

# 내부에너지를 최대화 하는 활 구조의 최적화

문 명 조<sup>1\*</sup> · 이 현 정<sup>2</sup>

서울과학기술대학교 기계공학과  
서울과학기술대학교 기계자동차공학과

## Shape optimization of a bow for maximizing internal-energy

Myeong-Jo Moon<sup>1\*</sup>, Hyun-Jung Lee<sup>2</sup>

Mechanical Engineering, Seoul National Univ. of Science and Technology, Seoul 139-743, Korea  
Mechanical and Automotive Engineering, Seoul National Univ. of Science and Technology, Seoul 139-743, Korea

### Abstract

In this paper, the optimized design for bow structure was investigated by using EDISON software. Considering the mechanism of the bow, non-linear FEM analysis was essential. The factors of the design are height, width, number of holes and taper value. High performance of the internal energy and lowest mass were main issues. The limit of the von-mises stress was yield strength for the material. Material was chosen by considering typical bow material, Aluminum. Using Taguchi method( $L_9$ ), 9 models were selected and contribution rate was calculated for each factors. Following the contribution rate, 3 factors were fixed and optimized model was predicted. After making optimized model for FEM analysis, the value of internal-energy, mass for FEM model were compared with predicted value, calculated the percentage error and figure out the reliability of Taguchi method.

**Keywords** : FEM analysis, non-linear analysis, bow, optimization, force-displacement analysis, Taguchi method, internal energy

### 1. 서 론

활은 바퀴와 함께 인류의 오래된 발명품으로서 현재까지도 스포츠, 사냥 분야 등 여러 방면에서 사용되고 있다. 2015년 기준으로 우리나라 기업의 세계 시장 점유율은 60% 정도이며 이를 이루게 한 기반은 높은 내구성에 있다. 이에 따라 활의 재료는 전통적으로 나무를 사용하였으나 최근에는 높은 강도, 강성을 얻기 위하여 알루미늄이나 복합재료가 사용되고 있다.

활은 크게 활대(Limb)와 시위(Bowstring)로 구성되어 있다. 활은 탄성력을 이용해 거동하므로 이때 탄성력이 해준 일은 활대에 내부에너지로 저장된다. 그리고 활대에 저장되는 내부에너지가 높을수록 화살 또한 높은 운동에너지를 가지게 된다.

구조 해석에서 비선형은 크게 기하학적 비선형, 재료의 비선형, 경계 조건의 비선형으로 분류되며 활의 경우, 대 변형이 발생하는 기하학적 비선형을 보인다.

본 논문에서의 최종 목표는 단위 중량당 내부에너지가 최대가 되는 활 구조의 최적화이며, 다구치 기법을 통한 실험의 설

계와 EDISON을 이용하여 전체 길이가 1m의 활에 대한 FEM 해석을 실시하였다. 설계 변수로는 활대의 형상과 단면의 두께, 높이를 고려하였다. 활의 내부에너지는 힘-변위 그래프의 면적으로 구할 수 있으며 이를 수행하기 위해 앞서 언급한 비선형을 고려하여 변위에 따른 반력을 산출하였다. 면적은 수치 해석 방법 중에 하나인 Trapezoidal Rule을 통해 계산하였다.

### 2. 내부에너지

#### 2.1 힘과 에너지 관계

입자가  $x_i$ 에서  $x_f$ 로 움직일 때  $F_x$ 가 한 일은  $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$  과 같이 나타 낼 수 있다. 그리고 어떤 계에 하나 이상의 힘이 작용하고 그 계가 입자로 모형화 될 수 있다면, 그 계에 대해 한 전체 일은 알짜 힘이 한 일과 같다.  $x$  방향으로의 알짜 힘을  $\sum F_x$ 라고 하면, 입자가  $x_i$ 에서

$x_f$ 로 움직일 때 전체 일 또는 알짜일은 다음과 같다.

$$\sum W = W_t = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx$$

또한 계를 사용하여 문제를 해결하기 위해서 고려해야 할 중요한 점은 일은 에너지의 전달이라는 것이다. 계가 환경과 상호 작용한다면 이 상호 작용은 계의 경계를 통한 에너지의 전달로 묘사할 수 있다. 이 결과로 계에 저장된 에너지가 변한다.

본 논문에서는 위의 이론을 바탕으로 활을 하나의 계로 지정하였고 활에 해준 일을 활대에 저장된 에너지로 보았다. 이에 따라 시위를 기준으로 힘-변위 그래프를 산출하였으며, 이를 통해 활대의 내부에너지를 구하여 최적화를 수행하였다.

### 2.2 Trapezoidal Rule을 이용한 내부에너지 계산

함수  $f(x)$ 를 다항식으로 근사한 뒤 적분하는 방법을 통틀어서 Newton-Cotes Formula 로 칭한다. 이를 일반화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Trapezoidal Rule은 Newton-Cotes integration의 1차식이며 공식은 다음과 같다.

$$I = \int_a^b [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)] dx$$

본 논문에서의  $f(x)$ 는 힘의 함수이며  $x$ 는 시위의 변위를 나타낸다.

### 3. 활대의 형상 설계

#### 3.1 재료의 선정

일반적인 활의 종류에는 단궁(Short bow), 장궁(Long bow), 복합궁(composite bow) 등이 있다. 본 연구에서는 사냥용 활로 많이 쓰이는 장궁의 최적화를 수행하였다. 장궁의 재료는 일반적으로 나무를 많이 사용하나 이 경우 항복 응력 값이 낮기 때문에 항복의 위험이 크다. 따라서 이를 보완하고자 항복 응력 값이 높은 등방성 재료인 Aluminum을 사용하여 해석을 실시하였다. 해석에 사용된 물성치 Al7075는 다음과 같다.

Table 1 Material properties of Al7075

Poisson's ratio	0.33
Young's Modulus	717000 MPa
Yield strength	503 MPa
Density	2823.3 kg/m <sup>3</sup>

### 3.2 설계 변수 설정

본 논문에서는 활의 전체 길이를 1m로 고정하였다. 활대의 초기 단면은 직사각형으로 지정하였으며 폭, 높이, 테이퍼(Taper) 값, 홀(Hole)의 개수를 변수로 하여 모델을 생성, 응력 값을 비교하였다.

테이퍼란 서로 상대하는 양쪽 면이 경사가 져있는 것을 말하며 이때의 값은 면적의 비율로 나타내었다.

목표 응력 값은 재료의 항복 응력 값인 503MPa로 하였으며, 이때의 변위는 0.3m로 설정하였다.

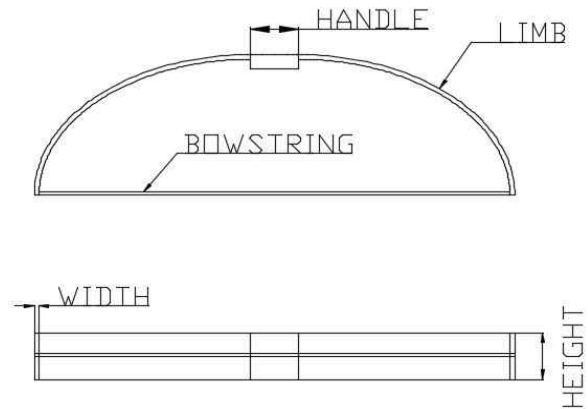


Fig. 1 Structure of bow

### 4. 다구치 기법을 통한 실험 설계

#### 4.1 설계 인자 설정 및 직교배열표

본 논문에서 다구치 기법의 목적함수는 내부에너지이다. 내부에너지 값이 최대가 되면서도 활대의 응력 값이 항복 응력 값을 초과하지 않으며 경량화를 하는 것이 목적이다. 설계인자는 고정된 치수를 제외하고 폭, 높이, 테이퍼 값, 홀(Hole)의 개수로 선정하였다. 이때의 홀의 지름은 14mm로 고정하였다.

총 4개의 인자와 3개의 수준을 Table 2에 배열하였으며, 이에 따라  $L_9(3^4)$  직교표로 Table 3에 나타내었다.

**Table 2** Design factors and levels(L)

Symbol	Specification	L1	L2	L3
W	Width (mm)	35	40	45
H	Height (mm)	25	30	35
N	Number of Holes	0	2	4
T	Taper Value	2	4	6

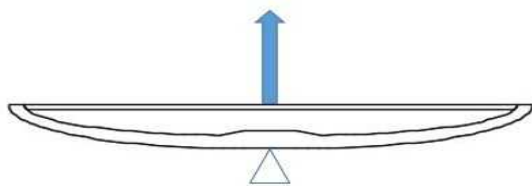
**Table 3** Orthogonal array table of  $L_9(3^4)$

No.	Co-ordination of design	W	H	N	T
1	W1H1N1T1	1	1	1	1
2	W1H2N2T2	1	2	2	2
3	W1H3N3T3	1	3	3	3
4	W2H1N2T3	2	1	2	3
5	W2H2N3T1	2	2	3	1
6	W2H3N1T2	2	3	1	2
7	W2H1N3T2	3	1	3	2
8	W3H2N1T3	3	2	1	3
9	W3H3N2T1	3	3	2	1

## 5. FEM 해석

### 5.1 경계조건

본 논문은 비선형 해석을 기본으로 수행하였다. 또한 FEM 해석시의 경계 조건은 다음과 같다. 손잡이 부분인 활대 중앙의 둘레를 따라 변위, 회전에 대해 구속 조건을 부여하였고 시위의 중앙 변위를 0.3m로 설정하였다.



**Fig. 2** Boundary condition

### 5.2 FEM 해석 결과

직교배열표에 따라 활의 해석을 수행하였으며 EDISON을 이용해 활대 Von-mises 응력의 최대값, 시위의 반력을 산출하였다. 그리고 이를 Table 4에 정리하였다.

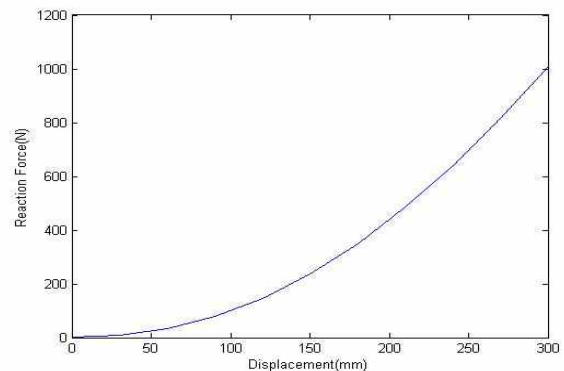
**Table 4** Maximum von-mises stress and Reaction force

No.	Co-ordination of design	Maximum von-mises stress (MPa)	Reaction force (N)
1	W1H1N1T1	425.678	1108.68
2	W1H2N2T2	361.049	1090.7
3	W1H3N3T3	348.392	1059.71
4	W2H1N2T3	407.181	1083.94
5	W2H2N3T1	394.96	771.559
6	W2H3N1T2	287.181	1255.41
7	W2H1N3T2	411.616	1219.67
8	W3H2N1T3	320.886	1187.5
9	W3H3N2T1	314.617	1234.89

## 6. 활대 형상의 최적화

### 6.1 내부에너지

EDISON을 이용하여 변위에 대한 반력을 구하여 그래프로 나타내었다. 또한 내부에너지 계산을 위해 상용 소프트웨어 MATLAB을 사용해 Trapezoidal Rule을 이용, 위 그래프의 면적을 산출하였다.



**Fig. 3** Displacement-Force graph (W1H1N1T1)

### 6.2 기여도를 통한 설계인자 분석

본 논문에서는 무게와 내부에너지에 대한 설계인자들의 영향을 고려하여 기여율을 산출해 설계수준 내의 최적화를 예측하였고 유한요소 해석을 실시하였다.

각 실험에서의 내부 에너지, 중량을 Table 5에 정리하였다.

**Table 5** Internal-energy and Mass

No	Co-ordination of design	Internal-energy(kJ)	Mass(kg)
1	W1H1N1T1	98.924	2.481
2	W1H2N2T2	106.84	2.710
3	W1H3N3T3	102.20	2.911
4	W2H1N2T3	106.01	2.212
5	W2H2N3T1	118.94	3.375
6	W2H3N1T2	123.39	4.873
7	W2H1N3T2	119.21	2.763
8	W3H2N1T3	115.80	3.134
9	W3H3N2T1	121.12	4.456

3수준 실험에서의 간이분석법을 통하여 간이분석표를 작성하였으며 내부에너지는 Table 6, 중량은 Table 7에 나타내었다. 아래의 표에는 인자의 수준별 합계와 변동(Sum of Squares(SS)) 및 기여율( $\rho$ )이 나타나 있으며 다음과 같은 과정으로 계산된다. 여기서  $R_i$ 은 각 인자의 내부에너지와 중량의 평균을 나타낸다.

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

$$SS_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$$

$$\rho = \frac{SS_j}{SS_T} \times 100(\%) \quad (\text{cf. } SS_T = \sum_{j=1}^m SS_j)$$

**Table 6** Contribution rate for Internal-energy

	W	H	N	T	Total
Level 1	102.65	108.05	112.7	112.99	1350.43
Level 2	116.89	113.86	111.32	116.48	
Level 3	118.46	115.57	113.45	108.0	
SS	50.54	10.36	0.78	12.10	73.78
$\rho$	68.5	14.05	1.05	16.40	100

**Table 7** Contribution rate for Mass

	W	H	N	T	Total
Level 1	2.70	2.49	3.5	3.44	38.72
Level 2	3.31	3.07	3.13	3.45	
Level 3	3.8	4.08	3.02	2.75	
SS	0.20	0.43	0.04	0.11	0.78
$\rho$	25.62	55.44	5.38	13.56	100

Table 6에 의하면 내부에너지에 대한 기여도는 W, T, H, N 순으로 높았으며 그 중 W 인자가 68.5%로 가장 영

향이 컸다. 또한, Table 7에 의하면 중량에 대한 기여도는 H, W, T, N 순으로 높았으며 그 중 H 인자가 55.44%로 가장 영향이 컸다.

### 6.3 최적화 모델 선정

앞서 보았듯이 내부에너지에 주요한 영향을 끼치는 인자는 W, 중량의 경우는 H이므로 최적화 요인에서 위 두 값을 기여율을 고려하여 Level 3와 Level 1으로 선정하였다. 또한 위의 두 결과를 살펴보았을 때 N은 내부에너지에는 1.05%로 영향이 미미하였으므로 Level 3으로 고정하여 최적화 모델을 선정하였다. 이는 Table 8에 정리하였다.

다구치 방법을 통해 내부에너지와 중량을 예측하는 방법은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Result (Calculated) = R_{W3} + R_{H1} + R_{N3} + R_{T1} - 3\bar{Y}$$

$$i = 1, 2, 3$$

위 식에서의  $\bar{Y}$ 는 전체 내부에너지와 중량의 평균값이다. 또한 표에서의 U는 단위 질량당 내부에너지의 값이다.

**Table 8** Calculated value for W3H3N3 models

No	W	H	N	T	Internal-energy	Mass	U
1	W3	H1	N3	T1	115.474	3.112	37.106
T2				118.964	3.122	38.105	
T3				110.484	2.422	45.617	

위의 표를 살펴보면 내부에너지만 고려하였을 때는 W3H1N3T2(No.2)가 가장 좋은 모델이지만 단위 질량당 내부에너지를 고려하였을 경우에는 W3H1N3T3(No.3)가 가장 최적화된 모델임을 볼 수 있다. 본 논문의 목표는 단위 질량당 내부에너지가 최대한 활의 최적화이므로 W3H1N3T3의 모델을 생성한 뒤 FEM 해석을 실시하여 예측 값과 이론값을 Table 9에 나타내어 비교하여 보았다. EDISON을 통해 해석한 모델의 von-mises 응력 분포는 Figure 4에 나타내었다.

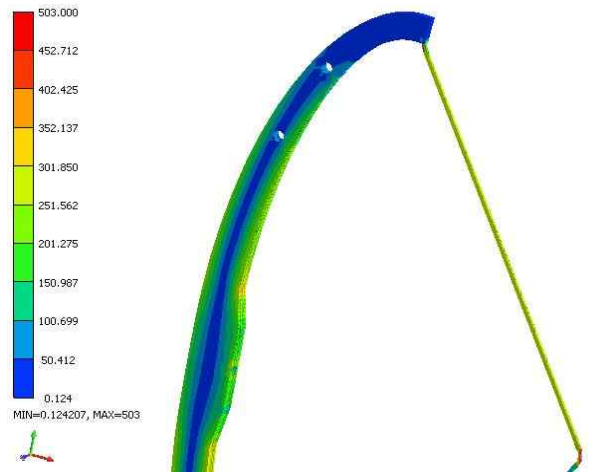
### 6.4 최적화 모델 해석 결과

최적화 결과 선정된 모델 (W3H1N3T3)의 해석 결과, 최대 Von-mises 응력 값은 434MPa로 재료의 항복 응력 503MPa를 넘지 않았다. 또한 내부에너지는 106.98kJ, 중량은 2.459kg으로 해석되었으며 이는 앞서 예측한 값

과 내부에너지는 3.17%, 중량은 1.53%로 매우 근소한 차이를 보였다. 따라서 다구치 기법을 통해 최적화를 수행한 결과는 신뢰할 수 있음을 보였다.

**Table 9** Compared values for W3H3N3 models

Model	Internal energy (kJ)	Mass (kg)	Von-mises stress (MPa)
W3H1N3T3 (Expected)	110.484	2.422	-
W3H1N3T3(Result)	106.98	2.459	434
Error(%)	3.17	1.53	-



**Fig. 5** Von-mises stress of the W3H1N3T3

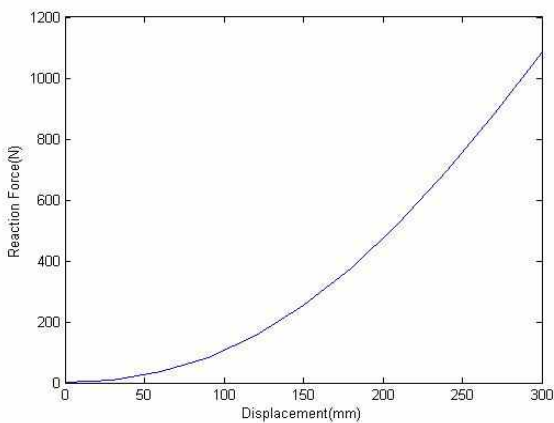
### 7. 결론

본 논문에서는 내부에너지에 따른 활의 최적화를 수행하였으며, 다구치 기법을 통해 최종 최적화 모델을 선정하였다. 설계 변수로는 고정된 치수를 제외하고 폭, 높이, 테이퍼 값, 홀(Hole)의 개수로 선정하였고, 직교배열표에 의해서 9개의 해석 모델을 만들어 기여율을 계산하였고 이에 따라 내부에너지의 경우 폭, 중량의 경우 높이가 영향을 많이 미치는 인자임을 알 수 있었다. 홀(Hole)의 개수는 내부에너지와 중량에 영향을 거의 미치지 않았으므로 최적화 모델 선정 시 폭은 45mm, 높이는 25mm, 홀의 개수는 4개로 고정한 뒤 테이퍼 값을 변화시켜 3개의 모델을 생성하였다. 각 모델에 대하여 내부에너지와 중량을 예측해 보았고 그 중 단위 중량당 내부 에너지가 높은 것으로 최종 모델을 선정하였으며 그에 따른 해석 결과, 최대 Von-mises는 434MPa로 항복응력을 넘지 않았으며 내부에너지는 106.98kJ, 중량은 2.459kg이 산출되었다. 이 결과 다구치 기법에서 예측한 값과 3.5% 이하의 오차를 보였으며 이를 통해 다구치 기법, FEM의 신뢰성을 확인하였다.

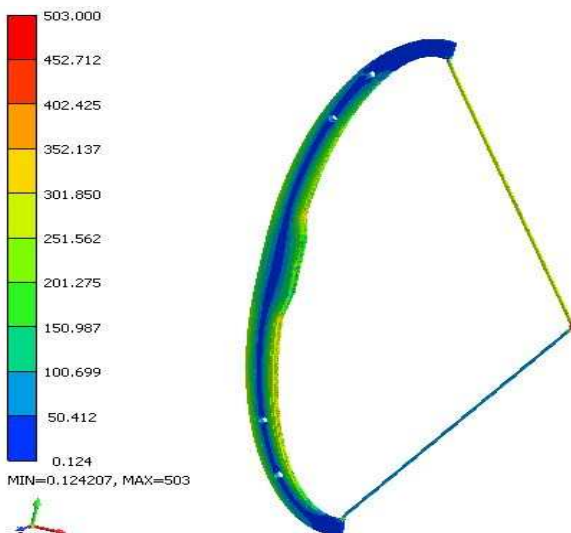
### 감사의 글

본 연구는 한국연구재단이 주관하는 첨단 사이언스 교육 허브 개발 사업(EDISON: NRF-2014M3C1A6038842)의 지원을 받아 수행한 연구결과입니다.

### Reference



**Fig. 4** Displacement-Force graph for the W3H1N3T3



- Choi, M.D., Kim, J.Y., Ko, H.I., et al.** (2010)  
Shape Design of Bends in District Heating Pipe System by Taguchi Method, *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 34, No.3, pp.307~313.
- Kooi, B.W.** (1980) On the mechanics of the bow and arrow, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 15, No. 2 pp.204~231.
- Kwon, H.M., Jang, H.A.** (2013) Case Studies on Strengths and Weaknesses of Taguchi Method, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 39, pp.383~392.
- Pagitz, M., Bletzinger, K.U.** (2004) Shape optimization of a bow, *Struct Multidisc Optim* 28, pp.73 - 76.
- Raymond A. Serway, John W. Jewett.** (2010)  
Physics for scientists and engineers, 8<sup>th</sup> edition, pp.101~112.
- Steven C. Chapra.** (2007) Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists, 3<sup>th</sup> edition, pp.468~474.