高等學校 數學科 敎育課程에 對하여

金 相 萬

最近 2, 3 年間, 지난 날과는 全然 다른 모양의 數學敎育改良의 思潮가 일어나고 있다. 이 問題는 數學敎育過程의 根本的 革新이라고 하는 것이다. 그러나, 이 問題는 아직 理念의 時期이지 實踐의 時期는 아니다. 그리고, 앞으로의 全世界의 關心거리이며, 敎育內容의 再檢討 問題일 것이다.

이러한 時期에 敎育課程을 制定·公布한다는 것은 참으로 의의 깊은 일이며, 어려운 일이 아닐 수 없다. 아직은 그 內容의 具體案이 確固하지 못할뿐더러, 이 思潮, 即 數學敎育의 現代化가 過去의 敎育課程의 部分的 修正에서 그치는 것이 아니라, 根本的인 革新에 있다는 것에서 아직 硏究 途上에 있다는 것이다.

더구나 우리나라 實情으로 보면 舊態依然한 생각에서 安眠하고, 심지어는 지금까지의 敎育이 數學敎育의 現代化인양 생각하고 있는 형편이어서 可笑롭기 짝이 없다. 더구나 數學을 擔當하지 않는 一般科目의 敎育者나, 一般 知識人들은 生活에 必要한 것만이 敎育의 對象으로 알고 있기 때문에, "數學自體로서의 지니야 할 內容"을 排擊하여, 近來에 와서는 悲慘하게도 數學의 弱化라는 結果만을 招來하였을 뿐이다. 이에 覺醒한 先進國家에서는 이미 새 方案이 試驗을 거쳐 實施 段階에 들어가고 있는 實情이다.

이에 따라 우리나라에서 今般에 制定된 敎育課程에 대한 對策은 如何히 하였으면 좋을까에 대하여 高等學校 範圍 안에서 생각해 보고자 한다.

먼저 數學敎育을 現代化하기 위하여는 方針을 가져야 할 줄 아는데, 그 하나는 敎材의 具體的 取扱의 硏究, 指導上의 問題點이나 對策의 硏究와, 이와 같은 具體的 硏究成果를 導入해서 敎材나 그 取扱法을 合理的·能率的이도록 改善하여 가는 것. 다른 하나는 數學을 包含한 諸科學의 進步에 注目하여 그 思考方式이나 內容의 基本的인 것을 되도록 導入하는 것. 그리고, 마지막 하나는 社會的인 事象에 關聯性을 圖謀하는것이다.

그러면 그 內容面에서 重視되는 몇 가지만을 들어 그 取扱法과 새 敎育課程에서의 導入狀態를 보기로 하면, 첫째는 "論證"의 問題일 것이다. 이는 現在까지 高等學校에서 統一性 없는, 그리고 數學 全般에 걸쳐 統合되지 않았고, 또 幾何的 內容에서만 重視되고 代數的內容에 있어서는 計算技術만이 重視되어 왔다는 事實로 비추어 볼 때, 確實히 論證은 輕視되었었다. 즉, 系統性을 지니지 못하고 局部的으로 散發的으로 취급되어 왔다. 이러한 見地에서 새 敎育課程에서는, 中學校 2學年에서부터 平面幾何를 論證的으로 導入하여 과거의 直觀幾何 指導期間을 短縮하였다. 또, 集合과 論理를 導入하여 代數敎育에 있어서의 論證指導의 缺陷을 是正하고, 現代數學의 基礎로서의 高等數學을 바로잡아, 論證指導의 一貫性과 統合性을 주기로 하였다. 그리고 이 集合이나 論理는 幾何敎材에 있어서도 加味하여 旣習 事項을 整理한다든지, 中學校에서 取扱한 論證을 보다더 補充하는 것을 圖謀할 수 있을 것이다.

이와 같이 지금까지의 論證指導가 幾何的 內容에만 偏重되었든 傾向의 폐단과, 새 敎育課程에서와 같이 幾何敎材의 大部分이 中學校에 내려갔다는 것과 集合의 導入으로, 代數敎材에서의 論證指導를 어떻게 할 것인가와 幾何敎材를 어떻게 再整理할 것인가에 焦點이 되는 것은 當然한 일이다.

따라서 論證이라 함은 體系的 數學의 構造, 즉 證明이나 論理體系를 意味하므로 指導 內容에서 어떻게 할 것이냐는 問題를 들어 보겠다.

(1) 代數的內容에서

◎集合과 그 包含關係를 自然數, 整數, 有理數, 實數, 複素數, 整式의 集合에 依하여 생각하여, 그들의 集合에 있어서 成立하는 演算과, 특히 實數에 대한 基本法則을 整頓하고,

◎다음에는 集合의 結合關係를 數와 一次不等式

을 써서 表示하고, 그 사이의 計算法則을 綜合한다. 그리고, 2進法을 取扱하여 그 數學的 意義를 理解시키고, 그 計算을 通하여 論理演算의 基礎를 주어 現代數學의 活用分野의 一端을 認識시킴.

(2) 幾何的 內容에서는

◎命題와 그 合成, 條件文과 그 關係, 眞理集合 全體集合 등 命題와 集合의 關係를 把握시킨 위에, 中學校에서 배운 幾何敎材의 整理를 主로 하고 이에 若干의 程度 높은 것을 加味함이 좋겠다.

다음에 展開方法에 대하여 생각하면 論證指導는 代數敎材만을 使用해서 할 것인가, 代數敎材를 中心으로 幾何敎材를 加味하여 行할 것이냐로 생각할 수 있다. 그런데, 一般的으로 後者가 앞으로 前進하기 쉬운 傾向이다. 그러나, 이때는 幾何敎材의 內容에 對한 愼重한 檢討를 必要로 하는 것이다.

또, 幾何敎材를 中心으로 行하는 경우의 檢討는 現段階에서는 어렵다. 그것은 單純히 旣習事項의 復習整理나 未習 事項의 補充으로 一步一步 前進이 기대되나, 今後의 問題로서 남겨진 現狀이다. 이 前進은, 單純히 射影幾何나 近世幾何의 初步를 導入한다는 것이 아니고, 高校에 알맞는 幾何敎材를 새로운 立場에서 檢討함을 意味하고 있다. 當然히 解析幾何와도 關連되는 問題이고, 이러한 硏究가 기대된다. 이는 單純한 整理나 補充의 段階로서는 現在까지의 幾何 敎材에서의 論證 指導와 똑같은 結果에서 그치는 同時에, 代數敎材에서의 論證 指導의 充實 發展에도 妨害되지 않는다고 할 수 없다.

아뭏든 이때 주, 高等學校 數學 全般을 通한 體系를 重視하는 論證指導를 함에 있어서 實際面에 여러가지 困難이 일어날 것이며, 敎育에 逆効果를 招來할 우려도 있으므로 다음과 같은 點을 充分히 硏究하여야 할 것이다. (ㄱ) 體系를 너무 重視하고, 嚴密性을 要求하는 나머지 豫想外로 繁雜하여지고, 理解를 困難케 하든지, 數學에 대한 興味와 關心을 弱化시키지 않도록 할 것, (ㄴ) 새로운 내용의 導入은 어느 程度까지 할 것인가이다. 앞의 것은 高校 數學을 새로운 立場에서 再考한다는 것이 그 觀點이고, 後者는 全體 科學의 基礎的 立場에서 檢討함이 必要하다는 뜻이다.

이와같이, 數學敎育의 現代化를 위한 高校數學敎育의 成果를 보다더 充實向上시키려면 從來의 「論證」에 대한 생각을 一新하는 同時에, 高校數學 全般을 通하여 그 指導內容을 再檢討하지 않으면 그 成果는 期待할 수 없을 것이다. 例를 들면, 論證에 새로운 集合이나 論理를 加味하여 論證의 便宜를 圖謀하는 데만 그치지 말고, 새로운 敎材의 가지는 成果를 充分히 發揮시킬 수 있는 配慮가 必要하다.

다음에는 새로운 理念의 하나인 集合에 대하여 생각해 보기로 하면, 數學科 全課程으로 論證이 넓혀짐과 같이 「集合의 생각」도 數學科의 全課程에 걸쳐서 指導해야 한다는 것이다.

新敎育課程에 새로운 項目이나, 새로운 槪念이 들어왔지만, 그 중에도 「集合의 생각」이 들어온 것은 여러 사람들의 關心거리다.

集合의 생각은 現代數學의 基本的 思考方法의 하나이다. 集合의 생각에 의하여 여러가지 사실을 바라 보며, 旣習의 內容에 統一을 짓고, 그들의 內容을 應用하는 能力을 높일 수 있다. 이와 같은 事實로 공통수학에서 「集合의 생각」의 指導가 바람직하게 되었다. 이 指導의 實際에 있어서 예를 들면, 수, 방정식, 곡선의 방정식, 平面圖形과 그 性質 등에 關連시켜, 集合의 생각을 導入함으로써, 그들의 相互關係가 明白히 되고, 각각의 槪念의 理解를 쉽게 하면서 깊이 들어 갈 수 있다. 이 공통수학에서 集合의 생각을 利用할 때, 이 集合의 사이에 「품는다」, 「품긴다」는 關係를 表示하는 記號. $\supset$, $\subset$를 理解하고 사용할 수 있도록 할 뿐만 아니라, $\cup$, $\cap$ $\{\cdots\}$, $\{x|\cdots\}$ 등도 지도하여야겠다.

또, 수학Ⅱ에서는 順列과 組合, 確率과 統計 圖形 등에서 導入하여 指導할 것이며, 수학Ⅰ에서도 같은 程度로 可能한 領域에 導入하여 指導하여야겠다.

그런데, 이 指導에 있어서는 어디까지나 集合論에서 말하는 集合을 取扱할 것도 아니고, 集合算의 높은 程度까지 들어갈 것도 아니다. 平面, 直線上의 點全體, 有理數, 實數, 複素數의 全體라는 것을 생각하여 이것을 文字 등으로 표시할 줄 알고, 또 學生들이 莫然히 생각하고 있는 「物件의 모임」을 分明히 들어서 集合이라고 부르고, 한 文字로 表示할줄 알게 하는 指導가

主가 될 것이다. 이와 같은 態度와 그것에서 나오는 効果에 대해서 알리고, 部分集合, 和集合, 積集合, 空集合, 補集合 등을 알리면 足할 것이다.

Euler의 圖式에서 論理關係를 集合에 옮겨서 視覺化하는 것도 좋을 것이며, 定理의 逆, 對偶의 說明, 必要條件, 充分條件, 必要充分條件 등에도 便利를 圖謀할 수 있을 것이다.

그러나, 集合으로써 깊이 取扱하여 指導할 部分은 有限集合일 것이다. 例를 들면, 「경우의 수」를 指導할 때, 중복 없이 세어 가는데 有限集合을 1, 2, 3,……인 自然數列에 1 對 1 對應 지우는 것으로, 有限集合에 대해서 相當히 깊이 取扱하고, 有限集合의 寫像으로 處理해 나가는 생각을 넣어 줄 수 있다.

또, 集合을 쓰면 代數의 體系的 論證을 確立할 수도 있게 된다.

특히, 可能하다면 集合을 써서 公理系의 意味를 수학Ⅰ의 平面幾何 部面에서 指導해도 좋을 줄 안다.

以上에서 論한 바와 같이, 「集合의 생각」은 高等學校 數學의 全範圍에서 適用할 수 있으므로, 공통수학에서 수학Ⅰ, Ⅱ까지 全期間을 通하여 漸次 이 槪念이 浸透하여 가도록 할 것이다. 그러나, 아직 이 具體案은 完全한 것을 바랄 수 없는 것을 前提로 하여야 한 것이다.

그리고, 現狀態로서는 集合의 記號나 用語조차 確定된 것이 없고, 읽는 법도 여러가지이므로, 集合의 指導의 細密한 部分은, 統一된 것이 하나도 없다고 해도 過言이 아닐 것이다. 이 問題에 關해서는 앞으로 敎科書를 執筆할 분들끼리만이라도 work shope를 해서 步調를 맞추어야 될 줄 생각된다.

다음에는 複素數에 對해서 생각해 보기로 한다. 이 複素數의 지도에 있어서 現在까지의 式의 形態에서 그친 것을 平面上의 點에 對應시킬 수 있음을 가지고 複素平面을 定義하고, 複素數의 極形式에 의한 表示를 導入함과 아울러, 그 곱셈, 나눗셈에 三角函數의 加法定理를 利用함으로써 複素數의 計算이 가지는 幾何學的 意義를 지도하고, 複素數의 和差의 그림 表示는 「벡터」의 和差의 例로서 取扱하여 「벡터」導入의 바탕으로 함이 數學敎育의 現代化의 一翼이 될 수 있는 것이라고 본다. 中學校에서의 음수의 導入, 無理數의 導入에 繼續하여 數의 擴張이다. 따라서, 그 計算法則을 充分히 理解시켜, 그 簡單한 四則計算에 能熟케 하고, 直線上의 點이 實數에 對應함에 對해서, 平面上의 點이 複素數에 對應하여 複素平面이 생각되고, 그들의 點은, 實軸·虛軸에 對하여 한 쌍의 實數의 座標로 表示할 수 있음을 認識케 하고, 이 한 쌍의 座標를 가지는 點은 極座標 表示에 依하여 絶對値와 偏角으로 表示할 수 있고, 다시 그들의 點은 原點에서의 「位置 벡터」로 代替할 수 있음을 보이고, 이것에 의하여 複素數의 幾何學的 表示를 可能케 하고, 複素數를 直觀的으로 理解시킨다. 그리고, 複素數의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 幾何學的 意味를 明白히 하여 複素數 및 그 算法의 理解를 깊게 한다. 더욱 三次 및 高次2項方程式의 根의 表示, 三次元의 벡터, 四元數, Euler의 定理의 導入에서 그 應用이 넓게 紹介됨이 좋을 줄 생각됨.

다음에는 「벡터」의 指導인데, 數學의 基礎槪念으로서의 三角函數나, 物理的인 速度, 힘 등의 基本的인 量과의 關連을 指導하는 것으로 되어 있다. 또, 應用數學에 있어서는 이것이 實施되는 學科의 特質을 살리기 위한 應用을 包含한 「벡터」의 指導가 要求된다.

「벡터」의 指導의 目的은 크기와 方向을 가진 量을 抽象化하여, 그것으로 表示되는 量 사이에 存在하는 關係나 性質에 대한 槪念을 理解시킴에 있다.

그리고, 이 「벡터」의 指導 意義는 새로운 槪念에서, 그 性質을 論理的으로 쌓아올려 가는 생각으로서의 意義와, 空間을 認識하는 近代的인 方法으로서의 意義, 그리고 論理學에 있어서의 數學的인 基礎 敎養으로서의 意義 등을 들 수 있다. 또, 이 벡터는 實業方面, 特히 工業方面을 志望하는 高校生에게는 더욱 중요하며, 그 應用面이 넓다. 따라서, 職業系를 選擇하는 學生들에게는 반드시 指導하여야 한다. 따라서, 「수학Ⅰ」의 課程에서는 附錄에서 三角函數를 指導할 때 「벡터」까지를 取扱하여야겠다.

그리고, 이 導入은 新敎育課程에서 複素數에 의한 것으로 되어 있지만, 이것이 반드시 固定될 必要는 없다. 즉 이 導入 方法에는,

㉠有向線分에 依한 것. ㉡平行移動에 依한 것.
㉢複素數에 依한 것. ㉣成分에 依한 것.
㉤變位에 依한 것. ㉥힘의 關係에 依한 것.
等이 있다. 그리고, 이 벡터의 觀點에서 旣成의 數學이 再生된다는 點에 硏究할 餘地가 보인다.

다음에는 微分·積分에서의 指數函數와 對數函數 取扱에 對하여 보면, 수학Ⅱ에서 函數의 範圍를 擴張하여 指導內容을 훨씬 高度로 높였다. 그리고, 이들은 計算面과 函數的 性質面 兩面을 같이 取扱하여 有機的으로 指導할 수 있게 하였다는 것이다. 그러나, 完全한 段階의 指導를 目的으로 한것은 아니고, 應用을 主로 생각한 것에 留意하여야 겠다.

그러면, 이 指導에서 가장 問題거리인 "指數函數·對數函數의 微分"의 導入을 어떻게 하느냐가 重要한 關心꺼리가 아닐 수 없다.

이 方法에는 여러가지를 들 수 있다.

첫째, 理論的 方法에는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 存在를 數列의 性質로 證明하여 들어가는 것이 있는데, 이것은 學生들의 理解가 어려울 것 같다. 둘째는 直觀的 方法인데 이는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 에서 들어가는 方法이 있는데, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$를 大體만 說明하든지 假定하고, 指數나 對數의 存在나 連續性은 直觀的으로 取扱하고, 實用性이 있는 函數로서 取扱하는 것과 $\log x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$에서 導入하는 方法 등이 있다. 이 直觀的 方法은 學生들에게 理論的 滿足感을 주지 못할 缺點이 있기는 하지만, 指導의 實際面에서는 容易할 것이다.

다음은 平均値 定理의 取扱인데, 이는 函數의 增減이나 一次의 近似式에 利用하고, 定積分의 基本定理에 利用하여, 應用과 旣習 內容의 再考에 利用하는 데, 그침이 目的이다. 여기서 이 導入法에 對하여는 直接 그림을 利用하여 直觀的으로 함에 그치기로 하였다.

끝으로 新敎育課程에 「確率과 統計」가 있는데, 이는 지금까지의 記述統計에서 一步 前進하여 推測統計를 加味한 것이다.

社會現象의 觀察이나, 自然現象의 實驗에 關한 資料를 어떻게 整理하는가, 또 그 結果에서 무엇을 파악할 것인가, 다시 더 나아가서 그것을 將來 어떻게 살려서 利用해갈 수 있는가의 問題는, 벌써 舊式의 記述統計의 範圍에서는 取扱할 수 없게 되었다. 卑近한 例를 들면, 新聞, 雜誌 그 밖에 刊行物에 많이 볼 수 있는 輿論調査 등의 統計的 資料의 解析을 할 必要에서 新統計가 必要하게 되었다. 또, 生產技術이나 經營方式의 革新에 따라, 品質管理 등의 統計的 技術이 切實히 必要하게 되었다. 그리고, 이들의 統計는 確率의 생각 위에 선 것이 아니면 안 된다.

이 統計의 導入法은 다음 두가지 方法을 들 수 있다.

㉠ 記述統計──→確率──→推測統計

㉡ 確率──→記述統計──→推測統計

으로서 確率의 基本槪念과 基本法則, 그리고 確率分布가 主眼點이 되어야 함을 말할 수 있는데, 여기서 「集合의 생각」과 記號를 使用하여 確率의 具體的 指導에 臨하여야 할 것이며, 確率變數 및 確率分布의 理解 아래 必要한 諸分布를 數學的으로 指導하여야 할 것이다.

以上에서 重要한 項目에 對하여 槪述에 그쳤으나, 이 밖에 圖形에 關한 取扱이나, 無限級數에 關한 事項, 聯立方程式과 行列 및 行列式에 關한것, 微分方程式, O.R., L.P. 등 여러가지 方面에서 數學敎育의 改革이 要請되고 있다. 그러나, 今般敎育課程은 어디까지나 過度的인 立場에 머물지 않을 수 없는 만큼, 이러한 數學敎育의 現代化를 이루기 위하여 實驗的인 硏究가 推進되어야 할 것이며, 아울러 不遠間에 敎育課程의 再改定의 必要가 切實이 要望된다.

(參考文獻)

① 日本數學敎育會誌(1960. 5, 1962. 9, 1963. 1, 2)
② Cramer, Harold The Elements of probability Theory (Wiler, New Yorw.)
③ The mathematic teacher(1962. 3. 4. 5. 11. 12)
④ John. G. Komeny 外共 矢野健太郎譯 新しい數學(共立出版)
⑤ 遠山啓著現代數學の考へ方(明治圖書)
⑥ Cyrus colton mac Duffee An introduction to abstract algebra.
⑦ 遠山啓外算數數學敎育の現代化(明治圖書)
⑧ 高等學校學習指導要領解說數學編 (日本文部省)

—(文敎部 學務局)—