木과도 달라서 用意周到하게 取扱할 수가 없고 따라서 材積測定上의 所要因子를 正確히 測定하기 甚히 困難하기 때문에 精密한 材積測定 結果를 얻기 어려운데 있을 것이다.

立木의 材積測定에 있어서의 보다 더 精密度가 높은 求積法을 마련할려면 먼저 從來의 여러 幹曲線式에 對한 綜合的인 研究와 樹幹의 形狀에 關한 劃期的인 研究가 先行되어 어떠한 幹形에도 適合度가 크고 普遍性이 있는 一般的인 幹曲線式이 考案되어야 할 것이다. V. Loreng 氏는 幹曲線式으로서 抛物線式 $y=a+bx^{0.939}$를 發表하였고, 鈴木外代一氏는 幹曲線은 neiloid, 抛物線, 直線等으로 이루어져 있는데 其中 抛物線이 大部分을 占하고 있으므로 樹幹曲線을 抛物線으로 보아도 大差없다고 하였으며, Meyer, W.H.氏와 Chapman, H.H.氏는 통나무(穗付)는 大體的으로 paraboloid에 近似한 立體이므로 그의 體積測定에 있어서 paraboloid로 看做된다고 하였다.

또한 兩氏는 한 longleaf pine의 各部位에 있어서의 直徑과 樹高와의 關係를 調査하고 taper curve를 圖示하였는데 그것은 極少의 根張部를 除外하고는 抛物線에 가까운 曲線 即 stem axis에 對해서 凹形曲線을 呈示하였다.

著者 또한 赤松, 黑松, 굴참나무等의 標準木 30餘本을 本 大學 長城演習林에서 採取하여 이것들에 對한 樹幹의 形狀을 樹幹析解圖를 通해서 考察한 結

*全南大學校 農科大學

果 그의 大多數가 抛物線에 近似한 taper curve 였으며, 特히 그 中에서도 針葉樹의 壯令期(大徑木)의 것에 있어서 그러하였다.

著者는 위와같은 事實을 認定하고 보다 더 精密度가 높고 樹幹의 形狀에 拘碍됨이 없이 一般的으로 適用할 수 있는 合理的인 立木求積法 特히 用材樹木의 材積測定法의 出現이 있기를 바라는 생각에서 樹幹의 形狀(縱的形狀) 即 樹幹曲線을 微積分學的으로 分析 考察하여 새로운 樹幹曲線 方程式을 얻고 그를 基礎로 해서 立木求積式을 誘導求得하여 그 結果 및 內容을 報告하는 바이다.

本 論文作成에 많은 激勵와 指導를 하여주신 崔圭鍊 敎授任께 深甚한 謝意를 삼가 올리나이다.

## Ⅱ. 幹曲線式의 誘導

微積分學的 見地에서 볼 때 樹幹은 至極히 纖細한 圓板이 無數히 쌓여서 된 立體라 할 수 있으며, 幹曲線은 어느 一定한 句配(slope of curve)를 가진 點의 規則的인 連續이라 할 수 있다.

그러므로 幹曲線은 如何한 形狀의 曲線이건 即, $y=f(x)$ 인 曲線이라면 幹曲線上의 任意의 點에 있어서도 $x$(樹幹의 距離)의 增加量에 對한 $y$(樹幹의 半徑)의 增加量의 比는 一定値를 줄 것이다.

이때 이 값은 各任意點의 接線이 X 軸 (stem axis)과 이루는 角의 tangent 를 表示하는데 이것은 幹曲線의 differential coefficient 가 된다.

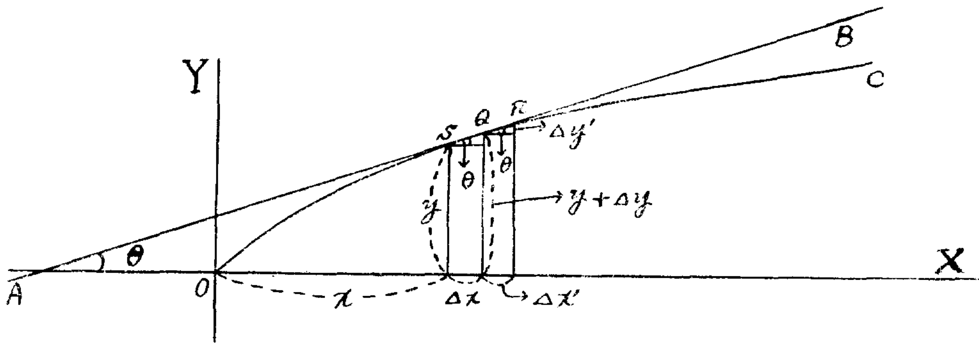



fig. 1. Diagram of stem curve in purport of differentiation.

fig. 1 에서, $y\times\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ ································ (1)

$$(y+\triangle y)\ \frac{\triangle y'}{\triangle x'}=y\ \frac{\triangle y'}{\triangle x'}+\triangle y\ \frac{\triangle y'}{\triangle x'}\ \cdots\cdots (2)$$

(1), (2)式에서 $x$ 및 $y$ 의 增分 $\triangle x$, $\triangle x'$, $\triangle y$, $\triangle y'$ 를 다 같이 infinitesimal 로 보면, 直線 $AB$ 上의 $S$, $Q$, $R$ 點은 幹曲線 $OC$ 의 接點 $Q$ 에 거의 一致한다. ($\angle S$, $\angle Q$, $\angle R$ 도 同位角이므로 $\angle O$ 와 같다)

(1)式은, $y\dfrac{dy}{dx}=y\tan\theta$ ································ (3)

(2)式은, $y\dfrac{dy}{dx}+dy\ \dfrac{dy}{dx}=y tan\theta$ ···················· (4)

∴ (3)式과 (4)式은 equal 이다.

따라서 樹幹曲線은 曲線上의 任意의 點에 있어서의 $y$ 座標(幹의 半徑)와 그 點에 있어서의 tangent (勾配) 即 differential coefficient 와의 積은 恒常 一定値(p)임을 알 수 있다.

以上의 幹曲線에 對한 微分學的 考察에 依하여 다음과 같은 differential equation 을 얻는다.

即, $y\ \dfrac{dy}{dx}=p$

이 differential equation 를 풀면,

$$\int y\frac{dy}{dx}dx=\int pdx$$

$$\int ydy=px+c$$

$$\frac{y^2}{2}=px+c \qquad\qquad \therefore\ y^2=2px+2c$$

그런데 이 曲線($y^2=2px+2c$)은 原點(origin)을 通過하므로 $O=2p\times 0+2c$ 에서 $c=0$ 가 되어

求하는 幹曲線 方程式은

$y^2=2px$ 로 된다.

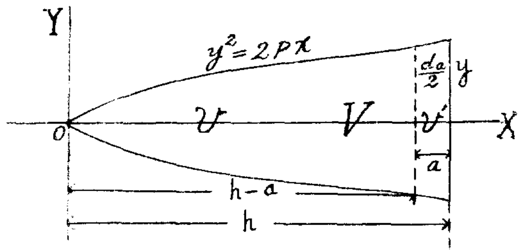
따라서 이 方程式은 parabola 를 表示하는 것이므로 幹曲線은 parabola 임을 確實히 알 수 있다.

幹曲線式, $y^2=2px$ 에 있어서 $x$ 는 梢端으로부터 任意의 部位까지의 距離, $y$ 는 그 部位에 있어서의 半徑, $p$ 는 constant 이다. (赤松本과 黑松 2本을 試料로해서 얻은 $p$ 값의 表省略)

## Ⅲ. 立木求積式의 誘導

樹幹의 體積은 幹曲線 $y^2=2px$ 가 X axis (stem axis)를 軸으로해서 廻轉한 廻轉體로 생각되므로 $y^2=2px$ 를 積分함으로써 求할 수 있다.

卽, $y^2=2px$ 를 積分하면,




$$V=\int_0^{h-a}\pi y^2dx=2\pi p\int_0^{h-a}xdx$$

$$=2\pi p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{h-a}=\pi p(h-a)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$y^2=2px$ 는 幹曲線上의 어느 點에 있어서도 成立할 것이므로,

$$\left(\frac{d_a}{2}\right)^2=2p(h-a) \qquad p(h-a)=\frac{{d_a}^2}{8}\cdots (2)$$

(1) 式에 (2) 式을 代入하면,

$$V=\pi p(h-a)^2=\pi\frac{{d_a}^2}{8}(h-a)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}{d_a}^2(h-a)$$

$$=\frac{1}{2}g_a(h-a)\cdots\cdots\cdots (3)$$ ($a$ 以上部의 材積)

樹木 全體의 材積을 $V$ 라하면,

$$V=v+v'=\frac{1}{2}g_a(h-a)+\frac{\pi}{4}{d_a}^2a=\frac{1}{2}g_a(h-a)+g_aa$$

$$=\frac{1}{2}g_ah-\frac{1}{2}g_aa+\frac{2g^va}{2}=\frac{{g_a}^{h+}{g_a}^a}{2}$$

$$=\frac{1}{2}g_a(h+a)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4) 式의 $a$(斷面積 測定部位)를 胸高(1.2 m)로 하면,

$$V=\frac{1}{2}g_{1\cdot2}(h+1.2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

위의 求積式(5 式) 誘導에 있어서 全樹幹을 胸高以上部($v$)와 胸高 以下部($v'$)로 區分해서 이를 各各 求積하여 合計한 것을 全材積($V$)으로 하였는데 $v$의 材積은 stem curve, $y^2=2px$ 를 積分하여 求積하였고, $v'$ 의 材積은 胸高斷面積($g_{1\cdot2}$)을 斷面으로하고 높이를 胸高(1.2 m)로 한 cylinder 로 하였다.

胸高 以下部를 別途로 區分해서 cylinder 로 한 理由는 樹幹 全體를 完全한 paraboloid 로 보고 求積한데서 오는 error(過大値)를 胸高 以下部 neiloid 代身의 cylinder 로써 減殺하여 error 를 調節하기 爲한 것이다.

## Ⅳ. 本立木求積式의 理論的 誤差率

paraboloid 의 體積式(數學式) $V_p=\frac{h}{2}g_{1\cdot2}\left(\frac{h}{h-1.2}\right)$ 를 眞値로 看做하고, paraboloid 의 體積式($V_p$)에 對한 paraboloid 의 體積式($V_p$)과 本求積式($V$)과의 差의 百分率로써 誤差率($p$)로 하였는데, 그 結果는 다음과 같다.

$$P=\frac{V-V_p}{V_p}\times100$$

$$=\frac{\frac{g_{1\cdot2}(h+1.2)}{2}-\frac{g_{1\cdot2}h^2}{2(h-1.2)}}{\frac{g_{1\cdot2}h^2}{2(h-1.2)}}\times100$$

$$=\frac{\frac{g_{1\cdot2}(h^2-1.2^2)-g_{1\cdot2}h^2}{2(h-1.2)}}{\frac{g_{1\cdot2}h^2}{2(h-1.2)}}\times100$$

$$=\frac{g_{1\cdot2}h^2-1.2^2g_{1\cdot2}-g_{1\cdot2}h^2}{g_{1\cdot2}h^2}\times100$$

$$=-\frac{144}{h^2}\ (\%)$$

위의 式은 $h$(樹高)가 漸次 크게되면 $p$(誤差率)는 反對로 漸漸 작아지는데, 이때 萬若 $h\to\infty$로 된다고 하면, $p$는 限없이 zero에 收斂할 것이다.

卽, $P=\lim_{h\to\infty}-\frac{144}{h^2}=0$ 으로 된다.

그러므로 本求積式은 樹高가 높으면 높을수록 그의 誤差率은 幾何級數的으로 漸漸 減下하여 精密度가 커진다는 것을 알 수 있다.

本求積式의 誤差率(理論的)은 樹高에 依해서 直接 査定할 수 있음으로 $h$와 $p$와의 關係를 알기 위하여 誤差率算出式이라 할 수 있는 $-\frac{144}{h^2}$ 의 $h$에 여러 數字를 代入하여 본바 table 1과 같다.

**table 1.** Percentage error of this formula in different tree-heigh

| height of tree(h)(m) | percentage error(p)(%) | height of tree(h)(m) | percentage error(p)(%) |
|---|---|---|---|
| 6 | −4.00 | 22 | −0.30 |
| 8 | −2.25 | 24 | −0.25 |
| 10 | −1.44 | 26 | −0.21 |
| 12 | −1.00 | 28 | −0.18 |
| 14 | −0.74 | 30 | −0.16 |
| 16 | −0.56 | 32 | −0.15 |
| 18 | −0.44 | 34 | −0.13 |
| 20 | −0.36 | 36 | −0.11 |

## Ⅳ. 討論 및 結論

從來의 여러 立木材積測定法中 重要하다고 생각되는 것은 胸高形數法, Pressler 氏의 望高法 및 略算法(自乘法)等인데 各方法에 對해서 그의 優劣性을 吟味하여 본다면 胸高形數法 $V=g_ahf$ 式은 現今 가장 널리 應用되고 있는 式으로서 이 式中 重要한 因子 $f$(胸高形數)는 普通 0.45～0.50을 使用하고 있는데 形數의 一般式 $f=\frac{1}{r+1}\left(\frac{h}{h-a}\right)^r$에서(一般的으로 樹幹은 paraboloid에 近似하므로 $r$를 1로 본다) $h$(樹高)가 無限大로 될 수 없는 限 原則的으로 0.45～0.50을 使用할 수 없을 것이다. 따라서 現行 胸高形數法으로서는 여기에서 오는 error를 免할수가 없으며 特히 完滿度가 큰 壯令의 喬木(針葉樹)에 適用할 時는 더욱 error가 클것임으로 立木材積測定法으로서는 好評을 받을 수 없는 法이라 생각된다.

Pressler 氏의 望高法 $V=\frac{2}{3}g_a\left(H+\frac{m}{2}\right)$式은 精密度가 매우 큰 測定法이다. 그러나 이 式中의 重要因子 H(望高)는 伐採點으로부터 胸高直徑의 $\frac{1}{2}$ 되는 直徑部位까지의 높이로서 測定이 至極히 困難한 問題의 因子이다. 그러므로 이式 自體로서는 精密度가 매우 크지만 因子測定이 困難하여 因子測定値의 不正確은 勿論이고 結局 材積測定値에 있어서 精密을 期할 수 없는 것이다.

이 點에서 볼 때 Pressler 氏의 望高法도 測定式으로서 具備해야 할 要件의 不備로써 높이 評價할 수 있는 法은 못된다고 생각한다.

略算法(自乘法) $V=\frac{{}^{r}d_a^2}{1000}$ 式은 胸高形數法의 變形法이라 稱할 수 있는 法이다. 그러므로 略算法(自乘法)은 胸高形數法에 있어서와 같은 不合理한 點이 있음을 推知할 수 있으며 그 위에 또 이 法은 樹高 25 m일 때에 限해서만이 成立되는 式이므로 樹高 25 m 以外의 경우에 있어서는 error가 甚히 크게 되어서 測樹에 安心하고 適用할 수 있는 法이 못된다.

本 論文에서 얻은 立木求積式 $V=\frac{g_{1.2}}{2}(h+1.2)$는 그 形式이 簡單하고 精密度가 table 1에서 볼 수 있는바와 같이 매우 높은 求積法으로서 樹高가 높으면 높을수록 誤差率은 이에 따라 幾何級數的으로 減下하여 樹高 36 m의 것에서는 不過 0.10 % 라는 極少의 誤差率을 주는 法이라는것이 밝혀지므로써 本求積法은 立木求積에 있어서 特히 壯令喬木求積에 있어서 好結果를 줄 수 있는 優秀한 法이라는 것을 알았다.

以上 諸點을 根據로해서 從來의 立木求積法과 本求積法과를 綜合的으로 比較檢討하여보면 本求積法은 그 形式이 簡單하며 測定上의 手續이 簡便할 뿐만 아니라 從來의 求積式에 있어서와 같은 不合理한 點이 比較的 적고 測定上의 難點이없다고 생각됨으로 從來의 諸求積法보다도 精密度가 높아서 立木材積測定에 있어서 好結果를 주며 特히 完滿度가 큰 壯令 喬木(針葉樹)에 있어서 優秀한 結果를 준다고 생각한다.

### 參 考 文 獻


1. 吉田正男: 測樹學要論, 1930.
2. 鈴木外代一: 測樹學, 1943.
3. Chapman, H.H.& Meyer, W.H.: Forest Mensuration, 1949.
4. 中島廣吉: 樹幹析解, 1949.
5. 嶺一三: 測樹, 1952.
6. 中山博一: 林木材積測定學, 1957.
7. 西澤正久: 森林測定法, 1959.
8. Forbes: Forestry Handbook, 1959.
9. 大隅眞一: 日本林學會誌, Vol. 41, 12, 1959.