2015년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2015. 7. 15 - 17

퍼지 다개체 시스템의 상태 일치를 위한 관측기 기반 출력 궤환 퍼지 제어기 설계

문지현*, 이호재*
인하대*

Observer-Based Output Feedback Controller Design of Fuzzy Multi-Agent Systems for State Consensus

Ji Hyun Moon*, Ho Jae Lee*
Inha University*

Abstract - 본 논문은 타카기--수게노 퍼지 다개체 시스템의 상태 일치를 위해, 관측기 기반 출력 궤환 퍼지 제어기의 설계 기법을 제안한다. 각 개체간의 통신 네트워크는 그래프 이론을 통해 나타내며, 제어기의 설계 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현한다.

1. 서 론

다개체 시스템의 상태 일치(state consensus) 문제란 각 개체간의 연결 네트워크를 이용하여 상호통신 및 협력을 통해 하나의 상태로 수렴하도록 제어기를 설계하는 것이며, 이 때 사용되는 통신 네트워크는 그래프 이론을 이용하여 나타낸다. 최근에 상태 일치 문제를 다룬 연구들이 점점 늘어나고 있는 추세이며, 이에 따른 군집대형 편성 및 대형별 주행, 상호 충돌회피와 같은 다양한 주제들에 대하여 상태일치에 기반한 다개체 로봇들의 운용 방법을 찾는 알고리즘 개발에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다 [1,2]. 참고문헌 [3]은 고차 선형 시스템들의 상태 일치 제어 알고리즘을 다루었으며, 참고문헌 [4]에서는 관측기에 기반하여 선형 시불변 시스템의 개체로 구성된 다개체 시스템을 위한 상태 일치 문제를 고려하였다. 그러나 개체가 비선형 동역학으로 표현되는 경우에 대해서는 연구가 미비한 상황이다. 본 논문은 관측기에 기반하여 개체가 비선형 타카기--수게노(Takagi--Sugeno: T--S) 퍼지 모델로 표현되는 다개체 시스템의 상태 일치 문제를 다룬다.

2. 본 론

2.1 사전지식

그래프는 $\mathscr{G} := \{\mathscr{V}, \mathscr{E}\}$로 표현한다. 여기서 $\mathscr{V} := \{1, 2, \ldots, q\}$는 꼭지점(vertex) 또는 노드(node)의 유한한 집합이며, $\mathscr{E}$는 $(v_k, v_l) \in \mathscr{V}$로 구성된 엣지(edge)의 집합이다. 그래프에서 각 노드는 다개체 시스템에서 각 개체(agent)를 의미하고 엣지는 두 개체 사이의 연결 여부를 나타낸다. 그래프 $\mathscr{G}$는 라플라시안 행렬(Laplacian matrix) $\mathscr{L} := \mathscr{D} - \mathscr{A}$로 다개체 시스템의 네트워크를 나타낼 수 있다. 여기서 차수행렬(degree matrix) $\mathscr{D} \in \mathbb{R}^{q\times q}$는 대각행렬이며 i번째 노드로 들어오는 엣지의 개수를 원소로 갖는다. $\mathscr{A} = [a_{kl}] \in \mathbb{R}^{q\times q}$는 인접행렬(adjacent matrix)이며 여기서 a_{kl}은 $(l,k) \in \mathscr{E}$인 경우 1로, $(l,k) \notin \mathscr{E}$인 경우 0으로 정의한다.

그래프에서 모든 노드로 정보를 전달할 수 있는 노드가 한 개 이상 존재한다면 그 그래프는 표면적으로 강하게 연결(quasi-strongly connected)되어 있다고 하며 그 경로들의 집합을 신장트리(spanning tree)라고 한다. 모든 노드에서 신장트리가 존재한다면 그 그래프는 강하게 연결(strongly connected)되어 있다고 한다. 신장트리를 포함한 그래프의 $\mathscr{L}$은 $\lambda_1(\mathscr{L}) = 0$을 오직 한 개만 갖는다 [5].

2.2 관측기 기반 퍼지 다개체 시스템의 상태 일치

q개의 개체로 구성된 T--S 퍼지 다개체 시스템을 고려하자. k번째 개체의 전역 동특성은 다음과 같다.

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{r} \theta_{k_i}(A_i x_k + B_i u_k) \tag{1}$$

여기서

$$\theta_{k_i} := \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma_j^i(z_{k_j})}{\sum_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{p} \Gamma_j^i(z_{k_j})\right)}$$

이며 $\Gamma_j^i(z_{k_j})$는 k번째 개체 내에서 j번째 전반부 변수 z_{k_j}의 퍼지집합 Γ_j^i에 대한 소속도를 나타낸다.

정의 1[5]: 임의의 초기값 $x_k(0) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathscr{I}_Q$에 대해서 다개체 시스템이 다음 조건을 만족할 때 점근적으로 상태일치를 이룬다.

$$\lim_{t\to\infty}(x_k(t) - x_l(t)) = 0$$

가정 1: 오직 출력 y_k만이 측정가능하다.

가정 2: 모든 $(i,j) \in \mathscr{I}_R \times \mathscr{I}_R$에 대하여 (A_i, B_j)는 제어가능(controllable)하며 (A_i, C_j)는 관측가능(observable)하다.

가정 3: $\mathscr{G}$는 신장트리를 포함한다.

참고 1: 다개체 시스템의 그래프가 신장트리를 포함한다는 것은 그래프내에서 모든 개체에 정보를 전달할 수 있는 적절한 개체가 한 개 이상 존재한다는 것을 의미한다.

퍼지 다개체 시스템 (1)의 제어를 위하여 다음과 같은 형태의 출력 궤환 퍼지 제어기를 제안한다.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_k = \sum_{i=1}^{r} \theta_{k_i}(A_i\hat{x}_k + B_i u_k + G_i(y_k - \hat{y}_k)) \\ \hat{y}_k = \sum_{i=1}^{r} \theta_{k_i} C_i \hat{x}_k \\ u_k = \sum_{i=1}^{r} \theta_{k_i}\left(K_i \sum_{l=1}^{q} l_{kl}(\hat{x}_k - \hat{x}_l)\right) \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $K_i, i \in \mathscr{I}_R$와 $G_i, i \in \mathscr{I}_R$는 각각 제어이득 행렬과 관측이득 행렬이며, $\hat{x}_k$와 $\hat{y}_k$는 관측기에서 발생하는 출력값이다. $x := [x_1^T, \ldots, x_q^T]^T$, $u := [u_1^T, \ldots, u_q^T]^T$, 그리고 $y := [y_1^T, \ldots, y_q^T]^T$를 정의하면 (2)를 다음과 같이 축약할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i}^{r}(\Theta_i \otimes I_n)\big((I_q \otimes A_i)\hat{x} + (I_q \otimes B_i)u \\ \qquad + (I_q \otimes G_i)(y - \hat{y})\big) \\ \hat{y} = \sum_{i}^{r}(\Theta_i \otimes I_n)(I_q \otimes C_i)\hat{x} \\ u = -\sum_{i=1}^{r}(\Theta_i \otimes I_m)(\mathscr{L} \otimes K_i)\hat{x} \end{cases} \tag{3}$$

여기서 $\Theta_i := \mathrm{diag}\{\theta_{1_i}, \ldots, \theta_{q_i}\}$이다. $\otimes$는 크로네커 곱(Kronecker produ ct)이며 적절한 차원의 행렬 $A=[a_{ij}]$, B에 대하여 $A\otimes B:=[a_{ij}B]$로 계산한다.

시스템의 상태 관측 오차를 $e=x-\hat{x}$라 하면 확장된 폐루프 다개체 퍼지 시스템은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\chi}=&\sum_{i,j=1}^{r}(I_2\otimes\Theta_i\otimes I_n)(I_2\otimes\Theta_j\otimes I_n)\\&\times\begin{bmatrix}I_q\otimes A_i-\mathscr{L}\otimes B_iK_j & \mathscr{L}\otimes B_iK_j\\ 0 & I_q\otimes(A_i-G_iC_j)\end{bmatrix}\chi\end{aligned}\tag{4}$$

가정 3에 의하여 $\mathscr{L}$은 고유값 $\lambda_1(L)=0$을 갖고, 이에 대응되는 고유벡터는 1_Q이므로 다음을 만족하는 비특이행렬 $V\in\mathbb{C}^{q\times q}$가 존재한다.

$$V^{-1}\mathscr{L}V=J_{\mathscr{L}}=\left[\begin{array}{c|ccc}0&0&\cdots&0\\\hline 0&&&\\ \vdots&&\Delta&\\ 0&&&\end{array}\right]$$

다개체 시스템의 각 개체가 모두 상태일치에 도달했을 때의 발화도를 $\tilde{\Theta}_i:=\tilde{\theta}_iI_q$로 가정하자. 좌표변환 $\tilde{x}:=(V^{-1}\otimes I_n)x$와 $\tilde{e}:=(V^{-1}\otimes I_n)e$에 의하면 (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}}=&\sum_{i,j=1}^{r}(I_2\otimes\tilde{\Theta}_i\otimes I_n)(I_2\otimes\tilde{\Theta}_j\otimes I_n)\\&\times\begin{bmatrix}I_q\otimes A_i-J_{\mathscr{L}}\otimes B_iK_j & J_{\mathscr{L}}\otimes B_iK_j\\ 0_{nq\times nq} & I_q\otimes(A_i-G_iC_j)\end{bmatrix}\tilde{\chi}+\tilde{p}(\tilde{\chi})\\=&\sum_{i,j=1}^{r}(I_2\otimes\tilde{\Theta}_i\otimes I_n)(I_2\otimes\tilde{\Theta}_j\otimes I_n)\left[\begin{array}{c|cc}A_i & \multicolumn{2}{c}{0_{n\times nq}}\\\hline 0_{nq\times n} & \begin{pmatrix}I_{q-1}\otimes A_i\\-\Delta\otimes B_iK_j\end{pmatrix} & \Delta\otimes B_iK_j\\ & 0_{nq\times n(q-1)} & I_q\otimes(A_i-G_iC_j)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\tilde{x}_{1,n}\\\hline\tilde{x}_{n+1,nq}\\\tilde{e}\end{array}\right]+\tilde{p}(\tilde{\chi})\end{aligned}$$

여기서 $\tilde{\chi}=\mathrm{col}\{\tilde{x},\tilde{e}\}$이며,

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\tilde{\chi})=&\sum_{i,j=1}^{r}(I_2\otimes V^{-1}\otimes I_n)(I_2\otimes(\Theta_i\Theta_j-\tilde{\Theta}_i\tilde{\Theta}_j)\otimes I_n)\\&\times\begin{bmatrix}I_q\otimes A_i-\mathscr{L}\otimes B_iK_j & \mathscr{L}\otimes B_iK_j\\ 0_{nq\times nq} & I_q\otimes(A_i-G_iC_j)\end{bmatrix}(I_2\otimes V\otimes I_n)\tilde{\chi}\end{aligned}$$

이다.

참고 2: T--S 퍼지 시스템은 입력값의 논의 영역(universe of discourse)을 기반으로 한 일종의 범용 근사법이다. 즉, 상태변수 x_k를 전반부 변수 z_k로 매핑(mapping)하는 단사함수가 존재하며 $\|\tilde{\chi}\|\to 0$일 때, $\|[\theta_{k_i}]_{r\times1}-[\tilde{\theta}_i]_{r\times1}\|\to 0$, $\|[\theta_{k_j}]_{r\times1}-[\tilde{\theta}_j]_{r\times1}\|\to 0$이다. 따라서 $\Theta_i\Theta_j-\tilde{\Theta}_i\tilde{\Theta}_j\to 0$임을 관찰할 수 있다.

정리 1: $A-\lambda_k(\mathscr{L})B_iK_j$, $k\in\mathscr{I}_Q\setminus\{1\}$와 $A-G_iC_j$가 리아푸노프의 의미에서 안정하면 (1)은 상태가 국소적으로 일치한다.

보조정리 1: 복소고유값 $\lambda_k(\mathscr{L})\in\mathbb{C}$에 대하여 $A_i-\lambda_kB_iK_j$가 Hurwitz라면 다음의 행렬

$$\begin{bmatrix}A_i-\mathrm{Re}(\lambda_k)B_iK_j & \mathrm{Im}(\lambda_k)B_iK_j\\ -\mathrm{Im}(\lambda_k)B_iK_j & A_i-\mathrm{Re}(\lambda_k)B_iK_j\end{bmatrix}$$

또한 Hurwitz다.

정리 2: 라플라시안 행렬 $\mathscr{L}$의 영 고유값을 제외한 모든 고유값 $\lambda_k(\mathscr{L})=\sigma_k+\mathrm{j}\omega_k$에 대하여, 다음의 선형행렬부등식을 만족하는 적절한 차원의 행렬들 $Q_1=Q_1^T\succ 0$, $P_2=P_2^T\succ 0$와 Y_j, X_i가 존재한다면 (1)은 국소적으로 상태일치를 이룬다.

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q_1A_i^T+A_iQ_1\\-\sigma_k(B_iY_j+Y_j^TB_i^T)\\+Q_1A_j^T+A_jQ_1\\-\sigma_k(B_jY_i+Y_i^TB_j^T)\end{pmatrix} & *\\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_k(Y_j^TB_i^T-B_iY_j)\\+\omega_k(Y_i^TB_j^T-B_jY_i)\end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}Q_1A_i^T+A_iQ_1\\-\sigma_k(B_iY_j+Y_j^TB_i^T)\\+Q_1A_j^T+A_jQ_1\\-\sigma_k(B_jY_i+Y_i^TB_j^T)\end{pmatrix}\end{bmatrix}\prec 0,$$

$$(k,i,j)\in\mathscr{I}_{Q-1}\times\mathscr{I}_R\times\mathscr{I}_R$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\Big(A_i^TP_2-C_j^TX_i^T+P_2A_i-X_iC_j\\+A_j^TP_2-C_i^TX_j^T+P_2A_j-X_jC_i\Big)\end{pmatrix}\prec 0,\qquad (i,j)\in\mathscr{I}_R\times\mathscr{I}_R$$

여기서 $Q_1=P_1^{-1}$, $Y_j=K_jP_1^{-1}$이고 $X_i=P_2G_i$이다.

3. 결 론

본 논문은 퍼지 다개체 시스템의 관측기 기반 출력 궤환 퍼지 상태일치 제어기의 설계기법을 논하였다. 라플라시안 행렬을 대각화시키는 것에 대하여 발화도 행렬로 인해 생기는 어려움을, 기존의 폐루프 시스템을 섭동을 포함한 시스템으로 변환시킴으로써 국소적 일치를 보장하는 범위에서 해결하였다. 설계 조건은 선형행렬 부등식으로 나타내었다.

[감사의 글]

이 논문은 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2014R1A2A2A01005664).

[참 고 문 헌]

[1] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.

[2] P. Wieland, J. Kim, H. Scheu, and F. Allg¨ower, “On consensus in multi-agent systems with linear high-order agents,” in Proc. 17th IFAC world congress, 2008, pp. 1541-1546.

[3] P. Wieland, J.-S. Kim, and F. Allgower, “On topology and dynamics of consensus among linear high-order agents,” International Journal of Systems Science, vol. 42, no. 10, pp. 1831 - 1842, 2011.

[4] Z. Li, X. Liu, P. Lin, and W. Ren, “Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols,” Systems & Control Letters, vol. 60, no. 7, pp. 510 - 516, 2011.

[5] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control,” Control Systems, IEEE, vol. 27, no. 2, pp. 71 - E82, 2007.