천수방정식에 대한 불연속 갤러킨 유한요소법의 적용
Application of Discontinuous Galerkin Method to Shallow Water Equations

이 해 균, 이 남 주*
단국대학교(천안), 경성대학교*

Lee Haegyun, Lee Nam-Joo*
Dankook Univ.(Cheonan), Kyungsung Univ.*

요약

빈발하고 있는 대규모 홍수와 자연재해는 정확도가 높은 하천 흐름 수치해석 모델에 대한 관심의 증대로 이어지고 있다. 현재 하천에서 발생하는 일반적인 흐름은 기존에 개발된 여러 형태의 천수방정식을 지배방정식으로 하는 수치기법에 의해 해석되고 있으나, 연속적이지 않은 형태의 흐름을 해석하거나 매우 정확한 해석을 필요로 하는 경우에는 기존의 수치해석기법은 많은 한계를 보여 주고 있다. 본 연구에서는 불연속 갤러킨 기법 기반의 흐름 모델을 개발하고, 이를 이용하여 천이류로 분류되는, 댐 붕괴파, 둔덕위 흐름과 2차원 사류의 모의에 적용하여 기존의 수치해와 잘 일치함을 확인하였다.

■ Keyword : 천수방정식, 불연속 갤러킨, 유한요소법, 천이류

I. 서론

1. 연구 배경

불연속 갤러킨 유한요소법의 천수방정식에 대한 적용의 첫시도는 Chavent와 Salzano(1982)에 의하여 시간적분에 Euler 기법을 적용한 것이다. 이후 공간 차분의 정확성에 상응하는 시간 적분의 정확도 향상에 대한 필요 때문에, 공간 차분에 불연속 갤러킨(DG) 기법과, 시간차분에 Runge-Kutta 기법을 결합한 Runge-Kutta 불연속 갤러킨 (RKDG) 기법으로 이론적인 발전이 이루어져, 역시 1차원, 2차원 천수방정식에 대하여 HLL 흐름률을 적용한 Schwanenberg와 Köngeter(2000)의 연구가 보고되었다. 본 연구에서는 1차원, 2차원 천수방정식에 적용이 가능한 RKDG 기법 모델을 개발하고 이를 천이류(transcritical flow)와 2차원 사류의 해석에 적용하였다.

2. 지배방정식과 수치해석 기법

수평방향에 비하여 연직방향의 길이가 작은 유체현상은 Navier-Stokes 방정식을 수심 연직방향으로 적분한 천수방정식 (shallow water equation)이 선호되고 있다.

불연속 갤러킨 기법에서 고차 정확도의 구현에는 수치적인 진동이 불가피하므로 이를 제한하는 기법이 필요하다. 특히 기울기가 큰 불연속 흐름 주위에서는 비현실적인 진동으로 인하여 때로는 안정성에 문제를 발생시키기도 한다. 이로 인하여 불연속 포착법 (discontinuity capturing) 또는 적절한 기울기 제한자(slope limiter)등이 적용되고 있으며, 본 연구에서는 minmod 기울기 제한자(slope limiter)를 사용하였다. 본 연구에서는 MUSCL minmod 기울기 제한자를 적용하였다.

Ⅱ. 본론

1. 댐 붕괴류(1차원) 모의

그림 1은 마찰이 없는 1차원 수평 하도에서 댐 붕괴류(dam- break flow)를 모의하기 위한 초기조건을 보인 것이다. 전체 -1,000 m에서 +1,000 m 구간을 400개의 격자로 나누었으며 ($\Delta x = 5\,\mathrm{m}$), 1차원 구간좌표의 원점인 $x=0$에 설치된 댐을 중심으로 상류 수심 10.0 m, 하류 수심 0.0001 m 의 수심을 유지하고 있다. 시간 $t=0$ 에 순간적으로 붕괴되는 상황을 가정하였다. 본 연구에서 개발된 모델에 의한 결과는 댐 붕괴류에 대한 천수방정식의 이론적인 해와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

2. 저면 지형 변화에 따른 1차원 천이류

그림 2는 마찰이 없는 1차원 하도의 천이류를 모의한 것이다. 바닥 저면의 하상고 변화는 다음과 같다.

$$z_b = \begin{cases} 5\sin^2\left[\dfrac{\pi(x-125)}{750}\right], & x \in [125, 875] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

하천은 폭이 1 m인 직사각형 하도를 가정하였으며, 유입 경계조건으로서 $x=0\,\mathrm{m}$에 수심 10.0 m와, 유량 20.0 m3/s를, 하류 경계 $x=1{,}000\,\mathrm{m}$에 수심 7.0 m를

부여하여 정상상태(steady state)에 도달할 때 계산을 수행하였다. 전체 영역을 40개의 요소로 나누어, 영역의 크기 $\Delta x = 25\,\mathrm{m}$가 되도록 하였다. 전 구간에 대하여 4차 오더(order)의 요소를 사용하였다. 수치모의는 전 구간에서 수심의 변화가 정해진 기준치 내에 도달했을 때를 정상상태 (steady state)로 보고, 중단하였다. 그림 2에 보인 바와 같이 에너지 방정식을 이용한 정확해, Meselhe 등 (1997)의 수치해와 비교하여 잘 일치하며, 도수 현상을 2개 요소 내에서 정확하게 모의하고 있음을 알 수 있다.

3. 단면 폭 축소흐름 - 사류 모의

그림 3은 단면의 폭이 0.6096 m (2 ft)에서 0.3048 m (1 ft)로 축소하는 수로의 흐름을 모의하였다. 모의는 실험 조건과 같이 유입 경계조건으로 수심 0.03048 m (0.1 ft), 유량 0.0408 m3/s (1.44 cfs)를 적용하여 유입 경계에서 Froude 수는 약 4에 달하는 사류 상태를 유지하게 된다. Manning 조도계수는 0.0107 s/m1/3을 수로면의 경사는 S0= 0.05664를 사용하였다. 수심평균 난류 동점성계수(ν_t) 값으로는 0.001 m2/s 를 사용하였다. 수치모의를 위하여 절점 수 11,228, 삼각형 요소 21,934 로 격자를 구성하였으며, 그림 3은 수면형의 분포로서 대체로 Ippen과 Dawson (1951)의 계측값과 일치함을 알 수 있다.

Ⅲ. 결론

댐 붕괴류, 보 월류 흐름의 모의 등의 천이류와 사류는 기존의 수치모형으로 정확하게 모의할 수 없는 어려움이 있었다. 본 연구에서는 최근 국내외에서 활발한 연구가 진행되고 있는 불연속 갤러킨 기법 기반의 유한요소법 모델을 개발하고 이를 1차원 천이류와 2차원 사류흐름에 적용하였다. 공간방향의 차분에는 개별요소 경계면에서 불연속을 허용하는 불연속 갤러킨 (DG) 기법을, 미분방정식의 시간적분에 Runge-Kutta 기법을 적용하는 RKDG 기법을 결합한 RKDG 기법을 천수방정식에 적용하였다. 또한, 고차 근사에서 흔히 발생하는 불필요한 수치적 진동을 제어하기 위하여 기울기 제한자를 적용하였다. 적용결과를 이론적인 해, 다른 수치 모의 결과와 비교하여 대체로 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

향후 단면 변화가 심한 자연하천을 대상으로 적용이 가능하도록 1차원 모형을 확장할 필요가 있으며, 이에 대한 연구 역시 진행중이다.

감 사 의 글

본 연구는 국토해양부 지역기술혁신사업의 연구비지원(과제번호# '08지역기술혁신 B-01)에 의해 수행되었습니다.

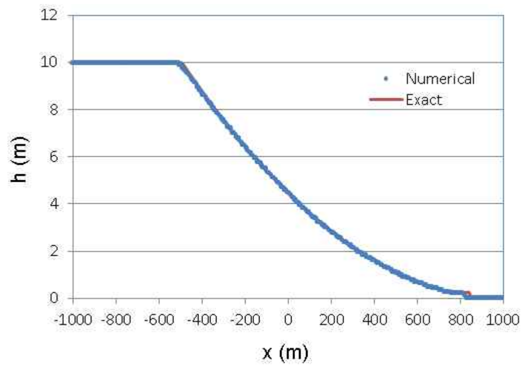
▌참 고 문 헌▌

[1] G. Chavent, G. Salzano, "A finite element method for the 1d water flooding problem with gravity", Journal of Computational Physics, Vol. 45, pp. 307-344, 1982.

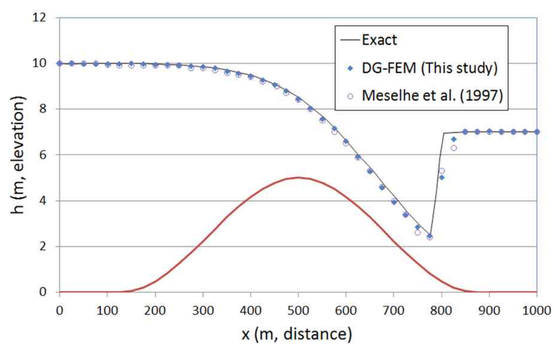
[2] A.T. Ippen, J.H. Dawson, "Design of channel contractions, High-velocity flow in open channels", A symposium. Transactions ASCE, Vol. 116, pp. 326-346, 1951.

[3] E.A. Meselhe, F. Sotiropoulos, F.M. Holly, "Numerical simulation of transcritical flow in open channels", Journal of Hydraulic Engineering, Vol.23, No.9, pp.774-782, 1997.

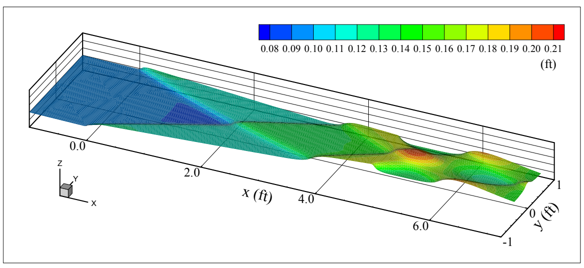
[4] D. Schwanenberg, J. Köngeter, "A discontinuous Galerkin method for the shallow water equations with source terms", in Discontinuous Galerkin Methods by Cockburn, Karniadakis and Shu (eds), 2000.



▶▶ 그림 1. 1차원 댐 붕괴류 모의(댐이 $t = 0$ sec에 붕괴시, $t = 50$ sec 일 때의 수심)



▶▶ 그림 2. 보 월류흐름(1차원) 모의



▶▶ 그림 3. 단면 폭 축소 흐름에서 수심 분포 (수심: ft)