

# TMM 을 이용한 다단 회전축계 진동해석

## Vibration Analysis of multi-stage Rotor System using TMM

송오섭†·김선홍\*·박상윤\*\* 좌비\*\* 강성환\*\* 서정석\*\*

**Ohseop Song, Sun-Hong Kim, Sang-Yun Park, Zuo-Fei, Sung-Hwan Kang and Jung-Seok Seo**

### 1. 서 론

회전기기는 에너지 효율 및 기계적 성능을 높이기 위해 고속, 경량화 추세에 있으며 운전속도가 임계속도보다 높은 속도에서 가동되는 경우도 있다. 그러므로 운전 중에 발생하는 회전체&베어링 시스템의 진동해석 및 이상진단 방법 등에 관한 연구의 필요성이 증대되고 있다. 연구대상은 3단 원심형 터보 압축기로서 그 회전축계의 진동문제와 관련된 여러 가지 해석 분야가 있으며 그에 따른 다양한 해석방법이 개발되어 있다. 본 논문에서는 Holzer (1991), Prohl, Myklestad, Pestel, Pilkey, Lund 등에 의해 개발되고 발전된 전달행렬법(Transfer Matrix Method)을 사용하여 로터-축계를 구간별로 분할하여 진동해석을 수행하였다.

### 2. 전달행렬법

#### 2.1 비틀림 진동 TMM 기본 원리

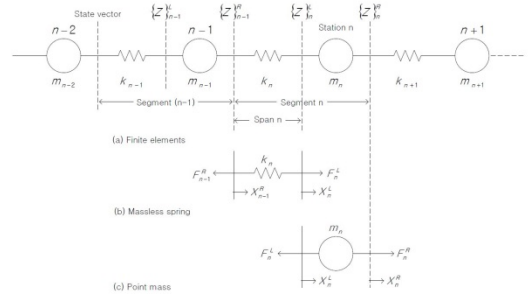
(1) 장 전달행렬(길이를 가지는 연속체)  
 $k_n$ 에 의한 장 전달행렬은 상태 벡터의 시작부분  $\{Z\}_{n-1}^R$ 과 span의 n위치 말단  $\{Z\}_n^L$ 에 관한 것이다. Fig.1(b)에서 span의 힘 방정식은 식(1a)과 같이 정리할 수 있다.

$$F_n^L = F_{n-1}^R \text{ and } F_{n-1}^R = k_n(X_n^L - X_{n-1}^R) \quad (1a)$$

행렬 표기법으로 표현하면 식(1b)로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (1b)$$

(2) 점 전달행렬(길이를 가지지 않는 질점)  
 n위치에서 점 전달행렬은 벡터  $\{Z\}_n^L$ 과  $\{Z\}_n^R$ 은



**Fig. 1 Finite element representation of a structure**

$m_n$ 의 왼쪽과 오른쪽에 관한 것이다. Fig1(c)로부터 점 질량  $m_n$ 의 힘 방정식은 식(2a)과 같이 나타낸다.

$$F_n^R - F_n^L = m_n \ddot{x}_n \quad (2a)$$

$$\therefore x_n = X_n e^{i\omega t} \text{ 조화운동}$$

질량  $m_n$ 에서 변위는 식(2b)로 나타낸다.

$$X_n^R = X_n^L = X_n \quad (2b)$$

마지막 두 식을 결합하면 점 전달행렬 식(2c)를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_n^L \quad (2c)$$

세그먼트 n의 시작과 끝의 상태벡터  $\{X F\}_{n-1}^R$ 과  $\{X F\}_n^R$ 에 관한 전달행렬은 식(1b)  $\{X F\}_n^L$ 를 식(2c)에 대입하여 식(2d)를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^R$$

$$\begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 1/k \\ -\omega^2 m & 1 - \omega^2 m/k \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} X \\ F \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (2d)$$

또는

$$\{Z\}_n^R = H_n \{Z\}_{n-1}^R \quad (2e)$$

Transfer equation Only Segment-n

일반적인 n위치의 상태벡터  $\{Z\}_n^R$ , 문제의 경계에서 상태 벡터  $\{Z\}_0^R$ 이 관련될 수 있으며 식(2f)로 나타낸다.

$$\{Z\}_n^R = [H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1] \{Z\}_0^R \quad (2f)$$

Transfer equation For Whole Segment

† 교신저자; 충남대학교, 기계공학과

E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

\* 충남대학교, 대학원

\*\* 충남대학교, 대학원

**Table 1** Boundary conditions

	Y	$\theta$	M	V
Simple Support	0	$\theta$	0	V
Free	Y	$\theta$	0	0
Fixed	0	0	M	V

**2.2 보의 굽힘 TMM 기본 원리**

빔의 일반적인 세그먼트는 질량이 없는 범위 및 점 질량 이루어져있다. 세그먼트의 굴곡 특성은 span의 장 전달행렬에 의해 설명되고, 세그먼트의 관성 효과는 대량의 점 전달행렬에 의해 설명된다.

(1) 장 전달행렬(Span-n)

장 전달행렬은 다음 식(3a)과 같은 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (3a)$$

span n에서 길이(L)의 균일 한 빔의 자유 물체 스케치를 고려하여 Fig.2(a)에 표시하고 장 전달행렬을 설명한다.

Fig.2(a)를 참조하면 span의 경사  $\theta$ 의 변화는 순간  $M_n^L$ 과 전단  $V_n^L$ 의 때문이다.

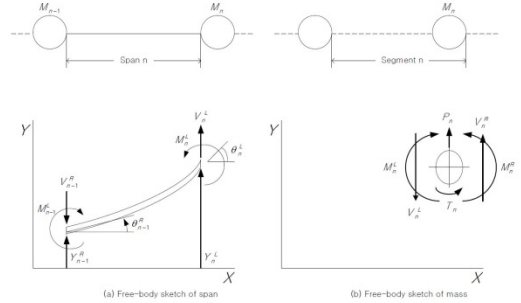
(2) 점 전달행렬(Span-n)

점 전달행렬은 다음 식(4a)과 같은 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J & 1 & 0 \\ -\omega^2 m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^L \quad (4a)$$

세그먼트 n의 전달 행렬은 식(4a)에 식(3a) 상태 벡터  $\{Z\}_n^L$ 을 대입하여 식(4b)를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & -\omega^2 J & 1 - \omega^2 J \frac{L}{EI} & -L + \omega^2 J \frac{L^2}{2EI} \\ -\omega^2 m & -\omega^2 mL & -\omega^2 m \frac{L^2}{2EI} & 1 + \omega^2 m \frac{L^3}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \\ M \\ V \end{bmatrix}_{n-1}^R \quad (4b)$$



**Fig. 2** Derivation of transfer matrix of a beam

Fig.2(b)에서  $m_n$ 의 자유 물체 스케치를 고려하여 점 전달행렬을 도출하였다.

$J_n$ 은 (x,y)평면에 수직인 축에 대한  $m_n$ 의 관성 질량 모멘트이고 D'Alembert's 관성 하중은  $-\omega^2 m_n Y_n^L$ 과  $-\omega^2 J_n \theta_n^L$  이다.

빔 문제에 대한 일반적인 경계조건은 Table.1에 나타내었다.

**3. 결 론**

본 논문에서는 기존의 회전체 진동해석에 주로 이용되는 전달행렬법(Transfer Matrix Method)을 사용하여 등가모델에 적용하여 FEM 결과와 비교하여 결과가 신뢰성을 확인하고 기존의 사용되던 유한요소법 보다 훨씬 적은 계산시간으로도 유효한 결과를 얻을 수 있다는 사실을 확인하며 로터-축계를 구간별로 분할하여 진동해석을 수행하였다.

**후 기**

본 연구는 충남대학교 지역혁신인력사업 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사드립니다.