

고유치 해석을 이용한 보의 크랙 탐색

이 희 수^{1*} · 이 기 훈¹ · 최 재 훈¹

¹한국과학기술원 기계공학과

Detection of a Crack in Beams by Eigen Value Analysis

Hee-Su Lee^{1*}, Ki-Hoon Lee¹ and Jae-Hoon Choi¹

¹Division of Mechanical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon 305-701, Korea

Abstract

In this paper, crack detection method using eigen value analysis is presented. Three methods are used: theoretical analysis, finite element method with the cracked beam elements and finite element method with three dimensional continuum elements. Finite element formulation of the cracked beam element is introduced. Additional term about stress intensity factor based on fracture mechanics theory is added to flexibility matrix of original beam to model the crack. As using calculated stiffness matrix of cracked beam element and mass matrix, natural frequencies are calculated by eigen value analysis. In the case of using continuum elements, the natural frequencies could be calculated by using EDISON CASAD solver. Several cases of crack are simulated to obtain natural frequencies corresponding the crack. The surface of natural frequency is plotted as changing with crack location and depth. Inverse analysis method is used to find crack location and depth from the natural frequencies of experimental data, which are referred by another papers. Predicted results are similar with the true crack location and depth.

Keywords : Crack detection, Cracked beam element, Eigen value analysis, Finite element method

1. 서 론

보는 기계 산업에서 활용 빈도가 매우 높은 구조의 한 형태이다. 보의 파손은 전체 구조의 파괴에 영향을 미칠 수 있기 때문에 정기적으로 보의 파손 정도를 판단하는 것이 중요하다. 보의 크랙을 탐지하는 방법은 초음파를 이용한 방법, x-ray를 이용한 방법 등 다양한 방법이 연구되고 있다. 이 중 보의 고유 진동수를 이용해 크랙을 탐색하는 방법은 간단하고 쉽게 크랙을 탐지할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서는 보의 고유치 해석을 통해 크랙의 위치와 깊이를 탐색하는 방법을 제안한다. 세 가지 방법을 이용한다. 첫 번째 방법은 크랙이 있는 보를 이론적으로 해석하는 방법이다. 두 번째 방법은 파괴 역학 이론을 바탕으로 크랙이 있는 보 요소를 수식화 하여 보의 크랙을 모델링하는 방법이다. 세 번째 방법은 3차원 연속체 요소를 이용해 모델링하는 방법이다. 두 번째 방법과 세 번째 방법은 유한요소법을 이용한 방법이다. 이때에는 여러 경우의 크랙이 존재할 때에 대해 고유 주파수를 계산한다. 이후 타 논문에 제시된 고유

진동수 측정 실험값을 바탕으로 역 해석하여 크랙의 위치와 깊이를 판단하는 방법을 소개한다.

2. 본 론

2.1 오일러 베르누이(Euler-Bernoulli) 보의 이론적 해석

보가 굽힘 진동(Flexural vibration)할 때, 보의 굽힘 모멘트 $M(x,t)$ 와 보의 수직 변위 $V(x,t)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

(E : 탄성 계수, $I(x)$: 보 단면의 2차 관성 모멘트)

보의 형상은 Fig. 1과 같이 사각형의 단면을 갖는 외팔보로 가정한다. a 는 크랙의 깊이, L_c 는 크랙의 위치를 나타낸

다.

$h/L \geq 10, b/L \geq 10$ 인 경우 전단변형이 매우 작기 때문에 전단변형을 0으로 가정한다. 이에 따라 자유 진동을 하는 보의 진동 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 V(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

(A : 보의 단면적, ρ : 밀도)

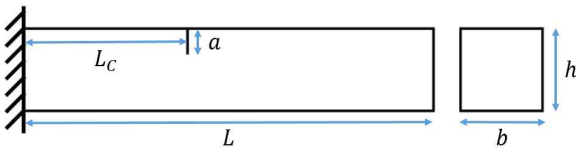


Fig. 1 보의 형상

보의 수직방향 변위는 변위와 관련한 항과 시간에 관련한 항으로 변수를 분리하여 나타낼 수 있고, 변위와 관련한 항을 나타내는 $X(x)$ 는 다음과 같은 일반해를 가진다.

$$V(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x) = A \sin\left(b\frac{x}{L}\right) + B \cos\left(b\frac{x}{L}\right) + C \sinh\left(b\frac{x}{L}\right) + D \cosh\left(b\frac{x}{L}\right) \quad (3)$$

$$(b^4 = \frac{\rho A L^4}{EI} w^2, A, B, C, D : \text{상수}, w : \text{고유 진동수})$$

또한 $X(x)$ 는 다음과 같은 경계 조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \text{자유 경계 조건: } X(x)'' = X(x)''' = 0 \\ \text{고정 경계 조건: } X(x) = X(x)' = 0 \\ \text{핀 경계 조건: } X(x) = X(x)'' = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

크랙이 있는 보를 분석하기 위한 가장 보편화된 모델은 바로 Dimarogonas와 Papadopoulos가 제시한 회전 스프링 모델이다. 크랙이 위치한 곳에 회전 스프링을 추가하여 크랙이 없는 경우보다 더 많은 회전 변위가 발생하도록 하는 것이다. 보의 수직 방향 변위는 다음과 같이 크랙의 위치를 경계로 나누어 두 개의 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_1(\xi) &= A_1 \sin(b\xi) + A_2 \cos(b\xi) \\ &\quad + A_3 \sinh(b\xi) + A_4 \cosh(b\xi) \quad (0 \leq \xi \leq L_c) \\ X_2(\xi) &= A_5 \sin(b\xi) + A_6 \cos(b\xi) \end{aligned}$$

$$+ A_7 \sinh(b\xi) + A_8 \cosh(b\xi) \quad (L_c \leq \xi \leq 1)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, K = \frac{K_t L}{EI}, \alpha = \frac{a}{h}, \xi = \frac{x}{L} \quad (5)$$

(a : 크랙의 깊이, K : 무차원 회전 스프링 상수, K_t : 회전 스프링 상수, α : 무차원 크랙 깊이, L_c : 크랙 위치)

이 때, X_1, X_2 는 다음과 같은 경계 조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} X_1(0) = X_1(0)' = 0, X_2(1) = X_2(1)''' = 0 \\ X_1(\xi) = X_2(\xi), X_1(\xi)'' = X_2(\xi)'', X_1(\xi)''' = X_2(\xi)''' \\ K(X_2(\xi_c)' - X_1(\xi_c)') = X_2(\xi_c)'' \end{aligned} \quad (6)$$

이를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0, 0, & 0, 0 \\ 0, 0, & 0, 0 \\ -\sin(b), -\cos(b), \sinh(b), \cosh(b) \\ -\cos(b), \sin(b), \cosh(b), \sinh(b) \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \sin(bx), \cos(bx), \sinh(bx), \cosh(bx) \\ -\sin(bx), -\cos(bx), \sinh(bx), \cosh(bx) \\ -\cos(bx), \sin(bx), \cosh(bx), \sinh(bx) \\ K \cos(bx), -K \sin(bx), K \cosh(bx), K \sinh(bx) \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -\sin(bx), -\cos(bx) & -\sinh(bx), -\cosh(bx) \\ \sin(bx), \cos(bx) & -\sinh(bx), -\cosh(bx) \\ \cos(bx), -\sin(bx) & -\cosh(bx), -\sinh(bx) \\ -K \cos(bx) - b \sin(bx), K \sin(bx) - b \cos(bx), b \sinh(bx) - K \cosh(bx), b \cosh(bx) - K \sinh(bx) \end{bmatrix}$$

식 (5)의 A_1, A_2, \dots, A_8 가 무의미하지 않은 해를 찾기 위해서는 'det(A) = 0'을 만족하여야 한다. 이 식을 풀어 다음과 같이 식을 스프링 상수 K_t 를 b, ξ 에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

$$K_t = K \frac{EI}{L} = \frac{EI}{L} g(b, \xi) \quad (7)$$

한편, 스프링 상수 K_t 는 사각형 단면을 갖는 경우 다음과 같이 α 에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 이는 다음과 같이 표현할 수 있다(Nahvi, 2005).

$$K_t = \frac{Ebh^2}{72I\alpha^2 f(\alpha)} \quad (8)$$

$$f(\alpha) = 0.6384\alpha^2 - 1.035\alpha^3 + 3.7201\alpha^4 - 5.1773\alpha^5 + 7.553\alpha^6 - 7.3324\alpha^7 + 2.4909\alpha^8$$

따라서 식 (7)과 식(8)을 연립하면 크랙의 위치와 크기에

제5회 첨단 사이언스·교육 허브 개발(EDISON) 구조동역학 경진대회

따라 고유진동수(w)를 구할 수 있다.

2.2 크랙이 있는 보 요소의 수식화

크랙이 없는 경우, Euler-Bernoulli 이론을 따르는 보에 발생하는 변형 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_b^2}{EI} dx \quad (9)$$

여기서 L 은 보 요소의 길이를 나타낸다. 보 요소에 작용하는 총 굽힘 모멘트(M_b)는 다음과 같이 단면에서의 전단력(V)과 모멘트(M)를 이용해 일반화 할 수 있다.

$$M_b = Vx + M \quad (10)$$

크랙이 있는 경우, 보는 크랙이 없는 경우보다 더 많은 변형을 하게 되고, 이로 인해 추가적인 변형 에너지가 발생한다. 크랙으로 인한 추가 변형에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다(Tada, 1973).

$$U_c = \int_A \frac{1}{EA} \left[(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{1-\nu} K_{III}^2 \right] dA \quad (11)$$

여기서, ν 는 포아송 비(Poisson's ratio), K_I , K_{II} , K_{III} 는 크랙으로 인한 응력 확대 계수(Stress intensity factor)를 의미한다. 보의 단면을 사각형이라고 가정하면 식 (9)를 다음과 같이 표현할 수 있다(Nahvi, 2005).

$$U_c = \frac{b}{E} \int_0^a [(K_{I,M} + K_{I,V})^2 + K_{II,V}^2] da \quad (12)$$

식 (12)의 응력 확대 계수는 다음과 같이 표현된다(Tada, 1973).

$$\begin{aligned} K_{I,M} &= \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(\alpha) \\ K_{I,V} &= \frac{3VL}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(\alpha) \\ K_{II,V} &= \frac{V}{bh} \sqrt{\pi a} F_{II}(\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 α 는 정규화 된(Normalized) 크랙의 깊이로 $\alpha = a/h$ 로 표현할 수 있다. 식 (13)에서 사각형 단면에 대

한 응력 확대 계수, $F_I(\alpha)$ 와 $F_{II}(\alpha)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F_I(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}} \times \frac{0.923 + 0.199 \times (1 - \sin(\pi\alpha/2))^4}{\cos(\pi\alpha/2)} \\ F_{II}(\alpha) &= (3\alpha - 2\alpha^2) \times \frac{1.122 - 0.561\alpha + 0.085\alpha^2 + 0.18\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha}} \end{aligned} \quad (14)$$

보의 변형에너지는 크랙이 없는 경우의 변형 에너지와 크랙으로 인한 변형 에너지를 더하여 나타낼 수 있고, 다음과 같이 식 (9)과 식 (12)을 더하여 표현된다.

$$U = U_0 + U_c \quad (15)$$

식 (15)에서 크랙이 없는 경우에는 크랙의 깊이(a)가 0이 되어 크랙으로 인한 변형 에너지가 0이 되고, 크랙이 없는 보와 관한 항만 남는다. 식 (15)를 전단력과 모멘트로 미분함으로 유연 행렬(Flexibility matrix)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ij}^{(0)} + C_{ij}^{(c)} = \frac{\partial^2 U}{\partial T_i \partial T_j} \\ (T_1 = V, T_2 = M, i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)은 대칭행렬이 되며 각 성분을 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{L^3}{3EI} + 2B_1(9L^2B_2 + h^2B_3) \\ C_{12} &= \frac{L^2}{2EI} + 36LB_1B_2 \\ C_{22} &= \frac{L}{EI} + 72B_1B_2 \\ (B_1 = \frac{\pi(1-\nu^2)}{Ebh^2}, B_2 = \int_0^\alpha \alpha F_I(\alpha) d\alpha, B_3 = \int_0^\alpha \alpha F_{II}(\alpha) d\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에서 B_2 , B_3 의 적분은 해석적으로 구하지 않고, 직사각형 형태로 분할하여 계산하는 수치 적분을 이용하였다. 유연 행렬에 크랙과 관련된 항이 추가되는 것은 요소가 같은 힘에 대해 더 많은 변형을 할 수 있도록 수정됨을 의미한다. 이를 이용해 강성을 구하면 강성은 기존의 강성보다 낮아지게 되어 크랙으로 인한 추가적인 변형을 표현하게 된다. 한편 식 (17)에서 크랙의 깊이는 α 로 표현되나 크랙의

위치는 표현되지 않으므로 크랙의 위치는 요소의 중심이라고 가정한다.

보 요소의 양 단에 작용하는 전단력과 모멘트는 요소 내에서 역학적 평형을 이루어야 한다. 하나의 절점을 i , 다른 하나의 절점을 $i+1$ 로 표현하면 두 절점의 힘은 한 절점의 힘으로 축약하여 표현될 수 있다. 변환 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (V_i M_i V_{i+1} M_{i+1})^T &= [T](V_{i+1} M_{i+1})^T \\ [T] &= \begin{bmatrix} -1-L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (18)$$

가상일의 원리를 적용하고, 식 (16)의 유연 행렬과, 식 (18)의 변환 행렬을 이용해 다음과 같이 보의 요소 강성 행렬을 계산할 수 있다(Qian, 1990).

$$[K_c] = [T]^T [C]^{-1} [T] \quad (19)$$

2.3 유한요소해석을 이용한 고유 진동수의 계산

본 절에서는 크랙이 있는 보 요소를 이용한 경우와 3차원 연속체 요소를 이용해 고유 주파수를 구하는 과정에 대해 설명한다.

보의 치수와 물성을 Table 1에 나타내었다. 여기서의 L 은 요소의 길이가 아닌 보 전체의 길이를 의미한다.

보의 파손을 판단하기 위해 작은 크랙도 탐지할 수 있어야 한다. 따라서 전체 부피에 대한 크랙의 부피를 무시할만하다고 가정하고 보의 질량행렬은 표준 보 요소의 질량행렬과 같다고 가정한다. 2.2절에서 제시한 방법으로 크랙이 있는 보의 강성 행렬을 구성하고 유한요소법으로 질량행렬을 구성한 뒤, 다음과 같은 식으로 표현되는 일반화 된 고유치 문제를 풀어 고유 진동수를 구하게 된다.

Table 1 Physical and material properties of beam

Symbol	Contents	Value
L	Length	300mm
b	Width	20mm
h	Height	20mm
E	Young's modulus	206 GPa
ρ	Mass density	7750 kg/m ³
ν	Poisson's ratio	0.3

$$([K] - w^2[M])\{U\} = 0 \quad (20)$$

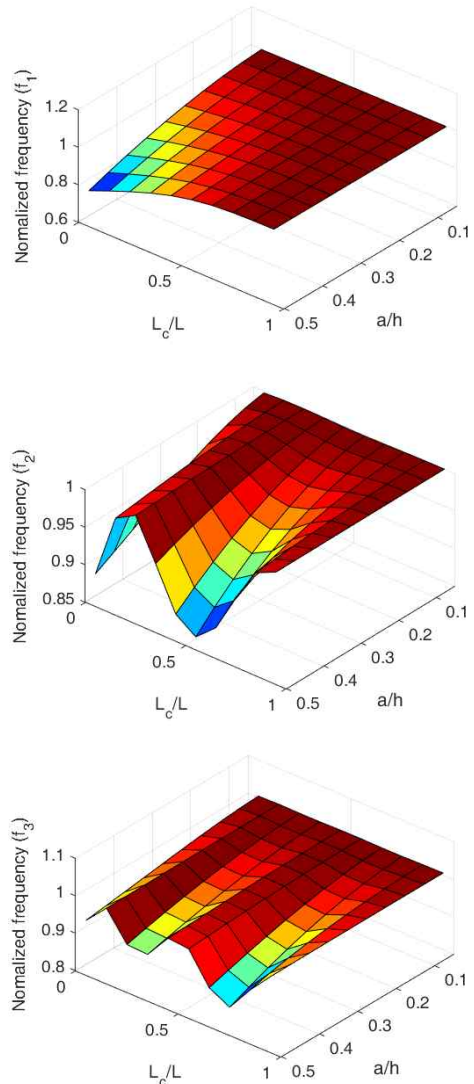


Fig. 2 Normalized natural frequency

여기서 $[K]$ 는 구조의 강성 행렬, $[M]$ 은 구조의 질량 행렬, w 는 고유 진동수, $\{U\}$ 는 고유 벡터가 된다.

크랙 탐색을 위해 3개의 고유 진동수를 구한다. 2개의 고유 진동수를 이용할 경우 크랙의 위치와 깊이가 하나의 경우로 정해지는 것이 아니라 여러 개의 경우를 가질 수 있기 때문이다.

유한요소 해석을 이용한 첫 번째 방법은 크랙이 있는 보 요소를 이용한 경우이다. EDISON에 탑재된 교육용 프로그램에는 사용자 정의 요소를 사용할 수 있다. 여기에 크랙이 있는 보 요소를 입력하여 강성과 질량행렬을 도출한 뒤 MATLAB을 이용해 주파수를 계산하였다. 10개의 요소로 보를 모델링 하였다. 크랙의 위치는 15mm부터 30mm간격으로 285mm까지 10개의 경우, 크랙의 깊이는 1mm부터 1mm간격으로 10mm까지 10개의 경우, 총 100개의 경우에

제5회 첨단 사이언스·교육 허브 개발(EDISON) 구조동역학 경진대회

Table 2 Compare natural frequencies

Case	Crack location [mm]	Crack depth [mm]	Mode	Analysis [Hz]	크랙 보 요소 [Hz]	연속체 요소 [Hz]	Experiment [Hz]	Differences (Analysis) [%]	Differences (크랙 보 요소) [%]	Differences (연속체 요소) [%]
No crack	-	-	1	185.0754	185.1	185.781	185.2	0.067	0.054	0.314
			2	1159.857	1159.9	1140.87	1160.6	0.064	0.060	1.70
			3	3247.615	3248.5	3098.71	3259.1	0.352	0.325	4.92
1	80	6	1	184.1684	179.96	178.526	174.7	5.419	3.011	2.19
			2	1159.363	1157.8	1136.59	1155.3	0.351	0.216	1.62
			3	3233.366	3148.8	2993.88	3134.8	3.144	0.477	4.50
2	140	2	1	185.0754	184.7	185.566	184.7	0.203	0	0.469
			2	1159.758	1153.7	1136.64	1153.1	0.577	0.052	1.43
			3	3247.573	3246.1	3098.2	3258.1	0.323	0.368	4.91
3	140	6	1	184.7597	181.9	183.091	181.2	1.964	0.386	1.04
			2	1153.54	1109.5	1091.41	1092.9	5.548	1.519	0.136
			3	3246.664	3229.4	3092.34	3250.1	0.105	0.637	4.85
4	200	2	1	185.0754	185.0	185.739	185.0	0.041	0	0.399
			2	1159.758	1154.6	1137.76	1155.0	0.412	0.035	1.49
			3	3247.408	3230.9	3086.36	3238.6	0.272	0.238	4.70
5	200	6	1	184.9569	184.4	185.257	184.3	0.356	0.054	0.519
			2	1155.216	1115.0	1102.75	1106.3	4.422	0.786	0.321
			3	3228.417	3111.7	2959.41	3082.9	4.720	0.934	4.01

대해 고유 주파수를 구하였다. Fig. 2는 각 크랙의 경우에 대한 고유 주파수를 크랙이 없을 때의 고유 주파수로 정규화하여 곡면으로 나타낸 것이다. 크랙의 위치(L_c)와 크랙의 깊이(a)를 각각 보의 길이(L), 보의 높이(h)에 대해 정규화하였다.

유한요소 해석을 이용한 두 번째 방법은 3차원 연속체로 모델링하는 방법이다. EDISON CASAD solver에서 제공하는 고유치 해석기를 이용하였다. EDISON CASAD solver에서는 3차원 요소로 모델링 한 뒤 강성과 질량을 계산하고 Block Lanczos 방법을 이용해 모든 주파수를 구하지 않고 일부의 주파수만 구한다. 8절점 육면체 요소를 사용하였고, $2\text{mm} \times 2\text{mm} \times 2.5\text{mm}$ 가 되도록 설정하여 총 12000개의 요소, 43956개의 자유도를 갖는 보를 구성하였다. 이 경우에는 크랙의 위치를 15mm에서 255mm까지 60mm간격으로 5개, 크랙의 깊이를 2mm부터 10mm까지 2mm간격으로 5개, 총 25개의 경우에 대해 고유 주파수를 구하였다. 이후 각 크랙에 대한 고유주파수를 크랙이 없을 때의 고유 주파수로 정규화하고, 크랙의 위치와 크랙의 깊이 역시 정규화하였다. 크랙이 없는 경우에 연속체 요소를 사용해 구한 3개 모드의 고유 주파수는 각각 185.781 Hz , 1140.87 Hz , 3098.71 Hz 이다.

크랙이 없는 경우 보 이론으로 구한 3개 모드의 고유 주파수는 각각 185.1 Hz , 1159.5 Hz , 3230.3 Hz 이다. 다섯 가지

크랙의 경우에 대해 해석적으로 구한 고유 주파수, 유한요소법으로 구한 고유 주파수와 실험치를 Table 2에 나타내었다. Table 2에서 크랙 보 요소는 2.2절에 제시한 방법으로 구성된 강성행렬과 질량행렬을 식 (20)에 대입하여 구한 고유 주파수를 의미한다. 연속체 요소는 CASAD solver의 고유치 해석기를 이용하여 구한 주파수 이다. Experiment는 실험을 통해 구한 고유 주파수를 의미한다. 실험값은 논문을 참조하였다(Lee, 2000). 계산으로 구한 값과 실험치의 차이는 다음 식으로 계산하였다.

$$Difference = \frac{|Calculation - Experiment|}{Experiment} \times 100(\%) \quad (21)$$

크랙이 있는 보 요소를 이용하여 구한 고유 주파수와 실험값은 최대 차이가3%이나 전반적으로 1%내의 차이로 나타났다. 이는 회전 스프링 모델을 이용해 이론적으로 구한 값보다 더 작은 오차를 나타낸다. 이는 행렬식 등을 풀면서 비선형 식의 해를 구하는 과정에서 발생하는 오차로 판단된다. 따라서 실제 고유 주파수 분석에 있어서 유한요소법이 이론적 해석법보다 더 정확한 결과를 얻을 수 있다. 한편 연속체 요소를 사용한 경우 크랙이 있는 보 요소를 사용한 경우보다 더 많은 오차를 수반하는 것을 알 수 있다. 이는 유한요소로 구성되는 강성이 파괴 역학적 특이점(Singularity)를 온전히

표현하지 못하기 때문이다.

2.4 크랙의 위치와 깊이 예측

크랙의 위치와 크기를 예측하기 위해 실험으로 얻은 고유 주파수를 역으로 이용한다. Fig. 2는 크랙이 있는 보 요소를 이용하여 얻은 곡면이다. 여기에 실험으로 얻은 고유 주파수 평면을 겹쳐 그릴 수 있다. Case 1의 경우에 대해 고유 주파수 평면을 그린 그림을 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에 그려진 평면이 Case 1에서 실험으로부터 얻은 고유 주파수를 나타낸 평면이다.

Fig. 3에서 고유치 해석을 통해 구한 곡면과 실험으로 얻은 평면의 교선이 각 모드에 대해 존재하게 된다. 세 경우에 대한 교선이 만나는 점이 주어진 고유 진동수에 대한 크랙의

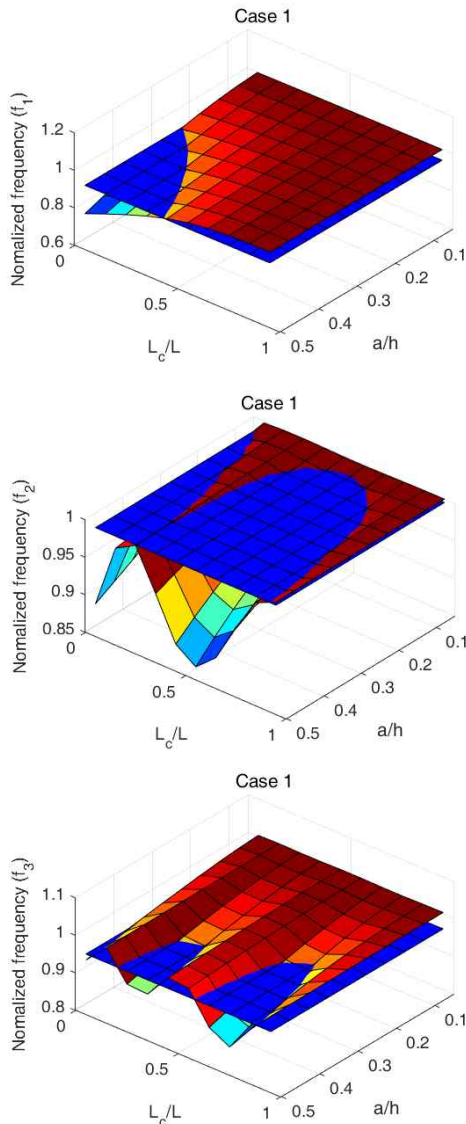


Fig. 3 Normalized natural frequency with experimental data

위치와 크기라고 할 수 있다. 부드러운 곡면과 평면의 교선을 그리기 위해 MATLAB에서 제공하는 보간 함수를 이용해 3차원 곡면을 부드러운 곡면으로 보간한 뒤 교선을 그렸다. Fig. 4는 Case 1과 Case 5에서 나타나는 교선을 겹쳐 그린 것이다.

Fig. 4에서 Case 1의 경우 세 개의 모드에 의한 교선이 하나의 점에서 만나게 된다. 하지만 Fig. 4의 Case 5의 경우 세 개의 모드에 의한 교선이 하나의 점에서 만나지 않는 경우가 발생한다. 이는 실험으로 정확하게 세 개의 고유 진동수를 얻는 것이 불가능하기 때문에 나타난다. 이러한 경우에는 세 개의 교선으로 만들어지는 삼각형 중 가장 작은 삼

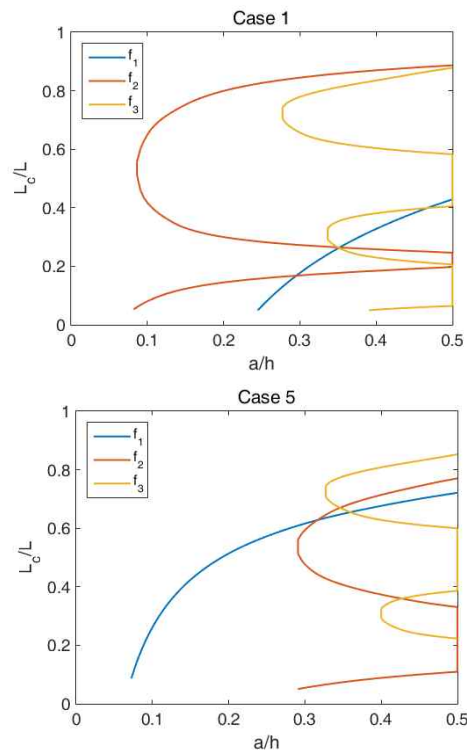


Fig. 4 Intersected lines

각형의 무게중심을 이용해 크랙의 위치와 크기를 판단하게 된다. 이러한 방법을 이용해 다섯 가지 경우에 대해서 크랙의 위치와 크기를 역으로 예측하여 Table 3에 나타내었다. 3차원 연속체로 구한 고유주파수를 이용하여 크랙 보 요소 방법과 동일하게 역으로 예측한 결과 역시 Table 3에 나타내었다. 여기서 오차의 계산은 다음 식을 이용하였다.

$$Error = \frac{|True\ value - Prediction|}{Prediction} \times 100(\%) \quad (22)$$

크랙 보 요소 방법을 사용할 경우 크랙의 위치는 Case 2를 제외한 모든 경우에 대해 7% 이내의 오차로 크랙의 위치

Table 3 Prediction of crack location and depth

Case		True value (mm)	Prediction (크랙 보 요소) [mm]	Error (크랙 보 요소) [%]	Prediction (연속체 요소) [mm]	Error (연속체 요소) [%]
1	Location	80	78.5	1.94	63.78	25.43
	Depth	6	7	16.67	6.666	9.99
2	Location	140	163.8	16.99	-	-
	Depth	2	2.8	37.84	-	-
3	Location	140	134.9	3.63	-	-
	Depth	6	6.8	14.14	-	-
4	Location	200	186.5	6.77	182.22	9.76
	Depth	2	2.6	30.30	2.611	23.4
5	Location	200	195.7	2.15	196.05	2.01
	Depth	6	6.8	13.64	6.888	12.89

를 예측할 수 있었다. 하지만 크랙의 깊이는 이에 비해 오차가 크게 발생했다. 한편 예측된 크랙의 깊이는 모든 경우에 대해 실제 값보다 더 깊게 예측됨을 알 수 있다.

3차원 연속체를 사용할 경우 Case 4와 Case 5에서 10% 이내의 오차로 크랙의 위치를 예측하였고 크랙 보 요소 방법에 비해 크랙의 깊이를 적은 오차에서 예측할 수 있었다. 하지만 Case 2와 Case 3에 대해서는 크랙의 위치와 깊이를 예측할 수 없었다. 크랙이 있는 보 요소를 사용한 경우 총 100개의 경우에 대해 고유 주파수를 구하고 이를 보간한 데에 반해 3차원 연속체 요소를 이용한 경우에는 25개의 경우에만 고유 주파수를 구하여 보간을 하여도 오차가 나타나기 때문이다. 하지만 3차원 연속체 요소를 이용한 예측값과 실험으로 구한 값이 큰 차이를 보이지 않는 것은 임의의 형상을 갖는 크랙과 임의의 단면의 경우에 대해 3차원 요소를 이용해 모델링하여 고유주파수를 예측할 수 있는데에 있다. 한편, 3차원 연속체 방법에서도 크랙의 깊이는 실제 값보다 더 깊게 예측되었다. 따라서 오차가 다소 크다고 하여도 보수적으로 보의 안정성을 확인할 수 있다고 할 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 고유치 해석을 이용해 보의 크랙을 탐색하는 방법에 대해 연구하였다. 고유치 해석은 해석적 접근, 크랙이 있는 보 요소를 이용한 유한 요소 방법, 3차원 연속체 요소를 이용한 유한요소 방법, 총 세 가지 방법으로 진행하였다.

크랙이 있는 보 요소를 이용한 경우 요소의 강성을 구하기 위해 보의 변형 에너지를 계산하였다. 변형 에너지는 크랙이 없는 보의 변형 에너지와 크랙에 의한 추가 변형 에너지로 구성된다. 변형 에너지를 전단력과 모멘트로 미분함으로써 유연 행렬을 구할 수 있다. 요소 내에서의 힘 평형 관계와

유연 행렬을 이용해 크랙이 있는 보 요소의 강성을 계산할 수 있다.

새로 구성한 보 요소를 이용하는 방법과 3차원 요소를 이용한 경우 여러 가지 크랙의 깊이와 위치에 대해 3개 모드의 고유 주파수를 구했다. 이 내용을 바탕으로 고유 주파수를 크랙의 위치와 깊이에 대한 곡면으로 표현했다. 실험 값을 이용해 역으로 크랙의 위치와 깊이를 예측할 수 있고, 크랙의 위치는 최대 17%, 크랙의 깊이는 최대 38%의 오차가 나타났다. 3차원 연속체 요소를 이용한 경우 크랙의 위치는 최대 25%, 크랙의 깊이는 최대 23%의 오차가 나타났다.

본 연구에서는 하나의 크랙을 고려했다. 실제 보에서는 크랙이 여러 개가 존재할 수 있으며 크랙의 형상 역시 다양할 수 있다. 향후 크랙의 개수와 형상에 대한 일반적인 연구가 진행된다면 실제적인 구조의 비파괴 검사에 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단이 주관하는 첨단 사이언스 교육 허브 개발 사업(EDISON: NRF-2014M3C1A6038842)의 지원을 받아 수행한 연구결과입니다.

Reference

Lee, Y.S., Chung, M.J. (2000) A Study on Crack Detection using Eigen Frequency Test Data, *Computers and Structures*, 77, pp.327~342.
 Nahvi, H., Jabbari, M. (2005) Crack Detection in Beams using Experimental Modal Data and Finite Element Model, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, pp.1477~1497.

제5회 첨단 사이언스·교육 허브 개발(EDISON) 구조동역학 경진대회

Qian, G.L., Gu, S.N., Jiang, J.S. (1990) The Dynamic Behaviour and Crack Detection of a Beam with a Crack, *Journal of Sound and Vibration*, 138(2), pp.223~243.

Son, I.S., Ahn, S.J., Yoon, H.I. (2009) Study on Detection of Crack and Damage for Cantilever Beams using Vibration Characteristics, *한국소음진동공학회 논문집*, 19(9), pp.935~942.

Tada, M., Morassi, A. (1973) The Stress Analysis of Cracks Handbook, *Hellertown, PA: Del Research Corp.*