

2차원 타원형 물체의 유체 중 침강특성이 종단속도에 미치는 영향 연구

Study of Terminal Velocity of 2-D Elliptical Object by Sedimentation Characteristics

¹진재윤
¹연세대학교 대기과학과

본 연구는 타원형 물체가 유체 중에서 침강할 때 물체의 형상과 밀도에 따른 침강특성을 분석하는 것이며, 이로 인해 종단속도에 미치는 영향을 평가하는 것이다. 복잡한 형태의 물체를 타원기둥으로 단순화하였고, 낮은 Reynolds 수(=0.5~100)에 대하여 연구를 진행하였다. 또한 침강형태가 종단속도에 미치는 영향을 연구하였다. 수치해석 검증을 통해 정확하고 효율적인 격자 크기를 결정하였다. 정확한 분석을 위해 단순히 종단속도의 변화를 본 것이 아니라 진동하지 않은 물체의 이론적 속도와 비교하여 이와 얼마나 차이가 있는지를 확인하였다. 수치해석 결과 장단축비에 따라 물체의 침강특성이 크게 변화였고 그 경향은 밀도비에 따라 다른 양상을 보였다. 또한 각의 진동에 대한 진폭과 진동수가 물체의 침강속도에 영향을 주는 것을 확인하고 그 원인에 대해서도 연구하였다.

Key Words : 타원기둥(Elliptical Cylinder), 종단속도(Terminal Velocity), 밀도비(density Ratio), 장단축비(Aspect Ratio), 각 진폭(Amplitude of Angle), 각 진동수(Frequency of Angle)

기호설명

- V_t : 종단속도 (cm/s)
- m_p : 물체의 질량 (g)
- ρ_p : 물체의 밀도 (g/cm^3)
- ρ_f : 유체의 밀도 (g/cm^3)
- A_p : 물체의 진행방향에 대한 단면적(cm^2)
- C_D : 항력계수
- T : 시간 (s)
- V : y방향으로의 속도(m/s)
- a : 타원의 장축(cm)
- b : 타원의 단축(cm)
- k : 장단축비(= $\frac{a}{b}$)
- γ : 밀도 비율(= $\frac{\rho_p}{\rho_f}$)
- A_θ : 각의 진동에 대한 진폭(degree)
- f_θ : 각의 진동에 대한 진동수(Hz)
- Re : 레이놀즈 수 (= $\frac{DV_t}{\nu}$)
- ν : kineticviscosity(cm^2/s)

D : nominal diameter(cm)

1. 서 론

주변에서 일어나는 많은 물리적 현상들 중의 하나가 유체 속에서의 물체 운동이다. 예를 들면, 낙엽이 떨어질 때 좌우로 흔들리면서 하강하다가 때론 뒤집히면서 내려오거나, 물속의 부유물이 가라앉는 모습 등을 볼 수 있다. 이때 유체에 의해 물체가 어떤 영향을 받는지를 이해하면 그 거동을 이해할 수 있다. 이러한 현상에 대한 이해는 해양에서 해조류나 오염물질의 침강특성에 따른 식생분포와 오염물질의 이동속도 및 분포를 예측하는데 큰 도움을 줄 수 있다. R.L.Oliver(1981)[1]

선행연구 Suzuki & Inamuro (2011)[2]는 타원형 물체에서 밀도비에 따른 침강특성을 조사하였다. 여기서 특정한 임계 밀도비 전에는 종단속도에 도달 시요동 없이 수평하게 침강하는 반면, 임계 밀도비 이상에서는 물체가 좌우로 움직이며 동시에 물체의 중심을 기준으로 회전진동하며 침강한다는 것을 보고하였다. Jorge Gabitto(2008)[3]에 따르면 구형태가 아닌 물질의 종단속도를 식(1)과 같이 제시하였는데,

$$V_t = \sqrt{\frac{2m_p g (\rho_p - \rho_f)}{\rho_p \rho_f A_p C_D}} \quad (1)$$

이 식은 물체가 진동없이 침강하는 것을 가정한 것이므로 실제 임계 밀도비 이상이나 납작한 타원형 같이 진동을 동반하는 경우는 오차가 커질 것으로 예상된다.

본 논문에서는 2차원 타원형 물질의 밀도뿐만 아니라 장단축비의 변화 시 회전각 진폭과 진동수의 변화를 분석하여 침강특성을 조사할 것이다. 또한 각 진폭, 각 진동수와 종단속도의 관계를 구하고 이를 (1)에서 구한 값과 비교함으로써 각 진동과 각진동수가 종단속도에 미치는 영향을 평가할 것이다. 본 연구에서는 EDISON_CFD의 ‘2차원 가상경계기법 기반 임의의 물체 이동 추적 SW’를 사용하였다.

2. 수치해석 대상 및 모델검증

2.1 수치해석 대상

Domain의 크기에 따라 유체에 끼치는 영향을 없애기 위해 Zhenhua Xia(2009)[4]에서의 연구 결과에 따라 타원의 장축 길이가 domain폭의 1/4정도가 되도록 설정하였다. 또한 domain의 높이는 물체가 종단속도에 도달하기 충분한 길이가 되도록 폭의 10배가 되도록 설정하였다. 점수계수 ν 는 $0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 이다. 이 검증에 사용된 변수들은 Fig.1에 도식화하였다. 여기서 타원형 물체의 초기 출발점의 좌표는 (0.2,3.5)이다.

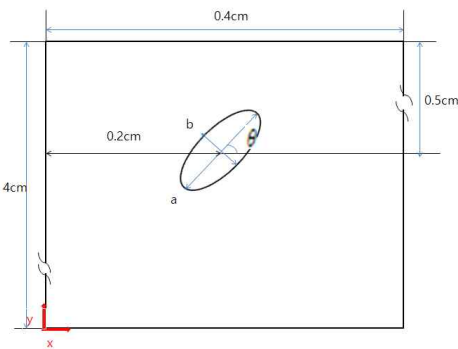


Fig.1 Domain of research and initial position of an elliptical cylinder

2.2 수치 해석 검증

정확하고 효율적인 연구를 위한 격자의 크기를 구하기 위해 $\Delta y (= \Delta x)$ 를 변경해가며 검증했다. 검증에 위한 선행연구의 결과는 Suzuki & Inamuro

(2011)[2]을 참고했다. 이 논문에서와 마찬가지로 $a=0.1 \text{ cm}$, $b=0.5 \text{ cm}$ 로 설정하였다.

검증을 위해 Δt 는 CFL number가 0.25가 되도록 설정했다.

$$\frac{u_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \Delta t}{\Delta y} = 0.25 \quad (2)$$

Fig.2 (a)–(c)는 밀도 비 γ 가 각각 1.01, 1.1, 1.5일 때 침강궤적에 대한 결과이다. Δy 는 0.01 cm, 0.005 cm, 0.0033 cm로 바뀌가며 실행했다. $\Delta y = 0.01 \text{ cm}$ 일 때는 밀도 비에 관계없이 선행연구의 결과와 차이가 크다. $\Delta y = 0.005 \text{ cm}$ 일 때는 밀도 비가 작은 $\gamma = 1.01, 1.1$ 에서 선행연구 결과와 거의 일치한 반면, $\gamma = 1.5$ 에서 선행연구 결과에 비해 약간 밀리는 결과를 얻었다. $\Delta y = 0.0033 \text{ cm}$ 은 모든 밀도 비에서 선행연구 결과와 일치하는 결과를 얻었다. 따라서 정확한 결과를 얻기 위해 본 연구에서는 $\Delta y = 0.0033 \text{ cm}$ 로 설정하였다.

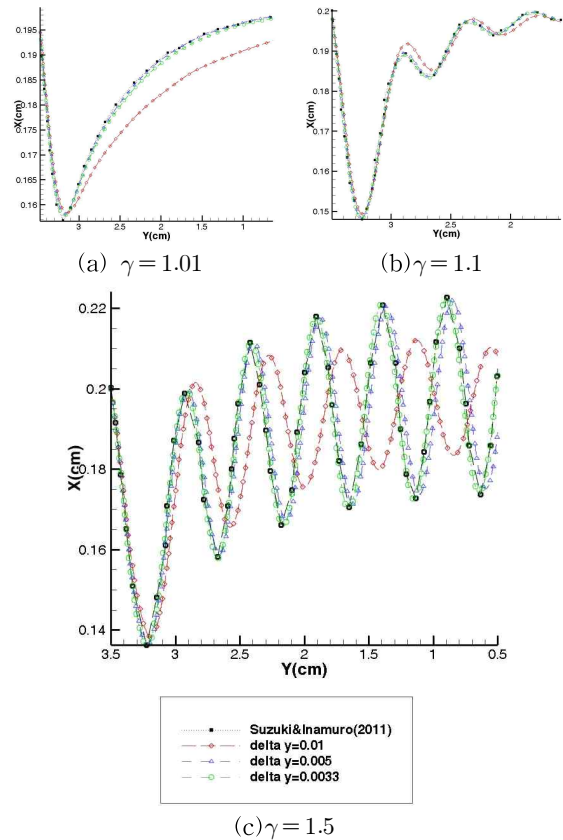


Fig.2 Comparison with reference(Suzuki&Inamuro(2011)) and result of numerical modeling with $\Delta y=0.0033, 0.005, 0.01$ in

$\gamma=1.01, 1.1, 1.5$

3. 해석결과 및 분석

3.1 해석조건 및 분석 방법

3.1.1 조건

Suzuki & Inamuro (2011)[2]에서의 장단축 길이에 대한 둘레 길이를 구하고, 타원의 둘레길이를 일정하게 유지하며 장단축 길이를 바꾸었다. 둘레의 길이는 인도 수학자 Ramanujan이 고안한

$$p \approx \pi(a+b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4-3h}}\right), \quad h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \quad (3)$$

를 사용했다.

본 연구에서 장단축비, 밀도비에 따라 진동형태가 어떻게 변하는지 알기위해 EDISON-CFD를 이용해 분석하였다. 장단축비는 1, 1.5, 1.75, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0로 바꾸고, 밀도비를 1.01, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0로 바꿔가며 시간에 따른 물체의 x,y 방향의 위치 및 속도, 중심각 θ 를 얻었다.

3.1.2 침강특성인자 정의

통제 변수를 동일하게 유지하며 타원기둥이 진동하지 않을 때의 종단속도를 구하기 위해 선행연구 Jorge Gabitto[3]를 참고하였다. 2차원 타원기둥의 종단속도는

$$V_t = \sqrt{\frac{2m_p g (\rho_p - \rho_f)}{\rho_p \rho_f A_p C_D}} = \sqrt{\frac{\pi g b (\gamma - 1)}{2 C_D}} \quad (1')$$

이다. EDISON실행 결과로 얻은 값(수치해석결과)과 진동하지 않을 때의 이론값을 비교하기 위해 오차율

$$\epsilon = \left| \frac{\text{수치해석결과} - \text{이론값}}{\text{이론값}} \right| \quad (4)$$

을 사용하였다. 이론값이 수치해석결과에 비해 항상 크기 때문에 오차율이 클수록 이론값에 비해 수치해석결과가 작다는 것을 의미한다.

또한, 종단속도 V_t 는 진동했을 때 값이 안정해진 이후로부터 두 번째, 세 번째 마루와 골, 4개의 값을 평균으로 구하였다.

각 진폭 A_θ 과 진동수 f_θ 는 중심각 θ 가 값이 일정하게 진동하는 이후로부터 두 번째, 세 번째 마루와 골, 4개의 값을 이용해 구하였다.

3.2 결과 및 분석

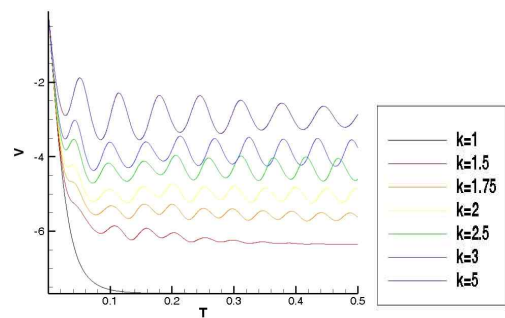
3.2.1 결과

본격적인 연구에 앞서, 식 (1)'이 적절한지 확인하기 위해 원형실린더에 대한 실험값과 (1)'을 통해 얻은 이론값을 비교하였다. Table.1은 이에 대한 결과를 정리한 것이다. 모든 밀도비에 대하여 오차율이 10%미만이기 때문에 식(1)'이 유효

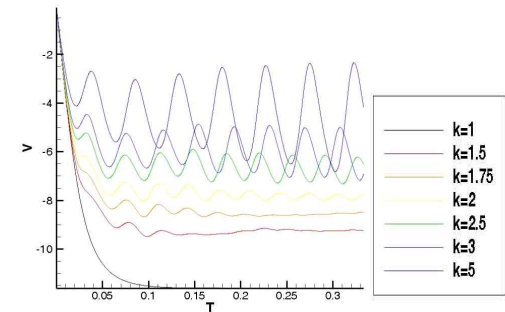
하다고 할 수 있다.

Table.1 The experimental value and theoretical value of terminal velocity and error ratio of these values.

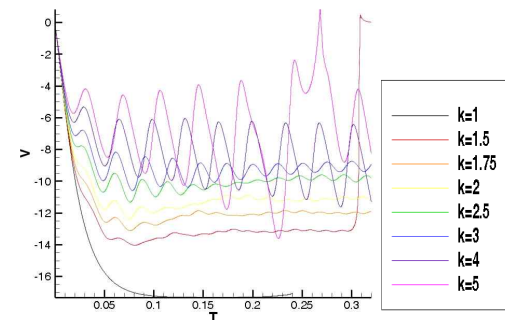
밀도비 (γ)	수치해석 값 (cm/s)	이론값 (cm/s)	오차율
$\gamma=1.5$	-4.97	-5.20	0.0446
$\gamma=2.0$	-7.66	-7.53	0.0181
$\gamma=3.0$	-11.55	-11.09	0.0425
$\gamma=4.0$	-14.67	-13.89	0.0564
$\gamma=5.0$	-17.32	-15.98	0.0841



(a) $\gamma = 2.0$



(b) $\gamma = 3.0$

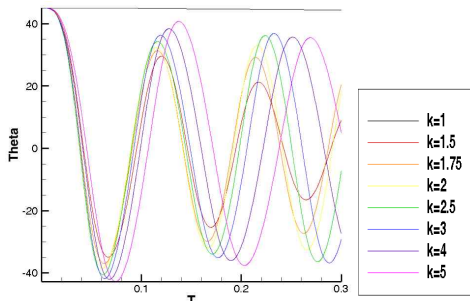


(c) $\gamma = 5.0$

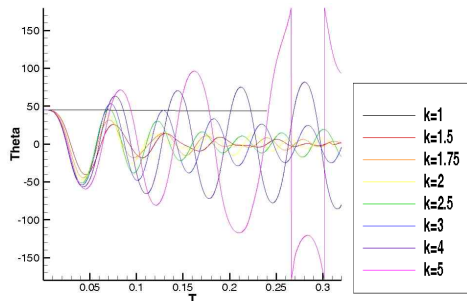
Fig.3 V-T graph in (a) $\gamma=2.0$, (b) $\gamma=3.0$, (c) $\gamma=5.0$

Fig.3은 각 밀도비에서 V-T그래프를 나타낸다. (a)-(c)를 비교한 결과 장단축비에 따른 진동에 대한 경향성은 일정하

지 않음을 확인하였다. fig.3 (a)를 보면 $k=1.5, 5$ 일 때 시간에 따라 진폭이 점점 감소하였고 나머지 장단축비에 대해서는 진폭이 일정하게 유지되었다. 반면 fig.3 (c)에서는 $k=1.5, 1.75, 2, 2.5, 3$ 에서 시간에 따라 진폭이 작아지고 $k=4, 5$ 에서 진폭이 커짐을 확인하였다. 이는 fig.4에서도 확인할 수 있다. fig.4 (a)에서 $k=2, 2.5, 3$ 에서 각진폭이 일정하지만, $k=4, 5$ 에서는 각진폭이 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 반면 fig.4(b)에서는 $k=4, 5$ 에서 진폭이 증가하고 그 이하에서는 일정하거나 줄어드는 것을 확인할 수 있다. fig.3 (c)와 fig.4(b)를 보면 $\gamma=5.0$ 에서 갑자기 값이 튀는데 이는 중심각 θ 가 180° 를 넘어 뒤집혔기 때문이다.



(a) $\gamma=2.0$



(b) $\gamma=5.0$

Fig.4 θ -T graph in (a) $\gamma=2.0$, (b) $\gamma=5.0$

3.2.2 수치해석결과 분석

각각의 실험변수들이 어떤 관계를 갖는지 알기 위해 fig.5-8로 정리하였다. Fig.5-7은 각진폭 A_θ , 진동수 f_θ , 오차율 ϵ 과 장단축비 k , 밀도비 γ 와의 관계를 나타낸다. fig.5를 보면 3.2.1에서 논의한 점이 잘 나타나있다. Fig.5(a)에서 밀도비가 작을 때는 장단축이 클수록 각진폭이 커지다 작아지지만, 밀도비가 큰 경우 장단축비가 클수록 각진폭이 커진다.

Fig.6을 보면 k 와 γ 에 따른 진동수 변화가 규칙적임을 알 수 있다. 장단축비가 클수록 진동수는 작아지고, 밀도비가 클수록 진동수는 커진다.

Fig.7을 각진폭 A_θ , 각진동수 f_θ 에 따른 오차율의 관계를

확인할 수 있다. 주목할 점은 Fig.5(a)와 Fig.7(a)가 매우 유사한 형태를 가진다는 것이다. 즉, 각진폭과 오차율 사이에 큰 상관관계를 갖는다는 것이다. 실제로 그 연관성을 확인하기 위해 임의의 k, γ 에 대하여 $\epsilon-A_\theta$ 그래프를 그렸다(fig.8). Fig.8에서 빨간 선은 A_θ 가 큰 4개의 점을 제외하고 선형회귀 분석하여 얻었다. A_θ 가 50° 전까지 ϵ 과 A_θ 가 매우 선형적인 관계를 가진다. 즉, 오차율과 각진폭 사이에 큰 연관성을 갖는다는 것이다. 하지만 A_θ 가 50° 이상에서는 A_θ 의 변화에 따라 ϵ 의 변화가 거의 없다. 즉, 오차율과 각진폭 사이에 연관성이 줄었다는 것이다. 이에 대한 근거는 Fig.6(a)에서 찾을 수 있다. 각진폭이 50° 이상인 경우는 각진동수가 상대적으로 작다. 각진폭이 크더라도 진동수가 작기 때문에 진동의 영향이 줄어든다. 또한 순간적으로 θ 가 큰 순간은 물체에 대한 운동방향으로의 단면적이 작아져서 항력이 줄어든다. 정리하면, 충분한 진동수에서는 각진폭 A_θ 가 클수록 오차율이 커지는 반면, 작은 진동수에서는 각진폭이 오차율에 큰 영향을 끼치지 않는다.

(a) A_θ, k graph

(b) A_θ, γ graph

Fig.5(a) A_θ -k graph with variation of γ and (b) A_θ - γ graph with variation of k

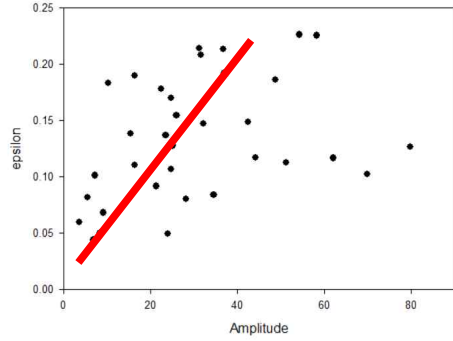
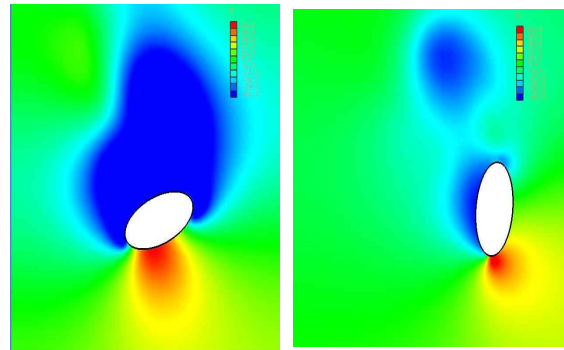


Fig.8 $\epsilon-A_\theta$

(a) f_θ, k graph

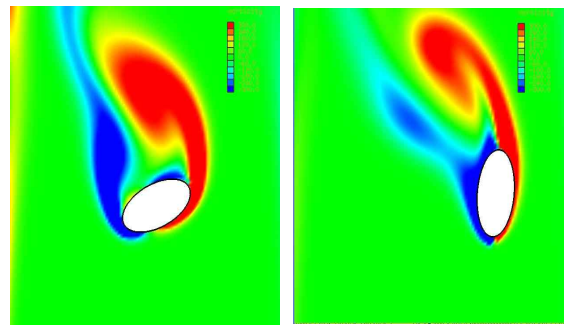


(a) $k=2.5 \quad \gamma=4$
 $T=3.0s$

(b) $k=4 \quad \gamma=4$,
 $T=4.0s$

(b) f_θ, γ graph

Fig.6(a) $f_\theta-k$ graph with variation of γ and (b) $f_\theta-\gamma$ graph with variation of k



(c) $k=2.5 \quad \gamma=4$,
 $T=3.0s$

(d) $k=4 \quad \gamma=4$,
 $T=4.0$

Fig.9(a) and (b) p-contour graph, (c) and (d) vorticity-contour graph

3.2.3 유동분석

각 진폭이 50° 부근에서 경향이 변하는 것을 확인하기 위해 Fig.9.(a)-(d)는 $\gamma=4.0$ 에서 $k=2.5(T=3.0s)$ 와 $k=4(T=4.0s)$ 를 비교한 것이다. Fig.5(a)와 Fig.7에 의하면 두 조건에서 장단 축비는 유의미하게 다르지만 오차율은 거의 차이가 없음을 확인하였다. 즉 각 진폭이 오차율에 큰 영향을 주지 않았다는

Fig.7 $\epsilon-k$ graph with variation of γ

것을 의미한다. Fig.9(a)와 (b)를 비교하면, Fig.9(a)는 작은 회전각 θ 로 인해 진행방향으로의 넓은 단면적을 갖지만 Fig.9(b)는 큰 회전각 θ 로 인해 진행방향으로의 좁은 단면적을 갖는다. Fig.9(c),(d)를 비교하면 (d)가 유체가 유선형 물체를 따라 잘 흘러가는 것을 확인할 수 있다. 즉 θ 가 50° 를 넘어가면 위와 같은 영향으로 인해 진동을 조금 받는 것과 같은 결과가 나타난다.

4. 결론

본 연구는 EDISON_CFD의 "2차원 가상경계기법 기반 임의의 물체 이동 추적 SW"를 사용하여 층류에서 장단축비와 밀도비에 따른 타원실린더의 침강특성을 관찰하였다.

타원형의 장단축비에 따른 종단속도 도달 시의 진동형태는 밀도비 γ 에 따라 다른 양상을 보였다. 밀도비가 클 때 장단축비 k 가 크면 속도변화의 진폭이 시간에 따라 커지지만, 밀도비가 작을 때 장단축비가 크면 속도변화의 진폭이 줄어든다는 것을 확인하였다. 또한 큰 밀도비 $\gamma=5$ 와 큰 장단축비 $k=5$ 에서는 회전각이 계속 커지다가 결국 회전각이 180° 를 넘어 뒤집어진다는 것을 볼 수 있다.

타원형의 장단축비 k , 밀도비 γ 에 따른 각 진폭 A_θ , 각 진동수 ω 의 변화를 통해 A_θ 과 종단속도 V_t 와의 관계를 확인하였다. $A_\theta-k$ 그래프와 $\epsilon-k$ 그래프가 유사한 형태를 가짐을 확인하였다. $\epsilon-A_\theta$ 분산도 그래프로부터 A_θ 가 약 50° 전에는 ϵ 이 선형적으로 증가하였지만, 그 이후로는 ϵ 이 일정한 값으로 수렴하는 것을 확인하였다. p-contour, vorticity-contour 경우 50° 이후에는 회전각 θ 가 커지는 것이 운동방향에서의 단면적이 줄어들고 물체가 유선형으로 바뀌므로 종단속도가 커진다는 것을 알 수 있다. 한편, 기존의 타원형 물체의 종단속도 V_t 에 대한 이론식 (1)은 진동을 고려하지 않고 유도된 것으로, 본 연구의 대상에 대한 전산해석 결과와 비교해 볼 때 회전이나 진동이 큰 침강특성을 가진 경우 그 차이가 커진다는 것을 확인할 수 있었다. 그러므로 이론 식 (1) 적용 시 주의하여야 할 것이다.

앞으로 타원과 같은 단순한 형태나 층류가 아닌 복잡한 상황에 대한 연구가 더 진행된다면 실제 물체에 대한 이해를 높일 수 있을 것으로 기대된다.

References

- [1] 1981, R.L. Oliver, A.J. Kinnear, and G.G. Ganf, "Measurements of cell density of three freshwater phytoplankters by density gradient centrifugation" *Limnol. Oceanogr.*, vol.26, p.285-294
- [2] 2011, Kosuke Suzuki, Takaji Inamuro, "Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method" *Computers & Fluids*, Vol.49,p.173-187
- [3] 2008, Jorge Gabitto, Costas Tsouris, "Drag coefficient and settling velocity for particles of cylindrical shape", *Power Technology*, vol.183, p314-322
- [4] 2009, Zhenhua Xia, Kevin W.Connington, Saikiran Rapaka, Pengtao Yue, James J.Feng, Shiyi Chen, "Flow patterns in the sedimentation of an elliptical particle", *J.Fluid Mech.*, vol.625, p.249-272