

일차원 Boussinesq 방정식에 대한 불연속 갤러킨 기법의 적용

Application of DGFEM to 1D Boussinesq Equation

이해균*, 이남주**
Haegyun Lee*, Namjoo Lee**

요 지

Madsen et al. (2002)이 제안한 일차원 고차 Boussinesq 방정식에 대하여 불연속갤러킨 유한요소법(Discontinuous Galerkin Finite Element Method)을 적용하였다. 연속적인 Boussinesq 방정식에서 각 요소경계에 불연속을 허용할 수 있도록 공간차분하고, 시간방향으로 4차 Runge-Kutta 시간적분법, 각 요소사이에는 Lax-Friedrichs 수치흐름률을 사용하였다. 계산영역의 양쪽에 불필요한 파랑의 반사를 억제하도록 흡수층을 설치하였으며, 영역 내부에서 조파할 수 있도록 하였다. Luth et al.(1994)의 수중잠재 실험에 적용하여 관측값과 잘 일치함을 확인하였다.

핵심용어 : Boussinesq 방정식, 불연속 갤러킨, 유한요소법, 잠재

1. 서론

불연속 갤러킨 유한요소법은 Reed and Hill (1973)에 의하여 중성자 이송방정식의 모의에 적용된 이래로, 1990년대 이후 Runge-Kutta 불연속 갤러킨 (RKDG) 유한요소법으로 적용이 증가하고 있다. 개별 요소에 대한 약형식(weak form)의 결과로서 나타나게 되는 요소 경계에 수직인 흐름률(flux)는 Riemann 근사해법을 이용하여 구하는 것이 일반적이다. 기존의 안정화(stabilized) 유한요소법(예를 들면, SUPG, 특성선 기반 유한요소법(characteristic Galerkin Method) 등)과는 달리, 그림 1에 보인 바와 같이 각 요소 사이의 경계에서 불연속을 허용하므로, 불연속적인 흐름의 모의에 유리한 것이 장점으로 알려져 있다. 또한, 이송방정식의 처리에 있어서, 상류이송기법에 의하여 산정되는 흐름률 자체가 필요한 안정성을 제공하기 때문에 추가적인 안정항이 필요없다는 것이 장점이라고 할 수 있다. 최근 국내의 연구로는 Lee (2014), Lee and Lee (2016) 등이 천수방정식의 연구에 적용한 바 있으며, 국외에서는 Engsig-Karup et al. (2006), Eskilsson et al. (2006)이 Boussinesq 방정식에 사용한 바 있다.

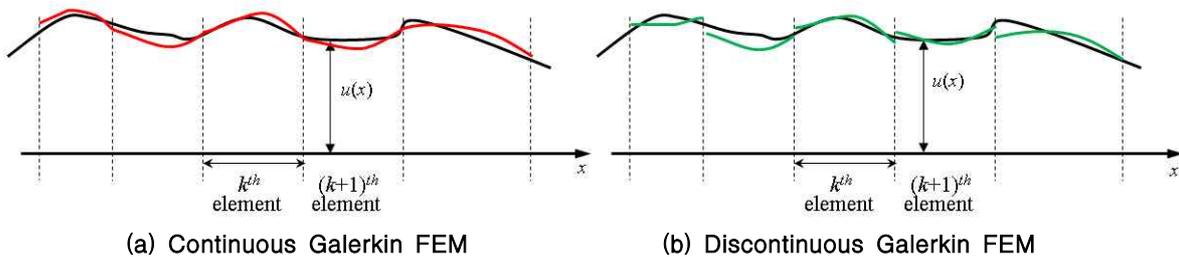


그림 1. 연속 갤러킨(a)과 불연속 갤러킨(b) 기법의 비교

* 정희원 · 단국대학교 (천안) 토목환경공학과 부교수 · E-mail : haegyun@dankook.ac.kr

** 정희원 · 경성대학교 건설환경도시공학부 교수 · E-mail : njlee@ks.ac.kr

2. 지배방정식 및 수치기법

다음과 같은 고차 일차원 Madsen et al. (2002)이 제안한 Boussinesq 방정식을 사용하였다.

$$\partial\eta/\partial t = Q(x) \quad (1)$$

$$\partial\tilde{U}/\partial t = \partial F(x)/\partial x \quad (2)$$

여기서 $Q(x)$ 와 $F(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Q(x) = \tilde{w} - \frac{\partial\eta}{\partial x} \left(\tilde{U} - \tilde{w} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$F(x) = - \left\{ g\eta + \frac{1}{2} \tilde{U}^2 - \frac{1}{2} \tilde{w}^2 \left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \quad (4)$$

접선방향 자유수면 유속(tangential free-surface velocity), \tilde{U} 은

$$\tilde{U} = \tilde{u} + \tilde{w}(\partial\eta/\partial x) \quad (5)$$

로 정의하며, η 는 자유수면 변위이다 (그림 2). 수표면에서의 속도 연직방향 속도 \tilde{w} 는 보조변수 \hat{u}^* , \hat{w}^* 를 이용하여 다음과 같이 순차적으로 구하였다 (Engsig-Karup et al., 2006).

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}^* \\ \hat{w}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 - \eta_x B_2 & B_2 + \eta_x A_2 \\ A_3 + h_x S_1 & B_3 - h_x S_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

\tilde{w} 는 보조변수를 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\tilde{w} = -B_2 \hat{u}^* + A_2 \hat{w}^* \quad (7)$$

Padé (4,4) 정확도 모델에 대한 계수 행렬 A_2 , A_3 , B_2 , B_3 , S_1 , S_2 는 Engsig-Karup et al. (2006)에 정의를 따라 계산하였다.

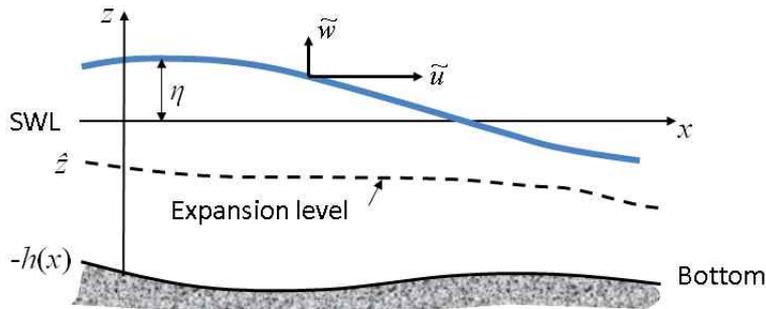


그림 2. 일차원 Boussinesq 방정식에서 사용되는 각 변수

각 요소 사이에는 Lax-Friedrichs 수치흐름률을 사용하였으며, 수치확산이 부족한 비선형 문제가 가진 수치적 불안정성의 제거를 위하여, Engsig-Karup et al. (2006)이 제안한 Savitzky-Golay 필터(Savitzky and Golay)를 적용하였다 ().

불필요한 반사파로 인하여 영역내의 해가 왜곡되는 것을 방지하기 위하여 모델 영역의 양 선단에 Larsen and Dancy (1983)가 제안한 파랑의 흡수층을 설치하였다. 또한, 영역내 파랑의 조파를 위하여, Engsig-Karup et al. (2006)의 연구에서 제시된 이완법(relaxation method)을 적용하였다.

3. 모형의 적용

개발된 수치모형의 검증을 위하여 Luth et al. (1994)의 수중잠재 실험에 적용하였다 (그림 3). 영역 [-10, 35]의 수로에서 [-10, -2], [25, 35] 영역에는 흡수층을, [-1, 1]에는 조파 영역을 설치

치하였다. 전체영역을 모두 180 개의 요소로 분할하였다. 조파영역에는 2nd order Stokes 파 (Dean and Dalrymple, 1991)의 정확해를 사용하여, 파고 0.02 m, 주기 2.02 sec, 파장 3.737 m 파를 조파하였다. 그림 4는 각각 $x = 10.5$ m, 13.5 m, 17.3 m에서 실험치와 계산치를 비교한 것으로서 대체로 잘 일치함을 확인할 수 있다.

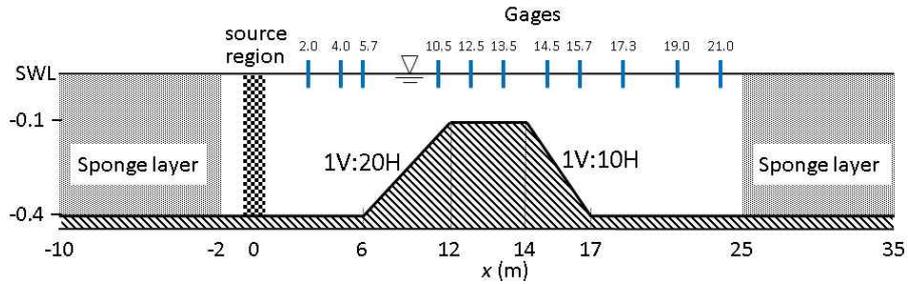
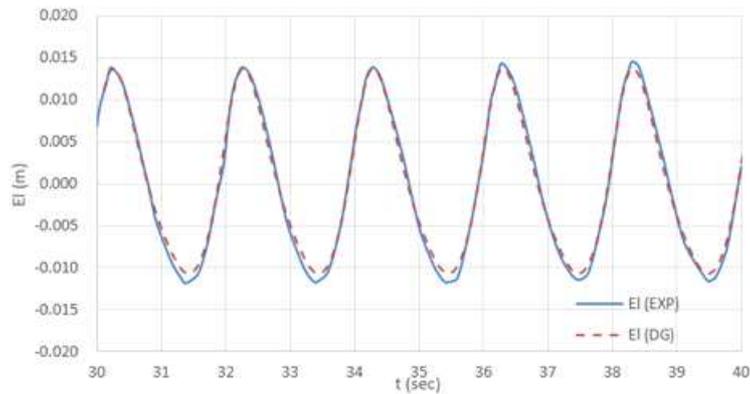
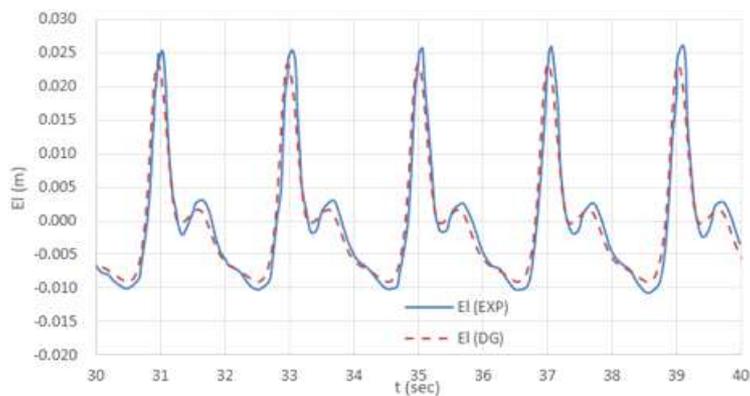


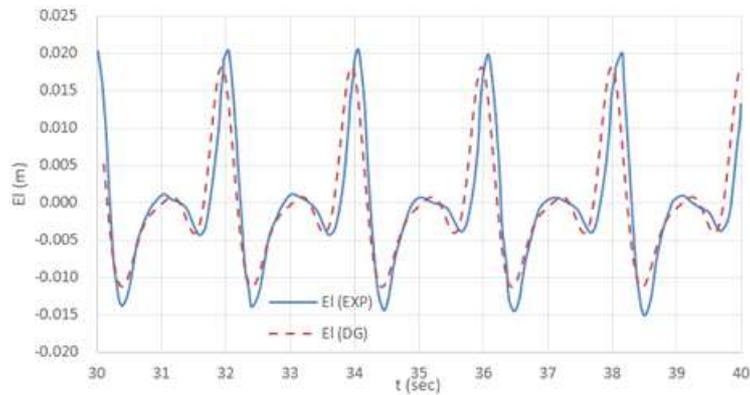
그림 3. 고립파 전파와 처오름



(a) $x = 10.5$ m



(b) $x = 13.5$ m



(c) $x = 17.3$ m

그림 4. 실험치와 본 연구의 계산결과의 비교

4. 결론

Madsen et al. (2002)이 제안한 일차원 고차 Boussinesq 방정식에 대하여 불연속 갤러킨 유한요소법(Discontinuous Galerkin Finite Element Method)을 적용하였다. 연속적인 Boussinesq 방정식에서 각 요소경계에 불연속을 허용할 수 있도록 공간차분하고, 시간방향으로 4차 Runge-Kutta 시간적분법, 각 요소사이에는 Lax-Friedrichs 수치흐름률(numerical flux)을 적용하였다. 계산영역의 양쪽 선단에 불필요한 파랑의 반사를 억제하도록 흡수층을 설치하였으며, 영역 내부에서 조파가 가능하도록 이완법(relaxation method)을 사용하였다. Luth et al.(1994)의 수중잠재 실험에 적용하여 관측값과 잘 일치함을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 국토교통부 물관리연구사업의 연구비지원 (12기술혁신C02)에 의해 수행되었습니다.

참고 문헌

1. Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, World Scientific.
2. Engsig-Karup, A. P., Hesthaven, J. S., Bingham, H. B. and Madsen, P. A. (2006). "Nodal DG-FEM solution of high-order Boussinesq-type equations", *J. Engrg. Math.*, 56, 351-370.
3. Eskilsson, C., Sherwin, S. J. and Bergdahl, L. (2006). "An unstructured spectral/*hp* element model for enhanced Boussinesq-type equations", *Coastal Engrg.*, 53, 947-963.
4. Larsen, J. and Dancy, H. (1983). "Open boundaries in short wave simulations - A new approach", *Coast. Eng.*, 7, 285 - 297.
5. Lee, H. (2014). "Application of Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method to shallow water flow", *KSCE J. Civil Engrg.*, 18, 1554-1562.
6. Lee, H. and Lee, N. (2016). "Application of Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method to shallow water flow", *KSCE J. Civil Engrg.*, 20, 978-989.
7. Luth H.R., Klopman B., Kitou N. (1994). Projects 13G: kinematics of waves breaking partially on an offshore bar: LDV measurements for waves with and without a net onshore current. *Technical report H1573*, Delft Hydraulics.

8. Madsen, P. A., Bingham, H. B., and Liu, H. (2002). "A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water", *J. Fluid Mech.*, 462, 1-30.
9. Reed, W. H. and Hill, T. R. (1973). Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation, Scientific Laboratory *Report, Los Alamos, LA-UR-73-479.*
10. Savitzky, A. and Golay, M. J. E. (1964). "Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures", *Anal. Chem.*, 36, 1627-1639.