

성능 모멘트 적분법을 이용한 설계 변수의 불확실성에 기인한 스피커 모델의 성능 변동 예측

강병수*, 이상균*, 김동욱**, 김동훈*
 경북대*, 국방과학연구소**

Performance Moment Integration (PMI) for Prediction Performance Changes of a Loudspeaker Model Due to the Uncertainty of Design Variables

Byung-Su Kang*, Sang-kyun Lee*, Dong-Wook Kim**, Dong-Hun Kim*
 Kyungpook National University*, Agency for Defense Development**

Abstract - 전자기 관련 제품에서 제작공차에 의한 성능변동의 확률론적 분포특성을 효율적으로 예측하기 위해 성능 모멘트 적분법을 도입하였다. 제안된 기법을 검증하기 위해 간단한 수학적예제와 스피커 모델의 폴피스 사이 공극의 평균자속 밀도에 대한 확률론적 분포특성 예측을 수행하고, 이를 기존 확률론적 분포특성 예측 기법과 비교하였다. 또한 몬테카를로 수치모사법을 이용하여 도출된 성능의 확률론적 분포특성 예측 값을 재계산 후 비교함으로써 제안된 기법의 정밀도를 검증하였다.

1. 서 론

최근 국제 산업시장의 경쟁이 심화됨에 따라 전자기기 및 장치의 제품의 성능뿐 아니라 품질에 대한 소비자의 욕구가 증가하고 있다. 따라서 설계단계에서부터 개발 대상 제품의 품질을 확보할 수 있는 설계가 이루어져야 한다. 일반적으로 전자기기 및 소자의 해석과 설계 단계에서 관련된 모든 변수는 편의상 고정된 상수 값으로 가정하였다. 그러나 실제 제품을 생산함에 있어 설계 치수와 생산된 제품의 실제 치수는 제작상 필연적으로 포함되는 불확실성에 의해 고유한 확률적인 분포특성을 나타낸다. 즉, 제품 설계변수에 포함된 불확실성(uncertainty)은 확률적인 분포특성을 갖게 된다. 따라서 실제 제작품의 성능에 근접한 설계를 수행하기 위해서 제품의 해석과 설계단계에서 불확실 인자를 반영한 확률론적 수치기법이 요구된다.

본 논문에서는 제작공차로 인해 발생하는 설계변수의 임의성이 제품 성능에 미치는 변동 특성을 예측하기 위하여 성능함수의 확률분포 예측 기법을 도입하였다. 성능 모멘트 적분법(performance moment integration : PMI)은 성능함수의 최대손상가능점 정보를 활용하여 수치 적분을 수행함으로써 성능함수에 나타나는 확률분포 함수의 평균과 분산을 계산한다. 최대 손상가능점을 찾아가는 기법으로는 향상된 고속 평균값(enhanced hyper mean value : HMV+)기법을 사용하였다. 제안된 기법을 간단한 수학적예제와 스피커 모델에 적용하여 계산결과와 정밀도와 효율성을 단변수 차원 감소법(univariate dimension reduction method: uDRM)과 몬테카를로 수치모사법(Monte Carlo simulation method : MCS)의 비교를 통하여 검증 하였다.

2. 성능함수 확률론적 분포특성 예측

2.1 통계적 모멘트 계산법

통계적 모멘트 계산을 위해 불확실성을 포함하는 설계 변수들이 서로 영향을 미치지 않는다고 가정을 하면 아래의 식 (1),(2)와 같이 확률밀도 함수의 곱의 형태로 통계적 모멘트를 표현 할 수 있다.

$$E[H] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f_x(x) dx \quad (1)$$

$$E[H(x) - \mu_H]^k = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (H(x) - \mu_H)^k f_x(x) dx \quad (2)$$

위 식에 $f_x(x) = \prod_{i=1}^m f_{x_i}(x_i)$ 을 적용하여 출력의 통계적 모멘트를 수치적분을 통해 식 (3),(5)와 같이 근사 할 수 있다.

$$E[H]^1 \cong \mu_H = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \prod_{i=1}^m f_{x_i}(x_i) dx_1, \dots, dx_n \quad (3)$$

$$\cong \sum_{j_1=1}^m w_{j_1} \dots \sum_{j_n=1}^m w_{j_n} H(\mu_1 + \alpha_{j_1}, \dots, \mu_n + \alpha_{j_n}) \quad (4)$$

$$E[H(x) - \mu_H]^k \cong \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (H(x) - \mu_H)^k \prod_{i=1}^m f_{x_i}(x_i) dx_1, \dots, dx_n \quad (5)$$

$$\cong \sum_{j_1=1}^m w_{j_1} \dots \sum_{j_n=1}^m w_{j_n} [H(\mu_1 + \alpha_{j_1}, \dots, \mu_n + \alpha_{j_n}) - \bar{\mu}_1]^k \quad (6)$$

식 (3),(5)를 각 성능함수와 확률분포함수의 곱의 합으로 다시 식(4),(6)과 같이 근사하여 표현할 수 있다.

2.1.1 성능 모멘트 적분법

성능함수의 통계적 모멘트를 예측하기 위해 입력부에서 수치적분법을 사용하는 것은 전자기기 성능해석에 있어서 많은 시간과 자원이 소모된다. 이 논문에서 제안된 성능 모멘트 적분법의 경우 식 (7),(8)과 같이 출력부에서 통계적모멘트를 구하는 방법이다.

$$E[H]^1 = \int_{-\infty}^{\infty} h f_H(h) dh = \mu_H \quad (7)$$

$$E[H - \mu_H]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (h - \mu_H)^2 f_H(h) dh \quad (8)$$

여기서 $f_H(h)$ 는 H에 대한 확률밀도 함수이다. 통계적 모멘트인 H에 대하여 근사하기 위하여 N절점 수치 구적법을 사용하여 표현하면 식 (9),(10)과 같이 근사 된다.

$$E[H]^1 = \mu_H \cong \sum_{i=1}^N \omega_i h_i \quad (9)$$

$$E[H - \mu_H]^2 \cong \sum_{i=1}^N \omega_i (h_i - \mu_H)^2 \text{ for } 2 \leq k \leq 5 \quad (10)$$

통계적 모멘트의 1차와 2차 값을 구하는데 있어 높은 정확도를 유지하기 위해서 최소 3절점 적분이 필요하다. 식 (9),(10)을 계산하는데 있어 3절점의 가중치를 표(1)과 같이 적용하여 근사화하면 식 (11),(12)의 결과를 얻을 수 있다[1].

〈표 1〉 표준정규분포에서 구적점과 가중치

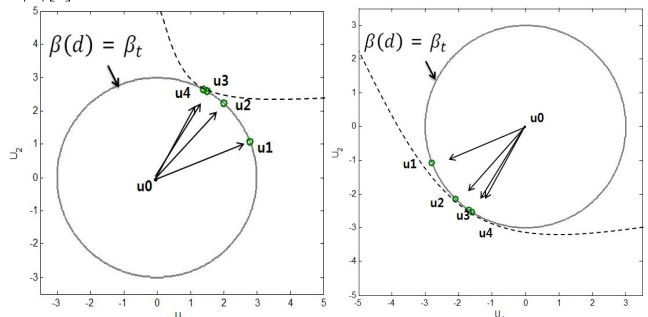
구적점			가중치		
α_1	α_2	α_3	ω_1	ω_2	ω_3
$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E[H]^1 = \mu_H \cong \frac{1}{6} h_{\beta=-\sqrt{3}} + \frac{4}{6} h(\mu_X) + \frac{1}{6} h_{\beta=+\sqrt{3}} \quad (11)$$

$$E[H - \mu_H]^2 = \sigma_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (h - \mu_H)^2 f_H(h) dh$$

$$\cong \frac{1}{6} (h_{\beta=-\sqrt{3}} - \mu_H)^2 + \frac{1}{6} (h_{\beta=+\sqrt{3}} - \mu_H)^2 \quad (12)$$

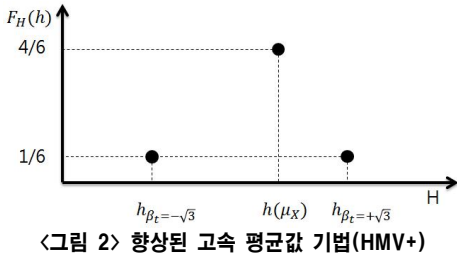
최대 손상가능점을 계산하는 방법으로는 향상된 고속 평균값기법을 사용하였다. 향상된 고속 평균값기법은 아래 그림 1에서와 같이 로젠블랫 좌표변환 기법을 사용하여 X좌표계의 설계점을 U좌표로 좌표 변환 후 구속조건이 오목함수인지 볼록함수인지 확인 후 각각의 경우에 맞춰 기법을 달리 적용하여 적은 계산 횟수로 최대손상가능점을 찾아가는 기법이다[2].



(a) 볼록 함수 조건 (AMV) (b) 오목 함수 조건 (CMV)

〈그림 1〉 향상된 고속 평균값 기법(HMV+)

일반적으로 U좌표계에서 구한 최대 손상가능점을 X좌표계로 변환하여 초기 설계값을 기준으로 하위 구간과 상위 구간의 값을 구해보면 그림2에서 확인 할 수 있듯이 대칭이 아니다. 따라서 하위 구간 $h_{\beta=-\sqrt{3}}$ 와 상위 구간 $h_{\beta=+\sqrt{3}}$ 를 모두 계산해야 함을 알 수 있다.



〈그림 2〉 향상된 고속 평균값 기법(HMV+)

2.1.2 단변수 차원 감소법

단변수 차원 감소법은 가법분해법을 이용하여 N-차원의 방정식을 1차원의 방정식으로 변환하여 성능함수를 계산한다. 식 (1)에서 성능함수 $h(x)$ 를 가법분해 하면 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

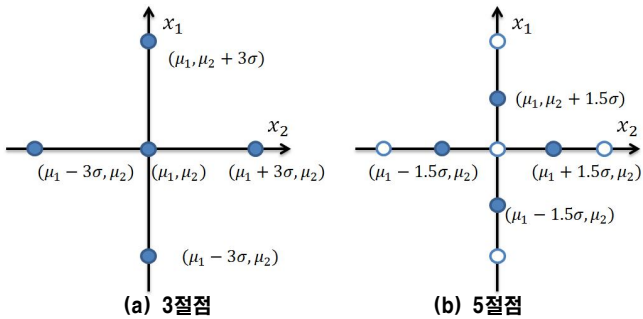
$$h(x) \cong \sum_{i=1}^N h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N) \quad (13)$$

여기서 μ_i 는 변수 X_i 의 평균이고 N은 설계변수의 개수이다. 식 (13)은 N-차원으로 표현된 방정식을 1차원 방정식으로 N번 계산하는 방정식으로 변환하여 표현하였다. 통계적 모멘트의 구현을 위해 모멘트 기반 접근법을 적용하여 평균과 분산에 관한 통계적 모멘트 식으로 나타내면 식 (14), (15)처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_H &\equiv E(h(x)) \\ &\cong \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \omega_i^j h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i^j, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)h(\mu_1, \dots, \mu_N) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_H^2 &\equiv E[(h(x) - \mu_H)^2] = E[h^2(x)] - \mu_H^2 \\ &\cong \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \omega_i^j h^2(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i^j, \mu_{i+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)h^2(\mu_1, \dots, \mu_N) - \mu_H^2 \quad (15) \end{aligned}$$

위 식 (14), (15)에서 ω_i^j 는 가중치를 의미하며 x_i^j 구적점을 의미한다. 단변수 차원 감소법이 구적점과 설계변수의 개수를 고려한 $mN+1$ 만큼의 실험점을 발생 되었을 경우 구적점의 위치는 그림 3처럼 정해진다[3].



〈그림 3〉 구적점 종류 및 위치

2.2 기법검증 및 적용사례

제한된 기법을 검증하기 위하여 간단한 수학문제를 통해 기법의 정밀도를 확인 한 후 실제 전기기기 예제에서 성능함수의 확률분포 예측을 수행한다.

2.2.1 수학 예제

성능 모멘트 적분법의 확률론적 분포특성 예측 성능을 확인하기 위하여 (16)의 수학예제를 활용하여 검증하고자 한다.

$$h(X) = 1 - \frac{X_1^2 X_2}{20} \quad (16)$$

여기서 확률 변수 (X)는 $X_i \sim N(5,1)$ $i = 1,2$ 이다. 각 기법별 확률론적 분포의 평균과 분산을 계산하면 아래 표 2와 같다.

〈표 2〉 확률론적 분포의 평균과 분산 계산

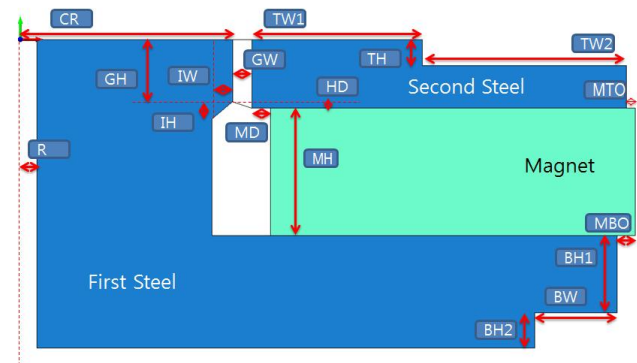
	μ_H	σ^2	Function call
Analytic	-5.5	8.3175	-
MCS	-5.49	8.6257	2000000
Error(%)	0.04	3.71	

uDRM	-5.5	7.9355	5
Error(%)	0	4.59	
PMI	-5.65	8.6257	$6+6^5$
Error(%)	2.72	3.7054	

표2의 결과에서 확인 할 수 있듯이 수학예제를 통해 제한한 기법의 정확성을 확인 할 수 있다.

2.2.2 스피커 모델 공극 평균 자속밀도 예제

스피커 모델의 전자기적 동작 원리는 보이시 코일에 교류 전류 신호가 흐르면 자기력이 발생하고 영구자석의 자기장과 상호작용으로 코일이 진동한다. 그리고 코일의 움직임에 의해 콘이 음파를 발생시켜 소리가 발생한다. 그림 4는 스피커 모델에서 전자기 특성을 고려하여 설계가 이루어져야하는 요소인 폴피스(pole piece), 자석(magnet), 프런트플레이트(front plate) 부분의 설계 변수들을 나타내었고, 이 변수들의 불확실성을 부여하여 성능의 확률론적 분포의 평균과 분산을 구하여 표3에 나타내었다.



〈그림 4〉 2차원 축대칭 스피커 모델 설계 변수 지정

〈표 3〉 스피커 모델의 평균 자속 밀도, 분산, CAE 계산 횟수

	μ_H (T)	σ^2	Function call
MCS	1.8062	0.0208	1700000
uDRM	1.8133	0.0488	86
Error	0.3931 %	134.6154	
PMI	1.8101	0.0181	$8+8^5$
Error	0.2159 %	12.9808	

표 3에서 $8+8^5$ 는 8번의 성능해석과 8번의 민감도 해석을 의미한다. 결과에서 확인 할 수 있듯이 성능모멘트 적분법은 전기기기 성능함수의 확률론적 분포특성 예측에 있어 높은 정밀도가 나타남을 확인할 수 있다. 연속체 민감도 해석기법 등을 사용할 경우 다른 기법들에 비해 효율성이 높음을 확인할 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 실제 전기기기 제작에 있어 설계변수에 불확실성에 의해 발생하는 성능함수의 변동을 고려하기 위해 확률론적 분포특성 예측 기법을 도입하였다. 설계 변수의 확률분포 함수를 가정하여 설계치수의 임의성이 성능에 어떠한 영향을 주는지 성능함수의 확률분포 특성을 도출하여 확인하였다. 제한한 기법의 효율성과 정밀도를 검증하기 위하여 간단한 수학예제와 스피커 모델에 적용하여 설계변수의 불확실성에 의해 나타나는 성능함수의 확률분포 특성을 기존 기법들과 비교하였다.

감사의 글

이 논문은 2014년도 정부(교육과학기술부)의 개원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2014R1A1A4A01008767).

[참 고 문 헌]

- [1] B.D Youn, et al., "Performance Moment Integration (PMI) Method for Quality Assessment in Reliability-Based Robust Design Optimization," Mechanics Based Design of Structures and Machines February 07 2007.
- [2] B.D Youn, et al., "Hybrid Analysis Method For Reliability-Based Design Optimization," Journal of Mechanical Design. 125(2), 221-232 June 11, 2003
- [3] I. Lee, et al., "Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization," IEEE Trans. Computer & Struct., vol 86, pp 1550-1562, July 2008.