

박리가 발생된 적층평판의 압축 거동에 관한 연구

이 남 주¹ · 조 용 옥²

¹서울과학기술대학교 기계자동차공학과, ²서울과학기술대학교 기계시스템디자인공학과

A Study on compressive behavior of laminated plates with initial delamination

Nam-Ju Lee¹ and Yong-Oug Jo²

¹Department of Mechanical Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Seoul 01811, Korea

²Department of Mechanical System Design Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Seoul 01811, Korea

Abstract

Recently laminated plates like composite materials has been used in a various field to grow the specific strength of the composition. However, delamination area caused by barely visible impact damage has potential risk that it can raise buckling of the delaminated plate. Because it can interrupt compressive behavior of laminated plates and reduce their strength, the whole structure can't be constituted by these materials. Many studies assume that behavior of the delaminated plate which is in laminated plates equals theoretical buckling but their actual motion doesn't coincide because of initial imperfections of materials like deflection, residual stress, eccentricity and so on. In this paper, we change laminated plates with initial delamination into a beam of rectangular cross section with the initial crack and analyze compressive behavior according to initial imperfections through finite element method(FEM). Consequently analysis results show that behavior of laminated plates involving delamination differs from ideal buckling of the delaminated plate in actual conditions and we can predict its motion through imperfections relationship.

Keywords : buckling, delamination, finite element method(FEM), initial imperfections, laminated plates

1. 서 론

최근 다양한 분야에서 구조체의 강도(strength)를 증가시키기 위해 이방성의 높은 비강도를 지닌 복합재료(composite materials)와 같은 적층평판(laminated plates) 형태의 복합재를 폭넓게 사용하고 있다. 특히, 항공 관련 분야에서 적층평판 복합재의 이용이 두드러지게 나타나고 있지만, Boeing 787이나 Airbus A350같은 구조체 전체의 무게를 경감시키기 위해 이러한 재료들로만 구성하지는 않는다 [3]. 그러한 이유는 여러 가지가 있겠지만 주된 이유 중 하나는 적층평판에 발생하는 BVID(barely visible impact damage) 때문이다 [3]. BVID가 발생한 적층평판은 층간 박리현상(delamination)이 Fig. 1과 같이 발생하게 된다. 박리영역(delamination area)을 가지는 적층평판에 외부 하중이 가해지게 되면 Fig. 2처럼 박리판(delaminated plate)은 탄성불안정현상의 일종인 좌굴(buckling)이 발생해

적층평판은 일반적인 압축 변형과는 다른 거동을 보이게 된다. 이러한 좌굴의 발생은 적층평판의 강도를 비약적으로 감소시키는 결과를 가져오며, 다음과 같은 이유로 인해 구조체 전체에 적층평판과 같은 재료만을 적용할 수가 없는 것이다.

많은 연구들에서 이론상의 편의를 위해 박리가 발생된 적층평판 내 박리판의 좌굴 거동을 이상적으로 가정해 연구를 진행한다 [1-3]. 하지만 실제 재료의 내부에는 초기 처짐이나 잔류 응력, 편심 등의 초기 결함이 존재하며 이로 인해 박리판은 이론과는 상이한 거동을 보이게 된다 [4]. 따라서 적층평판의 초기 결함에 따른 압축 거동에 대한 연구가 필요할 것으로 사료되어 본 연구에서는 내부 박리 영역을 가진 적층평판의 일부를 균열을 내포한 사각 단면 보(beam)로 가정, 초기 처짐과 박리 영역의 변화에 따른 압축 거동을 유한요소법(finite element method)을 이용해 구조해석(structure analysis) 수행 후 결과값을 분석해 보았다.

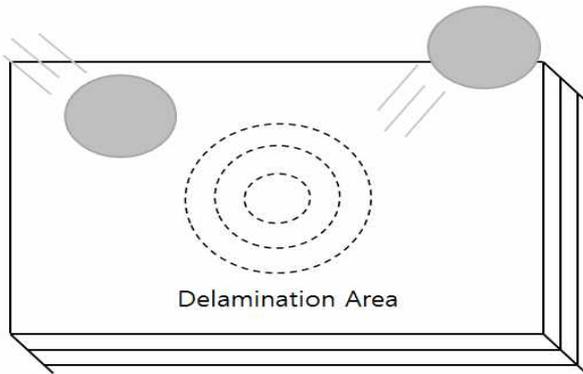


Fig. 1 Delamination area caused by BVID

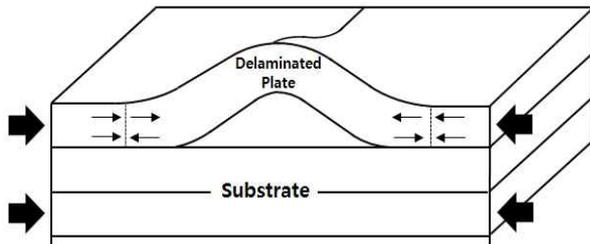


Fig. 2 Compressive deformation of laminated plates including the delamination area

2. 좌굴 발생 전, 후 이론

본 장에서는 좌굴 이론과 변형에너지이론을 통해 좌굴 전, 후 선형 거동을 간략히 설명하고자 한다.

2.1 좌굴 이론

자중을 줄이는 방법으로 고강도 재료를 사용한 부재의 단면을 얇게 하는 방법이 있는데, 이는 부재가 압축력을 받을 경우 좌굴을 동반하게 된다[4]. 좌굴을 발생시키는 외부 하중을 임계하중(critical load)이라 하며 이러한 임계치(critical value)를 산정하는 것이 필요하다. 좌굴 이론의 출발은 Fig. 3(a)와 같은 이상적인 기둥에 대한 가정에서 시작한다. 단순 지지된 기둥의 압축력에 의한 휨모멘트 평형조건을 이용해 지배 방정식을 도출 할 수 있다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 \times y = 0, \quad k^2 = P/EI \quad (1)$$

P 는 압축 하중, E 는 기둥의 탄성 계수, I 는 단면 2차 모멘트이다. 이는 계수가 상수인 2계 제차 미분방정식으로 $y = e^{\lambda x}$ 라 하면 다음과 같은 특성방정식(characteristic equation)을 얻을 수 있다.

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + k^2 e^{\lambda x} = 0, \quad e^{\lambda x}(\lambda^2 + k^2) = 0, \quad \lambda^2 + k^2 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{\pm \sqrt{-4k^2}}{2}, \quad \lambda = \pm ki, \quad k > 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3)$$

λ 는 근의 공식, 일반해인 처짐량 y 는 오일러 공식(Euler formula)과 중첩의 원리를 이용해 구할 수 있다.

$$y_1 = e^{+ikx} = \cos kx + i \sin kx \quad (4)$$

$$y_2 = e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad y = A \cos kx + B \sin kx \quad (5)$$

c_1, c_2 는 임의의 상수이며, $A = c_1 + c_2, B = c_1 i - c_2 i$ 로 경계조건 $(x, y) = (0, 0)$ 에 의해 $A = 0$ 이 되고, $(x, y) = (l, 0)$ 에 의해 $B \sin kl = 0$ 이 된다. $B = 0$ 일 경우, 자명해(trivial solution)를 가지기 때문에 $kl = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ 가 되므로 k 를 구성하는 압축 하중 P 의 임계치를 구하기 위해 $kl = \pi, k = \pi/l$ 라 하면 다음과 같은 임계 하중 p_c 를 산출 할 수 있다.

$$p_c = EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 = EI \left(\frac{\pi}{l_e} \right)^2 \quad (6)$$

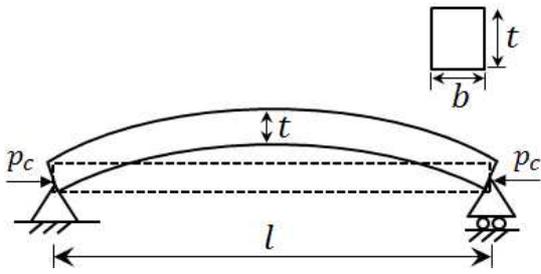
l_e 는 유효 길이로 다른 지지조건을 가지는 기둥에 대한 임계 하중을 구하기 위해 사용되며, Fig. 3(b)와 같이 양단 고정된 사각 단면 기둥의 임계 하중 P_c 를 구하면 다음과 같다. b, t 는 사각 기둥의 너비와 두께이다.

$$l_e = L/2, \quad P_c = EI \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} EI = \frac{Eb\pi^2 t^3}{3L^2} \quad (7)$$

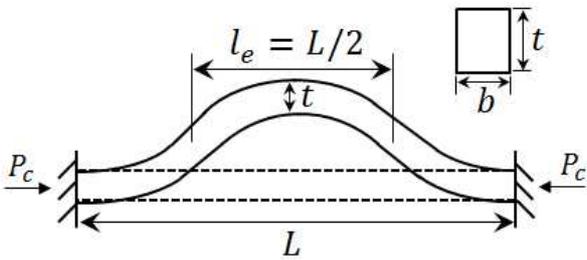
탄성 영역 내 선형 거동이라는 좌굴 이론의 가정 아래 축방향 압축 하중 P_x 는 단면부에 일정한 압축 응력 분포를 가지게 한다. 따라서 좌굴 발생 전 압축 하중과 변위의 관계를 다음과 같이 도출 가능하다.

$$\sigma_x = \frac{P_x}{bt} \Rightarrow P_x = bt\sigma_x = Ebt\epsilon_x = \frac{Ebt}{L} D_x, \quad D_x < D_c$$

(8)



(a) Simply supported ends condition



(b) Both clamped ends condition

Fig. 3 Ideal buckling shape

2.2 변형 에너지(Strain Energy)

좌굴이 발생하는 임계치를 넘어선 상태를 후좌굴(post buckling)이라 하며 Fig. 4와 같이 임계점에서 분기(bifurcation)되는 현상을 관찰 할 수 있다. 탄성 영역 내 좌굴 후 거동을 예측하기 위한 이론적 접근법으로 변형된 부재의 위치에너지(potential energy)를 뜻하는 변형 에너지를 이용한 방법이 주로 이용된다[1-3].

에너지 보존계에서 운동하는 물체는 외력에 의한 일의 양과 물체 내부에 존재하는 변형에너지(strain energy)의 양은 항상 같다. 따라서 외력에 의한 에너지는 축력으로 인한 변형에너지(membrane energy, U_c , U_M)와 굽힘에 의한 변형에너지(bending energy, U_B)로 전환된다. 압축 하중에 의한 양단 지지 사각 단면 보의 처짐 형상은 Fig. 3(b)와 같으므로 식(5)의 $kL = 2\pi$ 일 때 $y = B\sin(kx)$ 의 평행 이동을 통해 구할 수 있다.

$$y - B = B\sin\left(\frac{2\pi}{L}\left(x - \frac{L}{4}\right)\right), y = B\left(1 - \cos\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (9)$$

굽힘에 따른 기둥의 축 방향 변위 Δ 를 통해 계수 B 와

변형률간의 관계를 도출 할 수 있다.

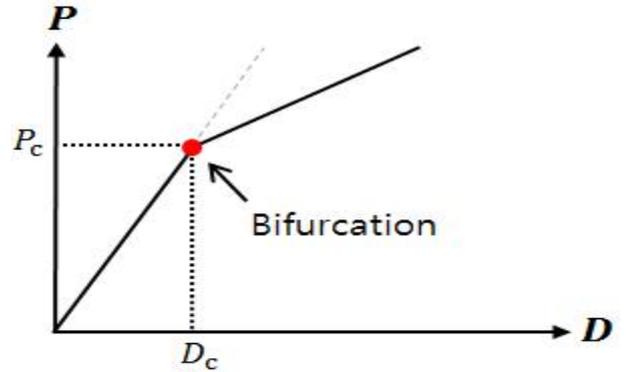


Fig. 4 Linear bifurcation buckling

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = L(\epsilon_x - \epsilon_c) \quad (10)$$

$$B^2 = (\epsilon_x - \epsilon_c) \left(\frac{L}{\pi}\right)^2, \epsilon_x > \epsilon_c \quad (11)$$

Fig. 5와 같이 좌굴 발생 직전 부재 내부에는 U_c 만 존재하지만 좌굴 발생 시 U_M , U_B 가 나타나게 된다. U_c , U_M , U_B 는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$U_c = \frac{1}{2} P_c \times L \epsilon_c = \frac{EbtL}{2} \epsilon_c^2, u_c = \frac{U_c}{btL} \quad (12)$$

$$U_B = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{Eb\pi^2 t^3}{3L} (\epsilon_x - \epsilon_c), u_B = \frac{U_B}{btL} \quad (13)$$

$$U_M = \frac{1}{2} P_x \times L (\epsilon_x - \epsilon_c) = \frac{EbtL}{4} (\epsilon_x - \epsilon_c)^2, u_M = \frac{U_M}{btL} \quad (14)$$

변형 에너지는 변형 에너지 밀도(u_c , u_B , u_M)로 나타낼 수 있으며, 이는 응력-변형률 선도의 면적과 동일하다. 좌굴 발생 후 응력과 변형률의 관계를 좌굴 이론에서 이용한 방법으로 하중과 변위의 관계를 구할 수 있다.

$$U = \int u dV, u = \frac{dU}{dV} = \frac{U}{V} = \int \frac{P_x}{btL} dx = \int \sigma_x d\epsilon_x \quad (15)$$

$$\sigma_x = \frac{du}{d\epsilon_x} = \frac{d(u_c + u_B + u_M)}{d\epsilon_x} = \frac{E}{2} (\epsilon_x - \epsilon_c) + \sigma_c \quad (16)$$

$$P_x = \frac{Ebt}{2L} (D_x - D_c) + P_c, D_x > D_c \quad (17)$$

이론적으로 좌굴 발생 후 부재의 변형에 따른 박리부의 진전을 알아보기 위해 분리되는 면적에 의해 해방되는 변형 에너지의 비율인 에너지 해방율(energy release rate)을 이용하곤 한다[1,3]. 모드 I(mode I) 파괴가 모드 II(mode II) 파괴에 요구되는 에너지보다 항상 적기 때문에[3] 모드 I에서의 임계 에너지 해방율 G_{Ic} 와 균열 진전에 필요한 변위 $D_{x,th}$ 의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$D_{x,th} = \sqrt{4D_c^2 + \frac{2G_{Ic}L^2}{Et}} - D_c \quad (18)$$

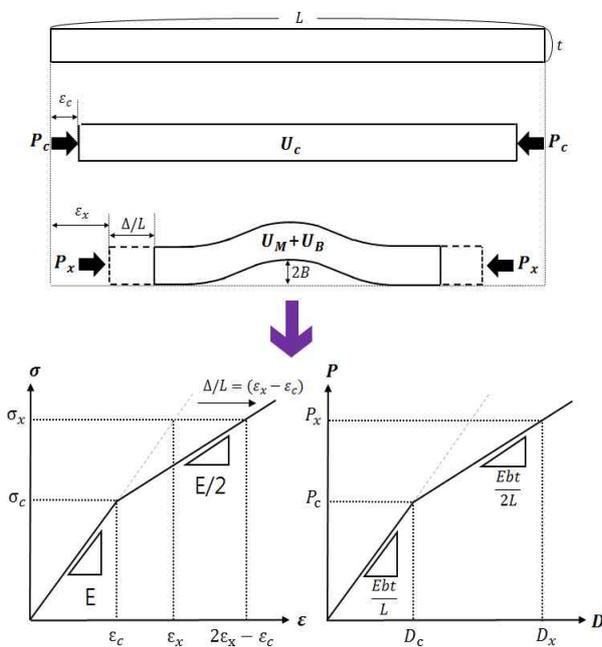


Fig. 5 Compressive load-displacement relationship through strain energy

3. 해석 모델

유한요소법은 미분방정식의 수치적 근사해법의 일종으로 [5] 정해진 수렴 구간 내에서 방정식의 해를 찾게 되는데, 이는 전체 모델의 거동에 대한 해석보다는 필요 영역에 대한 집중적인 해석이 더 정밀한 해를 제공해 줄 수도 있음을 뜻한다. 따라서 실제 BVID가 발생한 적층평판 내부의 박리 영역은 표면과 가까운 층간에서 생성된다는 점[3]과 이론적인 좌굴 거동과의 비교를 위해 본 논문에서는 Fig. 6와 같이 표면 근처 박리 영역 주변의 적층평판을 균열을 내포한 등방성의 사각 단면 보로 가정해 평면 변형률(plane strain) 상태의 해석 모델을 설정하였다.

해석 모델의 대칭성(symmetry)을 고려하여 전처리 소프트웨어를 이용해 8절점(8-node) 육면체 요소(element)로 메싱(meshing)하였고, 수렴 판정(convergence test) 결과와 해석 시간을 고려해 절점과 요소의 개수는 약 80000개로 설정하였다. Fig. 7에 모델의 규격, 물성치 등 해석에 필요한 설정값을 도표로 정리하였고, 경계 조건은 자유 물체도로 간단하게 표현하였다.

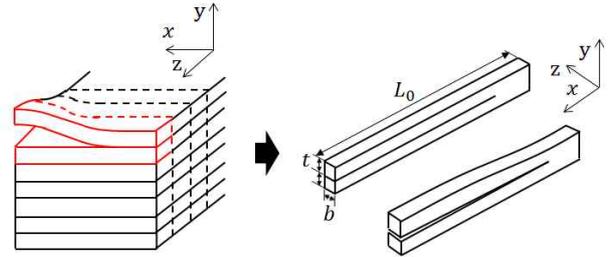
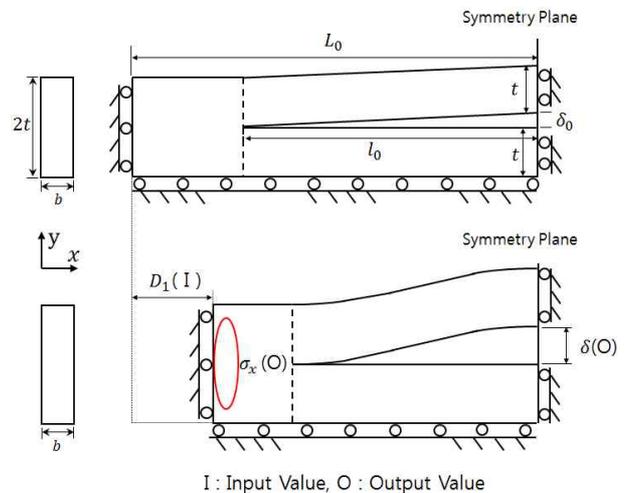


Fig. 6 Described substitution process



Material properties[2]		
Name	Symbol	Value
Elastic modulus	E	128000 MPa
Poisson's ratio	ν	0.3
Critical energy release rate	G_{Ic}	$261 \times 10^{-6} J/mm^2$

Model initial measurement		
$L_0 = 20mm$	$b, t = 1mm$	l_0, δ_0 : Variable

Fig. 7 FBD and model measurement & properties

4. 해석 결과 및 고찰

좌굴을 발생시키는 임계값은 식(7)과 같이 고유치(eigen value)와 관련된 문제이므로 유한요소법을 이용한 고유치 해석이 필요하지만[5] 초기 결함에 따른 실제적인 적층평판의 거동을 파악하기 위해서는 구조해석이 필요하다. 따라서 Edison Science App에 탑재된 ‘Nonlinear Analysis SW’를 이용해 기하비선형(nonlinear geometry)을 고려한 정적(static) 구조해석을 진행, Fig. 8과 같이 해석 결과를 가지적으로 표현하였다. 연속적인 변형을 모사하기 위해 여러 단계(step)에 걸쳐 측면부 변위(D_1)를 점진적으로 증가시켜 Fig. 7의 축방향 응력 σ_x 와 처짐량 δ 를 결과로 얻었으며, Fig. 8 (b)와 같이 측면부에서 균일한 응력 분포를 보이므로 식 (8)을 이용해 σ_x 를 축방향 압축 하중 P_x 로 변환하였다. 해석 결과값은 편의상 압축 방향을 양(positive)으로 설정해 분석하였다.

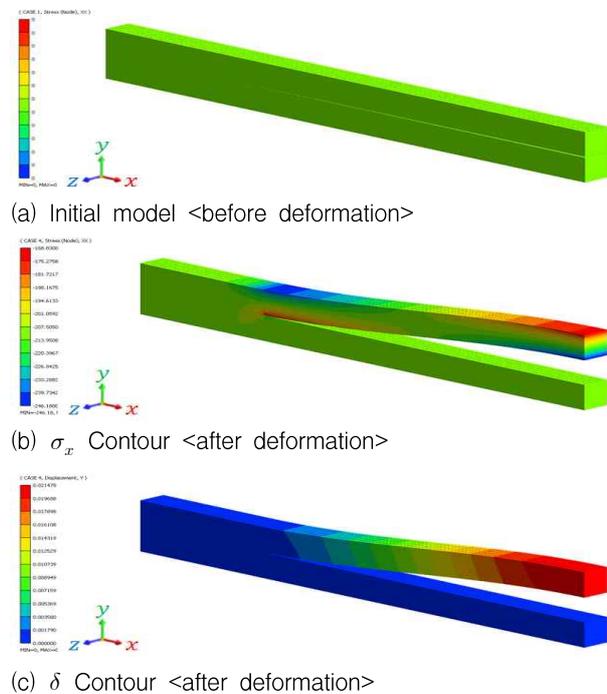


Fig. 8 Visualization of the structure analysis result

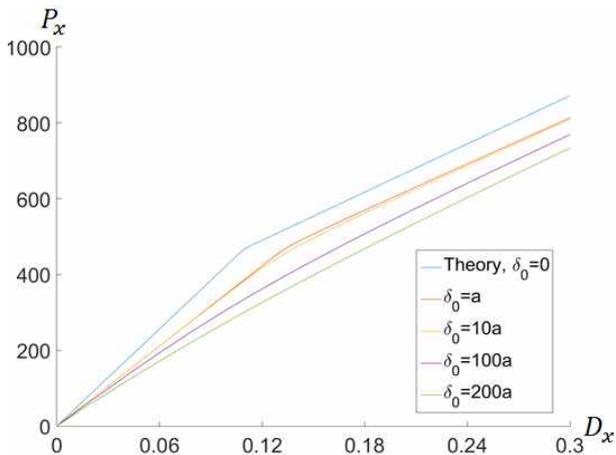
4.1 초기 처짐의 변화에 따른 압축 거동

$l_0 = 15\text{mm}$ 일 때, 초기 처짐 δ_0 의 변화에 따른 D_x 와 P_x 의 관계는 Fig. 9 (a)와 같으며, 이론적인 적층평판의 압축 거동($\delta_0 = 0$)은 식 (8), (17)을 이용해 표현하였다($P_c = 467.89\text{ N}$, $D_c = \pi^2 t^2 / 3(2l_0) = 0.1096\text{ mm}$, $a = D_c t / 2l_0 =$

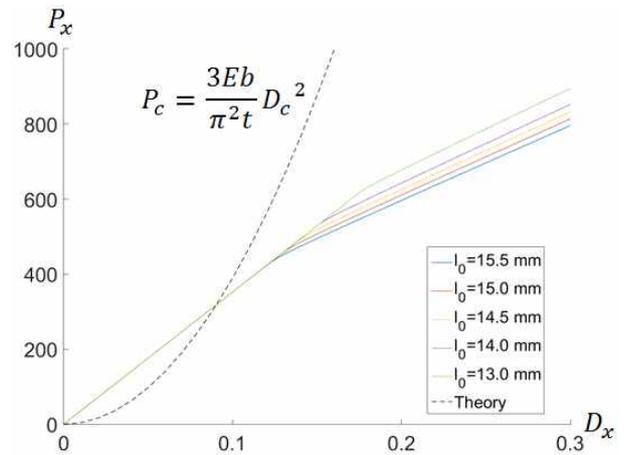
$3.6554 \times 10^{-3}\text{ mm}$). Fig. 9 (b)는 분기가 발생하는 부분을 확대한 것으로 l_0 에 따른 δ_0 의 값이 작을수록 $\delta_0 = 0$ 과 유사한 선형 거동을 보이지만 이론값인 임계 변위와 분기가 발생하는 변위가 상이하게 나타나고 있으며, δ_0 가 클수록 분기가 발생하는 지점이 사라지는 비선형 거동을 보이고 있다. 초기 처짐이 미치는 영향성을 평가하기 위해 $\delta_0 = 10a$ 와 $2l_0$ 비를 r 라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r = \frac{10a}{2l_0} = \frac{5D_c t}{2l_0^2} = \frac{5\pi^2 t^3}{12l_0^3} = 1.2185 \times 10^{-3} \quad (19)$$

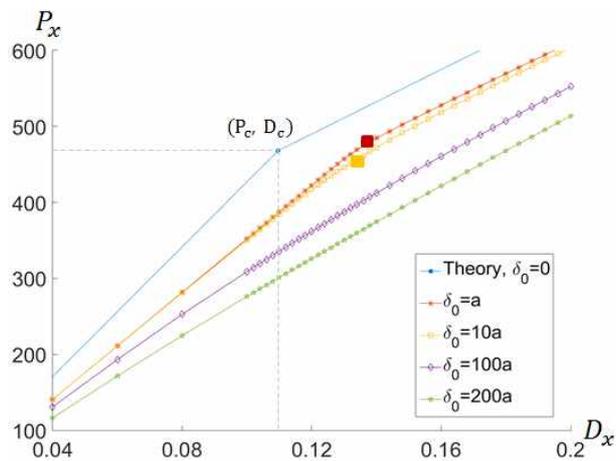
r 을 통해 임의의 적층평판 모델의 압축 거동이 어떠한지를 예측해 볼 수 있으며, 이는 적층평판 내 결함간의 관계를 통해 박리판의 좌굴 발생 전, 후를 나누는 기준을 정할 수 있음을 뜻하므로 구조해석을 통해 다양한 결함 관계를 분석해 보는 것이 필요할 것으로 사료된다.



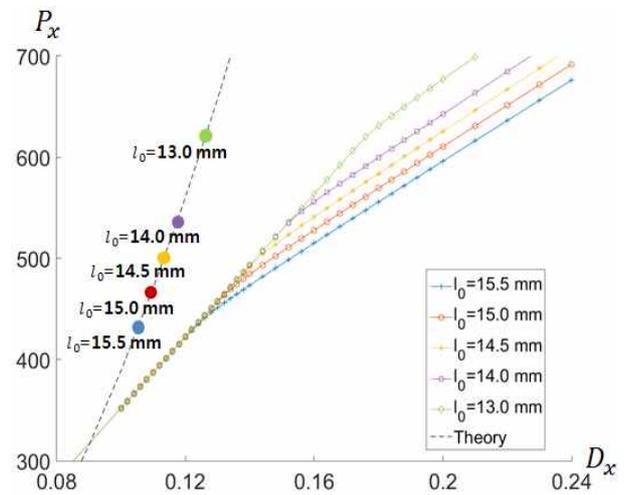
(a) X axis : D_x [mm], Y axis : P_x [MPa]



(a) X axis : D_x [mm], Y axis : P_x [MPa]

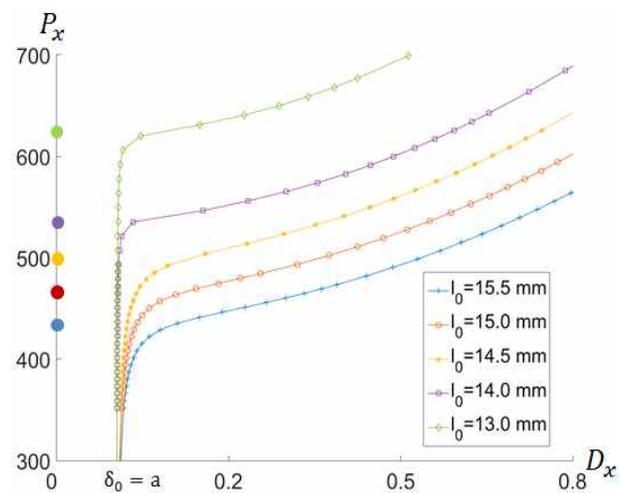


(b) X axis : D_x [mm], Y axis : P_x [MPa]



(b) X axis : D_x [mm], Y axis : P_x [MPa]

Fig. 9 Result $\langle \delta_0 : \text{Variable}, l_0 = 15 \text{ mm} \rangle$



(c) X axis : δ [mm], Y axis : P_x [MPa]

Fig. 10 Result $\langle \delta_0 = a, l_0 : \text{Variable} \rangle$

4.2 박리 영역 크기에 따른 압축 거동

선형 관계에서의 좌굴 전, 후 박리부 크기에 따른 거동을 분석하기 위해 $\delta_0 = a$ 로 설정해 l_0 의 변화에 따른 D_x 와 P_x 의 관계를 Fig. 10 (a)와 같이 그래프로 정리해 보았다. Fig. 10 (b)는 분기점 주변을 확대한 것으로 l_0 변화에 따른 분기점이 선형 관계를 보이고 있음을 확인할 수 있으며, Fig. 10 (c)는 δ 와 P_x 의 관계를 표현한 것으로 처짐이 급격하게 증가하는 영역이 이론적인 임계 하중 근처에서 발생함을 보여주고 있다. Table 1은 식 (7), (8), (18)을 이용해 l_0 에 따른 D_c 와 $D_{x,th}$ 값을 정리한 것으로 임계 에너지 해방율이 매우 낮을 경우($G_{fc} = 261 \times 10^{-6} J/mm^2$), 박리판의 임계점에서 균열이 진전할 것임을 알 수 있다($D_c \approx D_{x,th}$). 따라서 실제 초기 처짐을 가지는 적층평판의 박리 영역은 박리판의 이론적인 임계점과는 다르게 Fig. 10 (b)의 분기점 변화와 같이 진전할 것으로 예상된다.

Reference

[1]Herzl Chai, Charles D. Babcock, Wolfgang G. Knauss. (1981) One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling, *International Journal of Solids and Structure*, Vol. 17, pp.1069~1083.
 [2]R. Butler, D.P. Almond, G.W. Hunt, B. Hu, N. Gathercole. (2007) Compressive fatigue limit of impact damaged composite laminates, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 38, pp.1211~1215.

Table 1 Calculated critical, threshold displacement

$l_0 [mm]$	$L = 2l_0 [mm]$	$D_c [\times 10^{-4} mm]$	$D_{x,th} [\times 10^{-4} mm]$
13.0	26.0	1265.34	1265.39
14.0	28.0	1174.95	1175.02
14.5	29.0	1134.44	1134.52
15.0	30.0	1096.62	1096.70
15.5	31.0	1061.25	1061.34

5. 결 론

본 연구에서는 박리부를 내포한 적층평판을 균열을 내포한 사각 단면 보로 치환, 구조해석을 수행해 적층평판의 압축 거동을 분석해 보았다. 그 결과 이론에 근거한 박리판의 임계값과 초기 결함으로 인해 분기가 발생하는 결과값에 차이가 있음을 알아냈으며, 향후 적층평판과 관련된 연구를 진행할 경우 모델의 초기 결함을 고려하는 것이 좀 더 정확한 결과를 이끌어 낼 수 있을 것임을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 한국연구재단이 주관하는 첨단 사이언스 교육 허브 개발 사업(EDISON: NRF-2014M3C1A6038842)의 지원을 받아 수행한 연구결과입니다.

- [3]R. Butler, Andrew T. Rhead, Wenli Liu, Nikolaos Kontis. (2012) Compressive strength of delaminated aerospace composites, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 370, pp.1759 - .1779.
- [4]S. P. Jang, M. Y. Kim, S. B. Kim. (1999) Theory of structural stability, *Seoul National University Publishing Department*.
- [5]M. S. Jun, H. I. Lee. (2000) From continuum mechanics to finite element method, *Pearson Education Korea*.