한국소음진동공학회 2013년 춘계학술대회논문집, pp. 267~268

Floquet 이론에 의한 Mathieu equation 의 안정성해석

Stability Analysis of Mathieu Equation by Floquet Theory

박찬일†
Chan IL Park

1. 서 론

기어는 강성이 기어의 맞물림 주기에 의해 변하는 1 자유도계부터 6 자유도계까지의 운동 방정식을 갖는다. 이식은 주기적인 계수를 갖는 Hill 식, Mathieu 식과 비슷한 형태이다. 또한 Floquet 이론은 주기적으로 운동하는 시스템의 동적 안정성을 해석하기 위해 사용되며, 특히 매개 가진 (parametric excitation)하고, 주기적인 계수를 갖는 선형 미분 방정식의 안정성을 판별하는데 유용하게 적용될 수 있다. 이 연구에서는 Mathieu 식에 대하여 Floquet 이론을 이용하여 안전성 해석을 한다.

2. 이 론

Mathieu 식의 안정성 해석을 하기 위해, Hill 식과 Mathieu 식을 소개한다. 먼저 Hill 식은 다음의 미분 방정식 형태이다.

$$\ddot{x} + p(t)x = 0\,,\ \ p(t+T) = p(t)\,, \tag{1}$$

여기서 x, p 는 스칼라이고, $p(t)$ 는 주기 T 의 주기함수이다.

$p(t) = \delta + \varepsilon \cos t$ 이면 Hill 식의 특별한 경우로 다음과 같이 주기 2π 인 Mathieu 식이 된다[1].

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0\,. \tag{2}$$

Mathieu 식에 대한 주요한 관심은 파라미터 δ, ε 의 주어진 값에 대해 모든 해가 한정되는지 (bounded) 안되는 지에 있다. 각 δ 와 ε 값에 대해 모든 해가 한정되면 $\delta - \varepsilon$ 파라미터 평면에서 그 값으로 이루어진 점은 안정하다고 한다. 그러나 각 δ 와 ε 값에 대해 한정되지 않은 해(unbounded solution)가 존재하면 그 값으로 이루어진 점은 불안정이라고 한다. 안정되지 않는 해는 두 가지 형태로 분류될 수 있다. 한 형태는 크기를 갖고 변동하나 시간에 따라 지수적으로 증가하는 경우이고, 다른 한 형태는 변동하지 않고 시간에 따라 지수적으로 증가한다.

Floquet 이론을 적용하여 안정성 해석을 하기 위하여 2 차 상미분방정식인 식 (2)를 상태벡터 (state vector)를 이용하여 1 차 상미분방정식으로 변환한다. 즉 $\dot{x} = y$ 로 치환하면, 식 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta + \varepsilon \cos t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

식 (3)를 $\dot{u}(t)$ 에 대해 정리하면 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{u}(t) = F(t)u(t)\,. \tag{4}$$

여기서

$$u(t) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},\ F(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta + \varepsilon \cos t & 0 \end{bmatrix}.$$

식 (2)는 2 차 선형 미분방정식이므로 일반해 $x(t)$ 를 서로 독립적인 두 개의 기본해 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 선형 조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\,, \tag{5}$$

여기서, c_1 과 c_2 는 상수이다.

† 교신저자; 정회원, 강릉원주대 기계자동차공학부
E-mail : pci@gwnu.ac.kr
Tel : 033-760-8723, Fax : 033-760-8721

기본해 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 가 식 (2)의 해일 때, 시간 T 가 지난 후의 함수 $x_1(t+T)$ 과 $x_2(t+T)$ 도 식 (2)의 해이다. 함수 $x_1(t+T)$ 과 $x_2(t+T)$ 과 식 (2)의 해이기 때문에 다음과 같이 기본해 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

$$u(t+T) = Au(t). \qquad (6)$$

여기서 $u(t)$ 와 A 는 다음 식으로 정의된다.

$$u(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

벡터 $u(t)$ 를 모달행렬로 좌표 변환하여 얻어진 새로운 벡터를 적용할 수 있다. 이 관계를 이용하여 행렬 A 의 변환된 행렬이 얻어지며 이 행렬은 A 와 같은 고유치로 이루어진 대각행렬로 나타낼 수 있다[(2)].

또한 이 형태는 식(4)를 수치 적분하여 시간 $t+T$ 일 때의 $u(t+T)$ 를 구하면 식(6)과 같은 관계가 된다. 주기 T 에 대하여 식(6)의 관계를 반복해서 적용하면, 초기조건에 무관하고 두 연속적인 주기 (n-1)T 와 nT 의 해를 연결시키는 monodromy 행렬 R 이 존재한다.

$$u(t+nT) = Ru(t+(n-1)T). \qquad (7)$$

행렬 A 와 행렬 R 의 고유치는 서로 같기 때문에 Floquet 이론을 사용하여 응답의 안정성을 판별하려면, 식 (6)에 표현되는 관계식을 얻고 난 후에 행렬 A 의 고유치를 구하고 모든 고유치의 절대값이 1 보다 작은지 아닌지를 판별 한다. 모든 고유치가 1 보다 작으면 응답은 안정하고 하나라도 1 보다 크면 불안정하다.

3. 해 석

위에서 설명한 Floquet 이론으로 Mathieu 식에 적용하여 안정성을 계산하였다. 수치적분 법은 오일러 법을 사용하였고, Matlab 으로 프로그램하였다. 그 결과는 Fig. 1 에 Mathieu 식으로 행렬 A 의 고유치를 계산해 $\delta-\varepsilon$ 평면에 안정한 구역을 o 으로 표시하였고, 불안정한 구역은 흰 여백으로 남아있다. 이 결과의 검증을 위하여 Mathieu 식의 안정성에 관한 근사식[(1)]을 그림에 같이 도시하였다. 이 근사식은 ε 이 작은 구역에서 성립하는 안정성을 구분하는 식이다. 이 그림에서 수치해석 결과는 ε 이 크지 않는 구역에서 일치하므로 해석결과의 타당성이 입증된다.

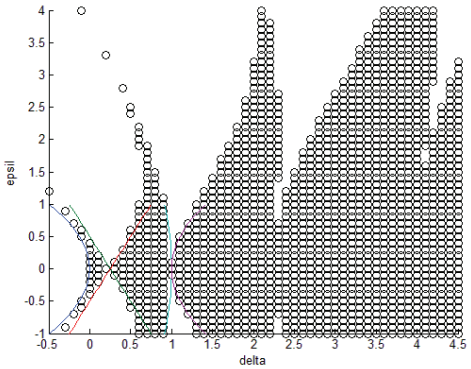

Fig.1 Stable and unstable region in the $\delta-\varepsilon$ plane

4. 결 론

이 연구에서는 Mathieu 식에 대해 Floquet식을 이용하여 안정석 해석을 하였다. 이를 위하여 식을 Floquet에 적용할 수 있도록 변환하여 수치해석으로 안정성 해석을 하였다. 얻어진 결과는 기존의 안정성 식과 일치하여 그 결과의 정확성을 확인하였다. 차 후 이 결과를 기어의 안정성 해석에 적용할 예정이다.

후 기

이 논문은 2012 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No.2012-0006878).

참 고 문 헌

(1) Stoker, J. J., 1950, Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, New York.

(2) Meirovitch, L., 1970, Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York.

(3) Kim, Wonsuk, Lee, Dong-Jin and Chung, Jintai, 2005, Three-dimensional modeling and dynamic analysis of an automatic ball balancer in an optical disk drive, Journal of Sound and Vibration. Vol. 285, pp. 547~569.