러 줄것.

(5) 가능한 한 학생들 자신이 문제를 해결하게 할것.

(6) 고등정신 기능을 발휘할수 있는 최대한의 기회를 부여 할것.

(7) 명확하고 계획적인 숙제의 제시.

(8) 타교와 또는 타단원과의 연관성을 알고 활용하는 습관을 기를것.

4) 이상을 종합하여 교사는 학습 지도에 있어서 학습 내용의 다과보다도 학습 기술이나 방법을 학생들에게 습득케하여 효과적이며 독자적, 영속적인 학습 습관을 발전시킴으로서 학생들이 갖이고 있는 학습 잠재 능력을 최대한으로 실현시켜야 한다.

(忠北 淸州高等學校)

効率的인 微分導入方法

康 旭

Ⅰ. 趣 旨

微分과 積分은 數學이나 物理學에의 實用性에 있어 重要할뿐만이 아니라 哲學的으로도 大端히 重要한 暗示를 주는 理性的 産物이다. 그러하기에 微分의 効率的인 導入方法을 一考함도 값있는 일로 생각하여 現教科書에 나타난 導入法을 比較해 가면서 23年間의 一線教壇生活의 經驗을 通하여 얻은 작으만한 結論을 엮어보기로한다.

Ⅱ. 微分學의 教育的 意義

距今 300年前 人類는 微分과 積分을 發見하여 有限과 無限, 有와 無 靜止와 運動 質과 量 傾向性과 現象사이의 對立矛盾을 極限이라는 巧妙한 思惟形式을 通하여 分析 統合하는데 成功했든 것이다 .Newton은 流率이라는 流動하는 두 變量의 極限比를 생각하여 時間的으로 微積分을 創建하였고 Leibnitz는 曲線에 있이서의 接線에 着眼하여 空間的으로 이를 建設하였든 것이다. 靜的인 四則計算을 超克하여 微視的分析의 極致라고 볼수 있는 極限思想의 確信에 이르기 까지는 길고 어두운 受難期를 거쳤든 것이다. 그러나 뉴—톤과 라이프닛쓰는 速度, 加速度 接線이라는 實在에 勇氣를 얻어서 理性的 直觀力을 그대로 發展시켜 力學이나 物理的에 應用하여 巨大한 成果를 이루웠든 것이다. 流動하는 現象을 分析하여 極限에서 멈추게하는 方法 그리고 그 無限小量의 極限을 統合하여 다시 流動量으로 再構成하는 過程이야말로 革新的인 計算過程이라고 할수 있다.

大戰後 科學振興, 技術革新이라는 社會的要求에 依하여 微積分學이 中等教育에 登場케된것은 當然한 일이었다. 自然現象이나 圖形을 움지김으로 捕着하고 函數的인 槪念으로 構成하는 일, 極限思想을 確立하는 일, 力學이나 物理學 또는 求積問題에 應用하여 實用性과 實在意識을 確立케하고 그 活用에 熟達케하는 일 等이 重要한 教育的 目的이라 할수 있을것이다. 改正된 새教育課程에서 數學1(文科系)에도 微分을 導入했다는 것은 技術革新 文化復興을 爲한 數學教育의 現代化의 象徵으로서 至當한 處事일 것이다. 微積分學은 數學이나 物理學에의 應用에 그치는것이 아니라, 自然科學, 人文科學, 社會科學을 莫論하고 모든 部門에 有用한것이다. 變量의 極限을 따라서 傾向性을 究明하고 傾向性에서 現象의 實在를 發見하는 思考過程을 數理形式化한것이기 때문에 記號論理學으로서도 深長한 意義가 있다고 볼수 있을 것이다.

Ⅲ. 微分導入方法의 分類

微分導入의 豫備段階로서 函數의槪念 連續과 不連續 函數의極限에 對하여 다루는것은 거히 一致되어있으나 平均變化率에서 導函數의 應用에 이르기 까지의 過程에는 書籍에 따라 相當한 差異點을 發見할수 있다. 그序列에對한 特色을 分類해보면 다음과 같다.

(1) 類 平均速力 →平均變化率 →瞬間速力→

瞬間變化率→微係數→接線의기울기→導函數→應用

(2) 類 平均速力→ 瞬間速力→平均變化率→瞬間變化率→微係數→기울기→應用

(3) 類 平均速力→ 平均變化率→導函數→微係數→變化率→기울기→應用

(4) 類 平均速力→ 平均變化率→變化率→기울기→微係數→導函數→應用

(5) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$→導函數→微係數→變化率→기울기→應用速力

以上 다섯가지 導入過程의 長短點을 比較해보면 다음과같다.

제1類에서는 速力이라는 時間的變量을 函數그래프와 連結시켜 直觀化하였으며 瞬間變化率이라는 實質的內容으로부터 微係數를 抽出했고 그 微係數를 다시 接線의기울기와 結付시키는等 恒常 實質的인 內容을 心理的인 基盤으로하고 幾何學的인 그림으로 半具體化하여 形式化하여간다. 順坦하고 整頓된 思考過程이라고 볼수있을 것이다.

제2類에서는 제1類와 大同小異하나 平均速力에서 바로瞬間速力을 聯想하는 直感的效果를 노리고있다 平均變化率에서 微係數에 이르기까지는 函數形式으로만 다루워저있기때문에 一貫性이있어 理解하는데 便利한點이 있다.

제3類는 平均變化率을 一般化하여 바로 導函數로 誘導했으며 微係數나 變化率 接線의기울기等은 그內容 또는 應用으로 取扱했다.

제4類는 生活化하는 立場에서 必要와 欲求에 따라 直觀하는 心理過程을 重視했으며 自然스러운 過程이라고 볼수있다.

제5類는 極限値計算形式의 延長으로서 導函數를 誘導했으며 變化率 기울기等의 概念은 그 應用으로 處理해 버린것이다. 이過程은 敎科의 形式的系統性을 謳歌하든 옛날의 책이나 또는 程度가 높은 書籍에 많이 보인다 微係數라는 單語가 나오지도 않는 境遇도있다.

다음에 內容과 分量에 對하여 比較해보면 敎科書中에서 微分導入課程으로서 6~10時間을 잡고있다. 平均速力에서 導函數까지를 3~4時間을 잡고있으며 책에 따라서는11時間을 配當하고 있는 것도있다. 速力의 例로서는 物體의 落下運動 $s=4.9t^2$을 들고있는것이 普通이며 函數曲線의 例로서는 $y=x^2$을 擇하여 變化率을 誘導하고있고 기호는 다음과같은것中 全部 또는 一部를 쓰고있다. $t_1 \to t_2$ $f(t_1) \to f(t_2)$ $x_1 \to x_2$ $f(x_1) \to f(x_2)$ h $f(a) \to f(a+b)$ $f(x_1) \to f(x_1+\Delta x)$ Δy Δy $\frac{dy}{dx}$ y' $f'(x)$ $\frac{df(x)}{dx}$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 微係數와 接線의 기울기와의 聯關關係는 微係數=接線의기울기$=\tan\alpha$에서 바로 接線의 方程式 $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$을 誘導한 것도 있고 導函數의 應用問題로 돌려別途로 돌린것도 있다.

Ⅳ. 效率的인 導入方法

前述한바와 같이 各樣各色의 導入方法에는 各各 獨特한 長點이 있어 一律的으로 評價할수는 없으나 一線에서 數種의 敎科書를 取扱하여본 結果로서 그 長短을 가려 效率的인 方法을 模索해보기로한다.

1. 序列에 있어서는 平均速力→瞬間速力→平均變化率→瞬間變化率→微係數→기울기→導函數→應用의 過程이 가장 效率的이다. 平均速力에서 瞬間速力을 생각하는것은 自然스런 思考過程이며 Newton이 생각한것과도 一致한다. 無限과 極限이라는 概念을 速度라는 實在에 結付시켜 適用活用케한것이며 微分學의 根源的인 觀念이라고볼수있다. 이것을 一般的函數概念에 敷衍하여 平均變化率 瞬間變化率로 一般化하여 微係數를定義하고 그 幾何學的意義로서 接線의 기울기를 直觀化시켰다. 그리고 다시 函數化하여 導函數로 誘導한것이다. 平均速力→平均變化率→瞬間速力→瞬間變化率의 順으로하는것 보다도 平均變化와 瞬間變化와의 聯關이 잘 되어 더욱 切實感을 느끼게하는데서 印象이 깊다. 速力變化率→그림표와 같은 明瞭한 段階區分이 學生들의 흐리기쉬운 抽象的 概念의構成에 明確한 表象을 준다.

2. 平均速力에서 導函數導入까지 3시간이 適當하다. 人間의 注意力과 記憶力에는 限度가 있다. 微積分學이 有와無 靜止와運動사이를 極限이라는 劃期的思辨으로 統合을 본 靈感的인 成果일진대 그 思想의 生成過程도 強烈한 印象과 感興속에서 이루워져야 할것이다. 그리므로 平均速力에서 導函數까지를 3~4日間의 記憶圈속에서 生生한 印象과 明確한 思考系統을 意識하

면서 3時間에 줄기차게 工夫하는것이 가장 効率的이라고 본다.

3. 記號는 單純化하는것이 좋다. 記號의 濫用 $(a, h, t_1, t_2, x_1, x_2, y_1, y_2, s_1, s_2 \cdots)$은 理論을 嚴密히 하고 思考過程을 細分하여 昭詳하게하여 常數에서 變數로 바꾸는 過程도 圓滑히 할것等을 피하듯하나 오히려 그 限界의 辨別性을 흐리게하여 混沌에 빠지게되고만다. 記號訓練도 좋겠지만 여기에서는 微分에 對한 概念構成이 至上目標이기 때문에 記號의 繁雜性으로 因하여 心的表象을 흐리게하면 안될것이다. 增分한 Δx Δy $\Delta f(x)$ $x=3$일때 $f(3+\Delta x)-f(3)$ 등 具體的인 例를 根幹으로 單純化하는것이 좋고 Δy보다도 $\Delta f(x)$가 納得이 잘 간다.

4. 變化率이란 말보다 增加率이라는 表現이 實感이 나므로 學習効果를 올릴수있다. Δx는 x의 增分을 前提로한것이기 때문에 變化率이라고 하느니 보다 增加率이라고 表現하는것이 實感이 나고 理解가 빠르다. 嚴格히 따지자면 減少는 —增加로하면 된다.

5. 中間에 練習問題는 될수있는限 주리고 보기問題若干에 그치는것이 좋다. 近代科學的心理學에서는 어떠한 槪念이 確立되기까지는 다음學習으로 飛躍하는것을 삼가하라고 되어있지만 뉴—톤과 라이프닛쓰는 極限에對한 嚴密한定義없이 微積分學을 만들어 有効하게 力學이나 物理學에 實用化하였다. 코—시—가 無限과 極限에 關한 解明을하여 微積分에 基礎的定義를 確立할때까지는 그後 150年이란 歲月이 흘렀든것이다. 練習問題의 繁雜스러움으로 因하여 極限의 感激을 冷却시켜 微分을 實在로서 把握하는 系統的思考에 흠이 가게하여서는 안될것이다.

6. $\frac{dy}{dx}$가 $dy \div dx$와 같지않고 微分作用을 表現하는 記號라는것을 새삼스러히 解說할 必要는없다. 오히려 $\frac{dy}{dx}=dy \div dx$로 생각함이 便利하다는 것을 暗示해 줌이 有益하다. 歷史的으로 뉴—톤이 極限比 때문에 바—크리僧正으로부터 지긋지긋한 攻擊을 받기도했다. 그러나 뉴—톤記號 $\dot{x}$ 보다 라이프닛쓰의 記號$\frac{dy}{dx}$가 더욱 널리쓰여 오늘에 이르게된 理由는 $dy \div dx$와같이 生覺됨으로서 얻는 形式上의 便利性때문이였다고 볼수있을것이다. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\frac{\phi(t)}{dt}\cdot dt$의 計算이 모두 記號의 暗示에 依하여 便利하게 이루워진것들이다. 그래서 라이프니쓰는"式이 代身하여 생각해준다"고 喝破했든것이다.

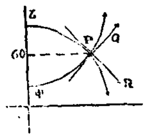
7. 函數의 例는 單純한것이 좋고 x의 값도 1 또는2로 計算이 簡單이되도록 주워진것이 좋다.

例 $y=ax+b$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $s=4.9t^2$ 計算의 技巧에 쏠려 微分概念構成에 支障이 오지않도록하고자함이다.

8. 아무리 時間과 距離를 無限小로 잡드라도 極限比는 嚴存한다는 觀念을 徹底히할것 다음과 같은 例를 들면 納得이 잘 간다.

$$\frac{0.00000000003\ m}{0.00000000001\ 초}=3m/초$$

9. 微係數=接線의기울기 를 傾向性으로 解說해줌으로써 理解가 빠르다. 그림과 같이 甲과乙은 同時에 60點이 되었지만 그傾向性이 다르다. 그리고 그 傾向性이 接線의 方向(즉기울기값)으로 표지가된다. 甲은 興하는 傾向(상수)이 있고 乙은 亡하는 傾向이 있다고 하면 函數의 增減과 기울기의 符號와도 聯關이되어 應用이 便利하다.



10. 接線의方程式 $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$ 問題는 練習問題(導入이끝난뒤)로 돌림이 좋다. 函數의 極大小 曲線의追跡 近似値와 같이 導函數의 應用問題로 取扱하는 것이 좋다. 微分導入過程에서 接線이 重要視되는 點은 割線의極限이라는點과 函數의 變化率(傾向性의暗示)이라는 點에있는 것이지 接線方程式을 만들어내는 技巧가 問題아니기 때문이다.

11. 直觀敎材를 많이 利用할것
特히 時間的인 要素를 圖表로 만들어 空間的으로 視覺化 한다거나 思考過程의要點을 圖示하여 槪念構成에 그支點을 明示해 줌은 大端히 有益하다.

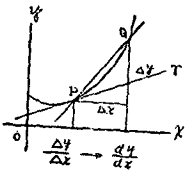
例 $s=4.9t^2$

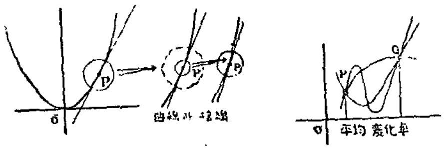
t 平均速力 v

$1\sim1.1 \quad \dfrac{4.9(1.1)^2-4.9\times1^2}{1.1-1}=10.29$

$1\sim1.01 \quad \dfrac{4.9\times1.01^2-4.9\times1^2}{1.01-1}=9.849$

$1\sim1.001 \quad =9.8049$





12. 圖形은 基礎條件(始動狀況, 終動狀況) 만을 明示하도록 簡明히할것

움직이는 過程을 細分하여 圖示함이 有益한때도 있으나 變位의 辨別性이 弱化되어 逆効果가 있기쉬움을 念慮하기 때문이다.

13. 印象的인 効果를 圖謀할것. 物體의落下運動을 實驗하여 注意를 集中시키거나 擴大鏡으로 曲線과 接線과의 關係를 觀察하거나 印象的인 單語라든지 說話를 引用하는等하여 印象的學習効果를 얻도록 꾀함이 有益하다

14. 多辯 또는 多書를 삼가할것이며 알기쉽고 實感이나는 낱말로 說明하고 板書는 그림과 記號로만 表示하는것이 좋다 說明을 板書하는것은 無益한 일이다. 多辯은 神經을 疲勞케할뿐 오히려 心的表象을 混沌하게하여 概念構成에 支障이 있기쉽다. 알려주기前에 깨닫게하도록 끊임없는 暗示性있는 態度를 取해야 할것이다.

15. 每時間 思考過程의 줄거리를 되풀이함이 좋다. 明確한 觀念體系를 세우기 爲하여 有益하기 때문이다.

V 微分導入의 實踐案

豫備段階 (要約함)

1. 函數의 性質
2. 函數의 連續과 不連續
3. 函數의 極限

微分導入

1. 서울에서 전주까지의 기차시간과

거리→平均速力$=\dfrac{\text{거리}}{\text{시간}}$

2. 落下運動 $s=4.9t^2$ 落下後 1秒에서 3秒 사이의 平均速度

3. $s=4.9t^2$의 $t=1$에서의 瞬間速力은 $9.8m/$초이다.

t 平均速力 (落下運動實驗)

$1\sim1.1 \quad \dfrac{4.9\times1.1^2-4.9\times1^2}{1.1-1}=10.29$

$1\sim1.01 \quad \dfrac{4.9\times1.01^2-4.9\times1^2}{1.01-1}=9.849$

$1\sim1.001 \quad \dfrac{4.9\times1.001^2-4.9\times1^2}{1.001-1}=9.8049$

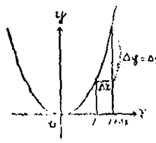
………………………………→9.8에 접근한다.

4. 아무리 時間을 無限小로 잡아도 時間과 거리와의 比는 存在한다.

例 $\dfrac{0.0000000003(m)}{0.0000000001(\text{초})}=3\ m/\text{초}$

5. 函數 $y=f(x)$에 있어 Δx $\Delta y=\Delta f(x)$ (增分) $y=3x+2$의 $x=1$에서 $x=3$까지의 平均增加率과 $x=1$일때의 瞬間 增加率은 같다.

6. $y=f(x)=x^2$ $x=1$에서의 增分 Δx $\Delta f(x)$



$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2$

$=1+2\Delta x+\Delta x^2$

$f(1)=(1)^2=1$

$\Delta y=\Delta f(x)=f(1+\Delta x)$

$-f(1)=2\cdot\Delta x+\Delta x^2$

7. 函數 $f(x)=x^2$의 平均增加率$(1\to1+\Delta x)$

$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=2+\Delta x$

$\Delta f(x)<0$일때는 음의 增加率

8. $f(x)=x^2$의 $x=1$일때의 瞬間增加率

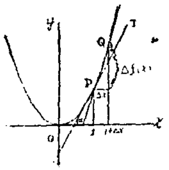
$\Delta x\to0 \quad \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2+\Delta x\to2$

9. 微係數$(f(x)=x^2, x=1)$. 微分商

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2+\Delta x)=2$

10. 接線의 기울기→微係數는 變化의 傾向性을表示한다→變化率

$\Delta x\to0 \quad Q\to P \quad PQ\to PT$ (接線)



$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$→接線$TP$의 기울기＝$\tan\alpha$. (擴大鏡實驗 接線擴大圖提示) 같은 60점 이라도 傾向性이 다르다.

11. $y=x^3$ $y=\frac{1}{x}$ $y=\sqrt{x}$ $y=3x^2+2x-1$

의 $x=1$에서의 미계수계산훈련

12. $y=x^2$에서 x의 一般값에 對하여

$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta y}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

13, 導函數

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x$

14. 導函數記號와 定義→微分한다.

$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

y', $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$는 微分作用의 뜻이나 $dy\div dx$로 看做함이 便利하다.

15. 微分法

16. 微分의 應用

a. 接線의 方程式

b. 函數의 極값

c. 函數의 追跡(增減 凹凸)

d. 近似値와 誤差

練習問題

1. $y=x^2-2x+3$ $x=a$에서 $x=b$까지의 平均變化率과 $x=b$에서의 瞬間變化率및 接線의 方程式

2. $y=x^3$의 $x=1$에서의 접선의 方程式

3. $y=x^2$의 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일때의 接線과 X대와 이루는 角

4. $y=\frac{1}{x}$ $x=0$에서의 微係數(右方 左方)

5. 導函數의 定義에 依한 微分

$y=2x+1$ $y=x^3$ $y=2x-x^2$ $y=\frac{1}{x}$ $y=\sqrt{x}$

6. 微分法

$y=x^4$ $y=4x^5$ $y=3x^2-2x+5$

$y=(x^3+2)(x^2-1)$

$y=\frac{x^3}{x^2+1}$ $y=3x^2+\frac{1}{x^3}$

$y=\frac{1}{x}$ $y=\sqrt{x}$

$y=\frac{1}{(2x+1)^2}$

$y=\sqrt{3x^2-2}$ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

7. $y=2x-x^2$의 원점에서의 接線의方程式및 그림

8. $x^2+y^2=1$ $y^2=4px$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 曲線위의點$(x_1 y_1)$에서의 接線方程式

(全北敎育硏究所)