한국소음진동공학회 2014년 춘계학술대회논문집, pp. 225~226

힐버트 변환을 이용한 히스테리 감쇠계의 고유값 추정

Complex Eigenvalue Estimation in Hysteresis Damping System Using Hilbert transform

배승훈* · 정의봉† · 조진래**

Seung-Hoon Bae, Weui Bong Jeong, Jin Rae Cho

1. 서 론

일반적으로 히스테리시스 감쇠는 강성을 주파수 영역에서 복소수의 실수부로 나타내고 감쇠를 복소수의 허수부로 표현한다. 이렇게 표현된 강성은 주파수 영역에서 위상 차이를 나타내고 매 진동 주기마다 에너지 손실 즉 마찰 혹은 감쇠 의미한다.

이러한 1 자유도 히스테리시스 감쇠 시스템의 특성치를 구하는 방법은 교과서에서 소개되는 일반적인 방법에서 부터 여러 가지 실험적 방법 등 다양한 방법 들이 있다.

본 논문에서는 고유값 추정방법에 앞서 히스테리 감쇠로 표현되는 복소수 지배 방정식의 자유진동응답을 먼저 구해보고 그를 이용하여 자유진동응답에서 고유값를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 복소 강성시스템과 초기조건 문제

식 (1)은 일반적인 주파수 영역에서의 가진력이 작용하는 1자유도 복소 강성 시스템의 지배방정식이다.

$$-\omega^2 m X(\omega) + (k + j\eta\, sgn(\omega)) X(\omega) = F(\omega) \quad (1)$$

주파수 영역의복소 강성 재배 방정식을 푸리에 변환과 힐버트 변환을 이용하여 시간영역으로 고치면 다음과 같다.

$$m\ddot{x}_a(t) + (k + j\eta) x_a(t) = f_a(t) \quad (2)$$

$x_a(t)$를 다음과 같이 $u(t) + j^* v(t)$ 복소함수로 둔다. 식(2)에 $u(t) + j^* v(t)$ 를 대입 하면 다음과 같이 정리된다.

$$m(\ddot{u}(t) + j\ddot{v}(t)) + k(1 + j\eta)(u(t) + jv(t)) = 0 \quad (3)$$

이 식의 복소수 부분과 실수 부분을 분리하여 상태 공간에 나타내면 식(4) 같고, 단순한 형태의 행렬로 나타내면 $\{\dot{x}\} = [L]\{x\}$ 과 같다.

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\eta\omega_n^2 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \\ v \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $\dot{x}$는 x의 시간 미분을 항을 의미한다. 여기서 x를 모드 좌표로 고쳐서 고유값와 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\{x\} = [V]\{p\} \quad (5)$$

$$\{\dot{p}\} = [V]^{-1}[L][V]\{p\} = [\lambda]\{p\} \quad (6)$$

단,

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

$$z = \omega_n\sqrt{-1 + \eta j} = \alpha_R + j\alpha_I\ , \quad \bar{z} = \alpha_R - j\alpha_I$$

여기서 식(6)의 해를 일반적인 방법으로 구하면 식 (7)과 같다.

$$\vec{x}(t) = C_1\{\overrightarrow{v_1}\}e^{zt} + \overline{C_1}\{\overline{\overrightarrow{v_1}}\}e^{\bar{z}t} + C_2\{\overrightarrow{v_3}\}e^{-\bar{z}t} + \overline{C_2}\{\overline{\overrightarrow{v_3}}\}e^{-zt} \quad (7)$$

† 교신저자 ; 부산대학교 기계공학부
E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr
Tel :(052)-279-3134 , Fax : (052)-279-3237
* 부산대학교 대학원 기계공학부
** 부산대학교 기계공학부

식(7)은 켤레 복소수로 이루어져 있는데 허수부와 실수부를 서로 다시 정리 하면 허수부는 자연스럽게 없어지고 식(8)와 같이 실수부로 된 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= e^{\alpha_R t}[(A\cos\alpha_I t + B\sin\alpha_I t)Re\{\overrightarrow{v_1}\} + (B\cos\alpha_I t - A\sin\alpha_I t)Im\{\overrightarrow{v_1}\}] \\ &+ e^{-\alpha_R t}[(C\cos\alpha_I t + D\sin\alpha_I t)Re\{\overrightarrow{v_3}\} + (D\cos\alpha_I t - C\sin\alpha_I t)Im\{\overrightarrow{v_3}\}]\end{aligned}$$

(8)

일정한 초기조건이 있고 감쇠가 존재할 때 응답이 수렴하는 일반적인 가정을 적용하면 $A=B=0$이다. 그리고 초기조건 u_0와 $\dot{u}_0$를 이용해서 C,D값을 구하면 역으로 v_0 $\dot{v}_0$를 구할 수 있다.

$$v_0 = -\frac{\dot{u}_0 + u_0\alpha_R}{\alpha_I} \quad \dot{v}_0 = \frac{\dot{u}_0\alpha_R + u_0 s}{\alpha_I} \tag{9}$$

이를 이용해서 초기 조건 응답을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} = e^{-\alpha_R t}\begin{bmatrix} \cos(\alpha_I t) & -\sin(\alpha_I t) \\ \sin(\alpha_I t) & \cos(\alpha_I t) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

식(10)은 u_0와 v_0로 표현되는 일정한 크기의 벡터를 α_I의 각속도로 시간당 회전시키는 변환이며 벡터의 크기는 $e^{-\alpha_R t}$에 비례해서 작아진다. 따라서 $u(t)+j{*}v(t)$ 복소함수의 위상 $\Phi(t)$과, 크기 $r(t)$를 시간에 따라 표현하면 아래와 같다.

$$r = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} = e^{-\alpha_R t}\sqrt{u_0^2 + v_0^2} \tag{11}$$

$$\ln(r) = -\alpha_R t + 0.5\ln(u_0^2 + v_0^2) \tag{12}$$

$$\Phi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v(t)}{u(t)}\right) = \alpha_I t + \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{u_0}\right) \tag{13}$$

고유진동수가 $\omega = 103 rad/s$ 이고 $\eta = 0.134$ 일 때 그에 따른 고유값은 $\alpha_R = 6.8856$, $\alpha_I = 103.22$ 이다. 이러한 특성을 가지는 자유진동응답 신호를 사용해서 고유값을 추정하고 실제값과 비교하였다.

먼저 $v(t)$를 $u(t)$의 힐버트 변환을 FFT 알고리즘을 사용하여 구한다.

계산된 $u(t), v(t)$를 사용해서 식(12),(13)을 구해 시간에 대해 나타내면 Fig.1와 Fig.2와 같다.

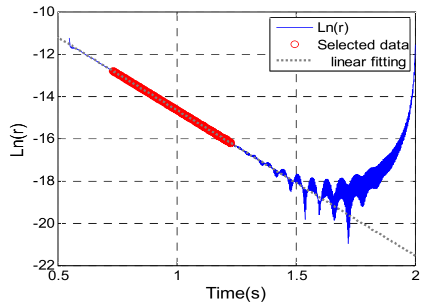

Fig. 1 Ln(r)-t and linear fitting graph

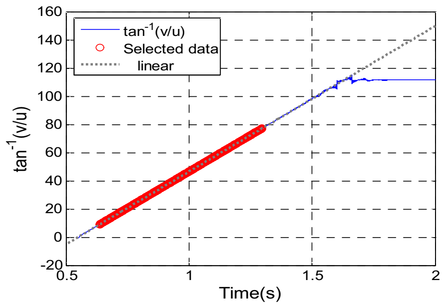

Fig. 2 $\tan^{-1}$(v/u)-t and linear fitting graph

Fig.1와 Fig.2를 보면 일정한 기울기가 생기는 구간이 존재한다. 이 구간이 힐버트 변환의 오차가 거의 없는 부분이고 선형 fitting을 사용해서 기울기를 구하면 α_I, α_R는 각각 103.23, 6.8845이다. 실제 값 $\alpha_R = 6.8856$, $\alpha_I = 103.22$ 에 비교해 보면 소숫점 2번째까지 비교적 정확하게 구해지는 것을 알 수 있다. 다만 그래프가 선형적인 부분을 선택하는데 있어서 사용자의 임의대로 사용할 데이터를 결정해야 하는 점은 존재하지만 오차가 큰 부분을 가시적으로 구별이 쉽게 가능하므로 오차에 대한 부분은 쉽게 제외시킬 수 있다.

3. 결 론

1자유도 히스테리시스 감쇠계의 초기 조건 응답을 구하기 위해서 만들어진 식을 사용해서 역으로 고유값을 추정하는 방법을 만들 수 있었다. 향후 제시된 방법을 1자유도 실제 시스템에 적용해보고 방법의 유효성을 검증하고자 한다.