

해석적 방법을 이용한 반경방향 영구자석을 갖는 Cycloid Gear의 토크 특성해석

민경철*, 조한욱**, 장강현* 최장영*
 충남대학교 전기공학과*, 충남대학교 전기전자통신공학교육과**

Torque Analysis of Radial Flux Type Permanent Magnet Cycloid Gear using Analytical Method

Kyoung-Chul Min*, Han-Wook Cho**, Jang-Young Choi*
 Chungnam National University

Abstract - This paper deals with torque analysis of magnetic cycloid gear with radial magnetized permanent magnets based on analytical method. These analytical results are validated by comparing with the 2D finite element analysis (FEA).

1. 서 론

본 논문에서 다룬 자기 기어는 그림 1 (a)와 같이 중심이 다른 축을 가지면서 한쪽의 안쪽을 다른 원이 미끄러지지 않고 굴러 갈 때, 구르는 원 위의 1점이 그리는 자취가 사이클로이드 곡선을 그리는 사이클로이드 기어이다. 이러한 사이클로이드 기어는 시계 등의 정밀기계나 계측기 등에 쓰이며 기계적인 가공이 어려워 자기 기어로의 대체가 여러 사용처에서 많은 이점을 가져올 것으로 보인다. 본 논문에서 해석한 자기 사이클로이드 기어는 반경방향 영구자석을 갖는다.

자기 사이클로이드 기어의 토크특성 해석은 주로 상대적으로 정확한 유한요소해석법으로 이루어진다. 그러나 이러한 유한요소해석법은 해석에 있어서 시간이 오래 소모될 뿐만 아니라 설계변수의 변경이 빈번한 초기설계 시에 적절하지 않다. 이러한 유한요소해석법의 단점들을 고려하기 위해서 본 논문에서는 보다 빠르고 정확한 해석적 방법을 이용한 해석이 더 적절하다고 판단하였다.

본 논문에서 자기 사이클로이드 기어의 해석은 3단계로 이루어진다. 첫 번째, 2차원 극 좌표계와 자기벡터포텐셜로부터 1차 축에 있는 소스 자석에 의한 자속밀도 특성 식을 유도한다. 얻어진 자속밀도 특성 식을 통해 2차 축의 부하 자석에 영향을 주는 외부자계를 얻을 수 있다. 두 번째, 좌표변환을 이용하여 얻어진 1차 축의 좌표계를 갖는 외부자계를 2차 축의 좌표계로 좌표변환 한다 [1]. 마지막으로 2차 축의 부하 자석을 등가전류밀도로 치환하고, 이러한 전류밀도는 외부자계의 영향 안에 있다고 가정하여 자기 사이클로이드 기어의 토크를 해석하였다.

본 논문에서 해석적 방법을 이용해 얻은 자기 사이클로이드 기어의 자속밀도 분포와 토크 해석 결과는 유한요소해석 결과와 비교하여 그 타당성을 입증하였다.

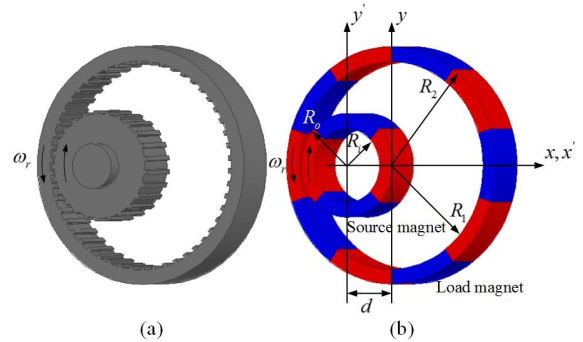
2. 본 론

2.1 해석 모델 및 구조

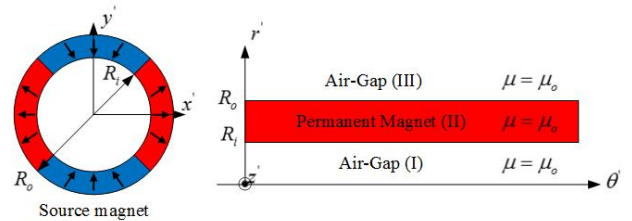
본 논문의 자기 사이클로이드 기어는 해석을 위해 그림 1 (b)와 같이 간단히 도식화 할 수 있다. 그림 1 (b)에서 작은 반경의 영구자석을 갖는 부분은 1차 축위에 있는 소스 자석, 큰 반경의 영구자석을 갖는 부분은 2차 축의 부하 자석이다. 그림 1 (b)에서 R_0 는 소스 자석의 외경, R_1 는 소스 자석의 내경, R_2 는 부하 자석의 외경, R_3 는 부하 자석의 내경이다. d 는 두 축 간의 거리, ω_p 는 부하 자석의 회전 각속도를 나타낸다. 자기 사이클로이드 기어는 1차 축과 2차 축, 두 개의 좌표계를 갖는다. 1차 축의 소스 자석은 r', θ', z 을 좌표계로 갖고, 2차 축의 부하 자석은 r, θ, z 을 좌표계로 갖는다. 먼저, 1차 축의 소스 자석에 의한 자계 해석을 위해 그림 2처럼 간단히 나타낼 수 있다. 간단히 나타내어진 소스 자석은 3가지 영역으로 나누어진다. I영역은 공극영역, II영역은 영구자석 영역, III영역은 부하 자석과의 공극영역이다. 여기에서 영구자석의 투자율은 공기와 같다고 가정하였다.

2.2 자계특성 식

자기 사이클로이드 기어의 자계특성 해석을 위해서 소스 자석을 그림 2처럼 간단히 표현할 수 있으며 이를 통해 각각의 영역에서 지배방정식을 구할 수 있다. 먼저 두 개의 공극영역 I, III에서의 지배방정식을 구하면 식 (1)에서 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, 또 자화 성분 $\mathbf{M} = 0$ 이므로 식 (2)를 유도할 수 있다.



〈그림 1〉 사이클로이드 기어의 구조 및 개념도 : (a) 기계적인 사이클로이드 기어 (b) 자기적인 사이클로이드 기어



〈그림 2〉 소스 자석의 자계특성 해석 모델

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

식 (2)에서 자기벡터포텐셜의 정의 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 와 쿨롱계이지 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 을 이용하여 식을 정리하면 공극 영역 I, III의 라플라스 방정식 (3)을 유도할 수 있다.

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{I,III} = 0 \tag{3}$$

영구자석 영역 II에서 지배방정식을 구하면 식 (1)에서 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 이고 자화성분 \mathbf{M} 을 가지고 있으므로, 식 (4)처럼 지배방정식을 얻을 수 있다.

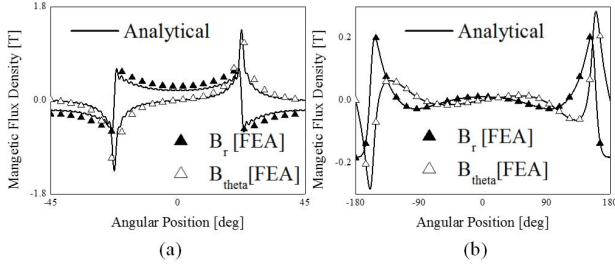
$$\nabla^2 \mathbf{A}^{II} = -\mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}) \tag{4}$$

식 (3)과 (4)에 반경방향 자화성분 \mathbf{M} 과 식 (5)로 표현되는 자기벡터포텐셜을 대입한 후 정리하면 식 (6)과 (7)을 구할 수 있다.

$$A_n = A(r') e^{-jn p_s \theta'} i_z \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 A_n^{I,III}(r')}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial A_n^{I,III}(r')}{\partial r'} - \frac{(np_s)^2}{r'^2} A_n^{I,III}(r') = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 A_n^{II}(r')}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial A_n^{II}(r')}{\partial r'} - \frac{(np_s)^2}{r'^2} A_n^{II}(r') = -\frac{\mu_0 (jn p_s M_{rn} + M_{\theta n})}{r'} \tag{7}$$



〈그림 4〉 자속밀도의 해석적 결과와 유한요소해석 결과 비교 :
(a) $r' = 35\text{mm}$ (b) $r = 70\text{mm}$

식 (6)을 전개하면 식 (8)처럼 자기벡터포텐셜의 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}^{I,II,III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n^{I,II,III} r'^{np_s} + D_n^{I,II,III} r'^{-np_s} \right\} e^{-jn_p\theta} \hat{i}_z \quad (8)$$

위와 같이 식 (7)을 전개하면 식 (9)처럼 자기벡터포텐셜의 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}^{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n^{II} r'^{np_s} + D_n^{II} r'^{-np_s} - \frac{\mu_0 (jn_p M_{rn} + M_{\theta n})}{1 - (np_s)^2} r' \right\} e^{-jn_p\theta} \hat{i}_z \quad (9)$$

자기벡터포텐셜의 정의 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 을 이용하여 식 (10)과 같이 반경방향, 접선방향의 자속밀도를 각각 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_r^{I,II,III}(r', \theta) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{jnp_s}{r} A_n^{I,II,III}(r') e^{-jn_p\theta} \hat{i}_r \\ B_\theta^{I,II,III}(r', \theta) &= - \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{I,II,III}(r') e^{-jn_p\theta} \hat{i}_\theta \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)과 (9)의 미정계수 $C_n^I, C_n^{II}, C_n^{III}, D_n^I, D_n^{II}, D_n^{III}$ 은 식 (10)을 적절한 경계조건에 대입하여 전개함으로써 간단히 구할 수 있다.

2.3 외부자계의 좌표변환

식 (10)을 통해서 얻은 I, II, III 영역의 자속밀도는 1차 축의 r', θ, z' 을 좌표계로 갖는다. 자기 사이클로이드 기어의 토크를 구하기 위해서 1차축의 외부자계를 2차축으로 좌표변환한다. 좌표변환 시에 두 좌표계 사이의 관계식은 식 (11)과 같다 [2].

$$r' = \sqrt{r^2 + 2rd\cos\theta + d^2} \quad (11.a)$$

$$\theta' = \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + d}\right) \quad (11.b)$$

식 (10)에 좌표변환 식 (11)을 대입하면 자기 스피어 기어의 토크를 얻는데 사용되는 외부자계 식을 (12)처럼 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_x^{\text{ext}} &= B_r^{III}(r, \theta) \cdot \cos\theta' - B_\theta^{III}(r, \theta) \cdot \sin\theta' \\ B_y^{\text{ext}} &= B_r^{III}(r, \theta) \cdot \sin\theta' + B_\theta^{III}(r, \theta) \cdot \cos\theta' \end{aligned} \quad (12)$$

외부자계를 식 (12)와 같이 서로 다른 두 좌표계의 기준이 될 수 있는 직각좌표계 성분으로 나타낸다.

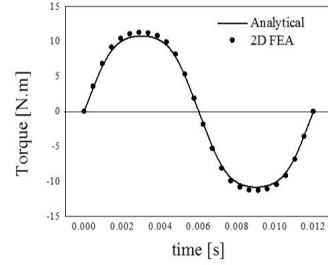
2.4 토크 해석

자기 사이클로이드 기어의 토크해석 식은 식 (13)과 같다.

$$\mathbf{T} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{J}_m \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) dV + \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{j}_m \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) dS \quad (13)$$

식 (13)에서 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$ 이므로 부피 적분 식은 0이 되고 표면 적분 식만 남게 되어 토크해석 식을 식 (14)처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} T(\theta) &= 2ML \frac{(R_2 - R_1)}{N_r} \sum_{p=0}^{2p_i-1} \sum_{q=0}^{N_r} (-1)^p S_r(q) r(q) \\ &\quad \times [\cos(\theta_{\text{edge}}(\theta, p)) B_x^{\text{ext}}(r, \theta_{\text{edge}}(\theta, p)) \\ &\quad + \sin(\theta_{\text{edge}}(\theta, p)) B_y^{\text{ext}}(r, \theta_{\text{edge}}(\theta, p))] \end{aligned} \quad (14)$$



〈그림 5〉 토크의 해석적 결과와 유한요소해석 결과 비교

〈표 1〉 해석에 사용된 파라미터 값

Parameter	Value	Parameter	Value
R_i	소스 자석의 외경 25 [mm]	B_r	잔류자속밀도 1.23 [T]
R_o	소스 자석의 내경 35 [mm]	M	잔류 자화 890000 [A/m]
R_1	부하 자석의 내경 70 [mm]	p_s	소스 자석의 극쌍수 2
R_2	부하 자석의 외경 80 [mm]	p_l	부하 자석의 극쌍수 5
d	좌표축 간의 거리 34 [mm]	L	축 방향 길이 30 [mm]
N_r	simpson's method의 mesh 수 10		

식 (13)에서 적분은 Simpson method에 의해 식 (14)처럼 계산될 수 있으며 [2]에 자세히 설명되어 있다. $S_r(q)$ 은 Simpson 계수, L 은 자기 사이클로이드 기어의 길이, $\theta_{\text{edge}}(\theta, p)$, $r(q)$ 은 식 (15)처럼 표현된다.

$$\theta_{\text{edge}}(s) = \theta + \frac{\pi}{2p_l}(1+2p) \quad (15.a)$$

$$r(q) = R_1 + \frac{q}{N_r}(R_2 - R_1) \quad (15.b)$$

2.5 해석 결과 및 검증

본 논문에서 자기 사이클로이드 기어의 해석에 사용된 파라미터는 표 1과 같다. 그림 4는 본 논문에서 제시한 해석적 방법을 이용해 얻은 자속밀도 분포와 유한요소해석 결과를 비교하여 보여준다. 두 해석 결과가 잘 일치하는 것으로 보아 식 (10)과 (12)가 타당함을 알 수 있다.

그림 5 (a)는 좌표축간의 거리가 34mm일 때의 토크해석 결과를 나타내며 자속밀도 분포와 마찬가지로 잘 일치하는 것을 확인할 수 있으며 식 (14)가 타당한 것을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 해석적 방법을 이용하여 자기 사이클로이드 기어의 토크특성을 해석하였으며, 유한요소해석 결과와 비교한 결과 잘 일치하는 것을 확인하였다. 이를 통해 본 논문에서 제시한 토크 특성 해석 방법이 타당한 것을 알 수 있다.

이 논문은 2014년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임
(No.2014R1A1A1A05002745).

[참고 문헌]

- [1] E. P. Furlani, "Analytical analysis of magnetically coupled multipole cylinders", Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 33, Issue. 1, pp 28-33, 2000.
- [2] F. T. Jorgensen, T. O. Anderson, P. O. Rasmussen, "Two dimensional model of a permanent magnet spur gear," IEEE Trans. on Ind, vol. 1, pp 261-265, 2005.