

Supersonic biplane airfoil의 유동 특성에 대한 수치 해석적 연구

A numerical study of supersonic flow characteristics around biplane airfoil

박장호^{1*}한국과학기술원 항공우주공학과¹

초 록

현대에 이르러 초음속 운영 영역에서의 항공기에 대한 많은 연구가 진행되고 있으나, 음속 폭음 현상과 충격파 현상에서 야기된 높은 항력 및 연료 효율성 저하로 인하여 그 한계에 부딪치고 있다. Busemann 복엽 익형은 이와 같은 문제를 해결하기 위한 형상이며, 상하 형상에 의한 파동 상쇄효과 및 파동 감소 효과를 통해 충격파의 강도와 음속 폭음 효과를 감소시키는 형상이다. 하지만 본 익형은 탈설계 조건에서 항력 계수가 급격하게 증가하는 등의 문제점을 가지고 있다.

본 연구에서는 EDISON_CFD를 이용하여 Busemann 복엽 익형의 주변 유동 특성에 대하여 면밀한 고찰을 수행하였다. 우선 Busemann 복엽 익형의 초기 형상에 대한 유동 조건별 해석을 통하여 탈설계 조건에서의 항력 성능 저하 문제에 대한 고찰을 하였다. 이후 3개의 형상 변수에 대한 매개 변수 연구를 통하여 익형의 각 형상 변수가 탈설계 영역 및 해당 영역에서의 최대 항력 계수에 미치는 영향에 대한 고찰을 수행하였으며, 이를 통하여 기존 형상보다 좁은 탈설계 구간을 가지고, 최대 항력 계수가 약 34.8% 감소한 부스만 복엽 익형을 설계하였다.

Key Words : 압축성 공기역학(Compressible aerodynamics), 초음속 영역(Supersonic area), 익형(Airfoil), 매개변수 연구(Parametric study)

1. 서 론

20세기 후반, 현대인들의 생활 반경이 점점 광역화되어감에 따라 원거리를 단시간에 주파할 수 있는 고속 항공기에 대한 필요성이 대두되었다. 특히 1969년 취항한 초음속 여객기인 콩코드(Concorde)는 이러한 시대적인 필요성을 충족시킬 것으로 기대되었으나, 초음속 운용 영역에서 발생하는 다양한 유동 특성들에 대한 영향에서 비롯된 고질적인 문제들에 직면하여 2003년 퇴역하는데 이르렀다.

이러한 항공기는 음속 이상에서 발생하는 음속 폭음(Sonic boom) 현상과 천음속 이상의 유동에서 발생하는 충격파(Shock wave) 현상을 상시 수반한다. 이러한 유동특성은 소음 공해를 유발할 뿐만 아니라, 높은 항력 계수를 유발하는 원인이 되므로 운항 효율을 크게 저하시킨다.⁽¹⁾

이와 같은 문제를 해결하기 위하여 초음속 영역에 적합한 많은 익형이 연구되었다. 일반적으로 아음속 익형의 경우, 2차원 양력 이론에 따라, 앞전 흡입력을 조절하여 높은 압력 차이를 유발할 수 있는 일정한 곡률을 가지는 앞전(Leading edge)을 이용하지만, 이러한 형태의 익형이 초음속 영역에서 운용될 경우, 큰 항력을 야기하는 궁형 충격파(Bow shock)가 발생한다. 따라서 초음속 익형은 이를 배제하기 위해 Fig. 1과 같은 날카로운 앞전의 형상을 갖도록 설계된다.

그러나, 초음속 익형의 항력 계수나 양항비 등의 공력 성능은 대체로 아음속 익형에 비해 낮은 한계가 있다. 즉, 충격파가 발생하지 않는 유동에서 운용 시 나타나는 공력 성능 저하는 초음속 익형이 내포하는 큰 문제점 중 하나로 대두된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 초음속 유동 영역에서의 익형에 대한 많은 연구가 진행되었다.

Adolf Busemann이 제시한 복엽 익형(Biplane airfoil) 개념⁽²⁾은 상하 형상에 의한 파동 상쇄효과(Wave cancellation effect) 및 파동 감소 효과(Wave reduction effect)를 활용하여 충격파의 강도와 음속 폭음 현상을 감소시키는 개념이다. 하지만 Buseman 복엽 익형은 Fig. 3의 그래프와 같이 설계 조건보다 낮은 마하수, 즉 탈설계 조건(Off-design condition)에서 오히려 기존의 초음속 익형보다 더 높은 항력 계수를 가진다는 문제점을 가지고 있다.

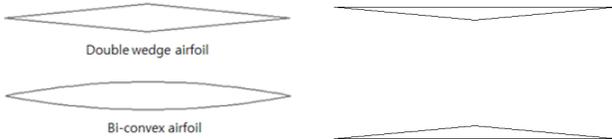


Fig. 1. 일반적인 초음속 익형 Fig. 2. 부스만 복엽 익형 형상

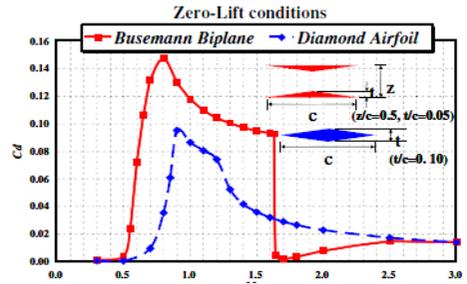


Fig. 3. 무양력 조건에서 다이아몬드형 익형과 초음속 복엽 익형의 마하수-항력 계수 그래프⁽⁴⁾

본 연구에서는 EDISON_CFD의 압축성 유동 해석자를 이용하여 Busemann이 제시한 익형의 주변 유동 특성에 대하여 면밀한 고찰을 수행하였다. 특히 각 유동 조건들에 대한 유동 해석과 체계적인 매개변수 연구(Parametric study)를 통하여 복엽 익형 이론을 물리적으로 고찰하였으며, 탈설계 조건에서 나타나는 항력 증가 문제점을 짚어 보았다. 또한 매개변수 연구를 통하여 얻은 형상 변수와 유동 특성간의 경향성을 통하여 최적화 설계를 수행하였다.

2. 초기 형상(Baseline) 형상 해석

2.1. 격자 및 계산 조건

Baseline의 CFD 해석을 위하여 Fig. 4와 같은 격자 형상이 생성되었다. 형상은 총 5개의 Multi-block으로 구성되었으며, 상하 각각의 익형 두께는 익형 시위길이의 0.05배, 두 익형 사이의 최대 간격은 0.5배이다. 또한 익형의 앞전에서 간격이 가장 좁은 구간까지의 거리는 0.5배이며, 상하의 익형은 대칭인 구조를 가진다. 이 때, 압축성 유동 해석임을 고려하여 초음속 복엽 익형의 경계 조건은 Inviscid wall로 설정되었다. CFD 해석에는 압축성 유동의 Multi-block용 해석자인 “2D_Comp-2.1_P”가 사용되었다. 본 해석자의 지배 방정식은 RANS(Reynolds-Averaged Navier-Stokes)이며, 정상 비점성 유동(Steady inviscid flow)을 가정하여 계산되었다. 수렴 오차는 10^{-6} , CFL는 마하수에 따라 0.1~3.0 사이의 범위에서 계산되었고, 최대 반복 계산 횟수는 50,000번, 수치 기법은 RoeM, 제한자는 Minmod, 시간 전진 기법은 LU-SGS로 설정되었다. 해석에 앞서 격자에 대한 조밀도 테스트(Grid test)를 진행하여 적절한 격자를 선정하였다. 그 결과 Fig. 5와 같은 격자가 생성되었다.

2.2. Baseline 해석 결과 및 고찰

Baseline의 EDISON_CFD 해석 결과, 마하수-항력 계수 그래프가 도출되었다. 이 그래프를 참고 문헌의 마하수-항력 그래프⁽⁵⁾와 비교한 결과, 일치함을 확인할 수 있었으며, EDISON_CFD가 Busemann 복엽 익형을 타당하게 해석하고 있음이 확인되었다.

마하수-항력 계수 그래프와 등고선(contour) 변화를 통하여 마하수에 따른 항력 계수의 변화를 4개 구간으로 나눌 수 있다.

첫 번째 구간은 항력 계수가 급격하게 증가하는 구간이다.(Mach 0.5 ~ 0.85) 이 때, 하단의 압력 계수 등고선을 살펴보면 유동이 익형의 좁은 구역을 지나면서 팽창파가 강하게 발생하여 익형의 뒤쪽의 압력이 급감한다.

두 번째 구간은 항력 계수가 서서히 감소하는 구간이다.(Mach 0.85 ~ 1.65) 항력 계수가 가장 클 경우(Mach 0.85), 강한 충격파로 인하여 익형의 앞전에 큰 압력 계수가 나타나며, 뒷전에는 팽창파로 인해 작은 압력 계수가 나타난다. 따라서 앞전과 뒷전의 압력 차이로 인해 큰 항력이 발생된다. 마하수가 커짐에 따라 압력 차이가 줄어들면서 항력 계수가 역시 감소하게 된다.

세 번째 구간은 설계 조건인 마하 1.7에 해당하는 구간이다. 이 때, 익형의 앞전에서 발생한 충격파가 익형의 좁은 구역과 만나면서 충격파를 상쇄시키는 팽창파가 발생한다. 이로 인하여 마름모 형태로 압력이 높아지는 구역이 익형 내부에 생성된다. 결과적으로 익형의 가장자리의 압력 계수가 낮아짐과 동시에, 익형 앞뒤의 압력 차이가 낮아져 매우 작은 항력 계수를 가진다.

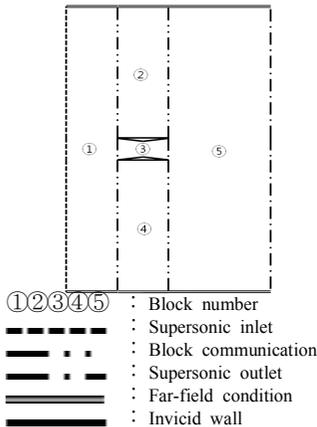


Fig. 4. Baseline 격자 형상 및 경계 조건

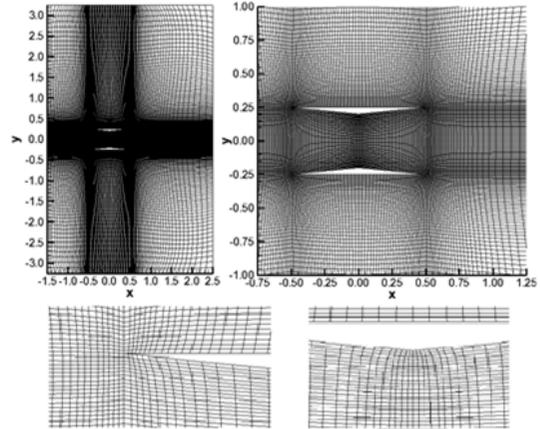


Fig. 5. 초기 형상의 격자

마지막 구간은 마하수가 증가함에 따라 항력 계수가 증가하기 시작하는 구간이다.(Mach 1.75 ~2.45) 익형의 앞전에서 발생한 충격파가 익형의 좁은 구역의 뒷부분까지 이어지며, 팽창파가 중첩하는 영역, 즉 압력 계수가 높은 영역이 익형의 뒷부분으로 이동한다. 이로 인하여 익형의 뒷전에 팽창파로 인하여 압력이 낮아지는 구역이 생성되고, 이는 익형의 항력 증가를 야기한다.

상기 해석을 통하여 익형의 앞전에서 발생하는 충격파와 익형이 좁아지는 영역에서 발생하는 팽창파에 의한 유동의 상호 작용으로 인하여 익형의 압력 계수 분포 및 항력 계수가 변하는 것이 확인되었다. 특히, 설계 조건보다 낮은 마하수에서 익형의 앞전에서 발생한 충격파로 인하여 항력 계수가 크게 증가하는 것을 확인되었으며, Busemann 복엽 익형의 항력을 최소화하기 위해선 형상의 변화를 통하여 앞전의 충격파와 뒷전의 팽창파의 간섭 효과를 적절하게 제어해야 함이 고려되었다.

3. 형상 변수에 대한 매개 변수 연구

상기 Baseline의 해석을 통해 마하수의 변화에 따라 복엽 익형의 형상에 의하여 상하의 익형 사이의 유동이 크게 변하는 현상과 이로 인해 항력 계수가 비선형적으로 증가 또는 감소하는 현상이 확인되었다. 이에 초음속 복엽 익형의 형상이 항력 계수에 주는 영향을 고찰하기 위하여 매개 변수 연구를 진행하였다.

3.1. 형상 변수 설정, 격자 생성 및 해석자 설정

Busemann 익형에서 형상이 유동 특성에 주는 영향을 고찰하기 위해 Fig. 6와 같이 3개의 형상 변수가 설정되었다. 익형의 앞전에서 익형의 좁은 구간까지의 거리(x_1), 상하 각각 익형의 두께(x_2), 상하 익형 사이의 거리(x_3)가 변수로 설정되었으며, Baseline을 기준으로 각각의 변수를 $\pm 10\%$ 씩 변화시키며 총 11개의 형상이 생성되었다. 매개 변수 연구에는 Baseline과 동일한 “2D_Comp-2.1_P” 해석자가 사용되었으며, 해석과 관련된 변수 등은 Baseline의 해석과 동일하게 설정되었다.

3.2. 연구 방법

상기와 같이 생성된 격자에 대하여 마하수 0.4에서 2.3까지의 범위에 대해 0.1의 간격으로 총 20번의 연산이 진행되었다. 이 결과를 통하여 각각의 형상에 대한 마하수-항력 계수 그래프를 도출하였으며, 그래프에서 최대 항력 계수와 탈설계 영역의 범위 등에 대한 비교를 수행하였고, 이를 통해 각각의 변수가 익형에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다.

3.3. 매개 변수 연구 결과 및 고찰

상기 계산 결과를 통하여 매개 변수 연구를 진행한 결과, 3개의 형상 변수(x_1 , x_2 , x_3)와 형상 변수에 의하여 결정되는 앞전과 뒷전의 각도(α , β)의 변화에 따른 마하수-항력 계수 그래프를 도출하였다. 또한 그래프의 변화 추이를 통하여 각각의 변수가 Busemann 복엽 익형의 성능에 미치는 영향을 고찰하였다.

3.3.1. 길이 변수에 따른 항력 계수 변화

익형의 앞전에서 익형이 좁아지는 구간까지의 거리(x_1)는 복엽 익형의 성능에 미치는 영향이 미미한 것으로 확인되었다. x_1 의 값이 증가함에 따라 항력 계수가 소폭 감소하는 경향성을 보였지만, 변화량이 매우 작아 익형의 성능 향상에 영향을 줄 수 있는 인자에서 제외되었다.

이에 반하여 익형의 두께(x_2) 및 상하 익형 사이의 거리(x_3)의 변화에 따른 결과에서는 익형의 성능에 크게 영향을 줄 수 있는 경향성이 나타났다. x_2 변수의 경우, Table 1과 Fig. 7의 결과와 같이 그 값이 감소함에 따라, 즉 익형의 두께가 감소함에 따라 탈설계 구간 및 탈설계 구간에서의 최대 항력 계수 값이 감소하는 경향성을 보였다. x_3 변수의 경우, Table 2와 Fig. 8의 결과와 같이 그 값이 증가함에 따라, 즉 상하 익형 사이의 거리가 증가함에 따라 탈설계 구간 및 탈설계 구간에서의 최대 항력 계수의 값이 감소하는 경향성을 보였다.

x_2 변수가 작아짐에 따라 최대 항력 계수의 값이 감소하고 탈설계 구간이 좁아지는 현상에는 크게 두 가지 원인이 있다. 첫 번째 원인은 익형이 유동을 통과하는 면적이 좁아짐에 따라 압력 항력(Pressure drag)이 작아졌기 때문이다. 두 번째 원인은 x_2 변수가 작아지면서, 앞전의 각도가 작아지고, 익형의 좁은 부분의 각도가 커진 형상에서 찾을 수 있다. 각도의 변화로 인하여 앞전에서 발생하는 충격파와 익형의 좁은 부분에서 발생하는 팽창파 세기가 작아졌으며, 이는 탈설계 구간이 좁아지고, 최대 항력 계수가 작아지는 현상의 원인이 되었다.

x_3 변수가 증가함에 따라 항력 계수의 값과 탈설계 구간이 작아지는 현상 역시 크게 두 가지 원인으로 설명된다. 첫 번째는 두 익형 사이의 거리가 멀어짐에 따라 반대쪽 익형에서 발생한 충격파 및 팽창파의 영향이 감소한 것이다. 두 번째는 익형 사이의 거리가 멀어짐에 따라서 더 낮은 마하수에서 충격파가 익형의 좁은 구간에 닿으며 설계 조건에 해당하는 마하수가 작아지게 되었고, 이로 인하여 탈설계 구간이 좁아진 것이다. 이 때문에 실제로 탈설계 영역이 시작하는 구간은 동일한 것을 확인할 수 있다. 하지만, 멀어진 익형 사이의 거리로 인하여 상하 익형 사이의 압력이 증가하는 구역 역시 커지게 되었다. 이 구역에서 발생한 팽창파의 영향으로 인해 설계 구간보다 더 높은 마하수에서는 익형 사이의 거리가 멀어짐에 따라 항력 계수가 오히려 증가하는 경향을 보인다.

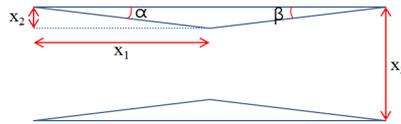


Fig. 6. 매개 변수 형상 변수

Table 1. x_2 변수에 대한 형상 변수 및 해석 결과

Case	x_1	x_2	x_3	α	β	$Max C_d$	Off-condition Range
-10%	0.5	0.04	0.5	4.57°	4.57°	1.0510×10^{-1}	M0.6 ~ M1.5
Baseline	0.5	0.05	0.5	5.71°	5.71°	1.4634×10^{-1}	M0.6 ~ M1.6
+10%	0.5	0.06	0.5	6.84°	6.84°	-	M0.5 ~ M1.7

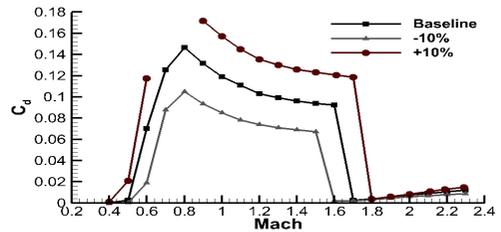


Fig. 7. x_2 변수에 따른 마하수-항력 계수 그래프

Table 2. x_3 변수에 대한 형상 변수 및 해석 결과

Case	x_1	x_2	x_3	α	β	$Max C_d$	Off-condition Range
-10%	0.5	0.05	0.4	5.71°	5.71°	-	M0.5 ~ M1.7
Baseline	0.5	0.05	0.5	5.71°	5.71°	1.4634×10^{-1}	M0.6 ~ M1.6
+10%	0.5	0.05	0.6	5.71°	5.71°	1.3328×10^{-1}	M0.6 ~ M1.5

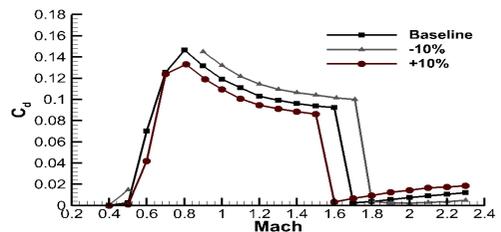


Fig. 8. x_3 변수에 따른 마하수-항력 계수 그래프

Table 3. α 변수에 대한 형상 변수 및 해석 결과

Case	x_1	x_2	x_3	α	β	Max C_d	Off-condition Range
$\alpha = 3.8^\circ$	0.6	0.04	0.5	3.81°	5.71°	1.0288×10^{-1}	M0.6 ~ M1.5
$\alpha = 5.7^\circ$	0.5	0.05	0.5	5.71°	5.71°	1.4634×10^{-1}	M0.6 ~ M1.6
$\alpha = 8.3^\circ$	0.4	0.06	0.5	8.53°	5.71°	-	M0.5 ~ M1.8

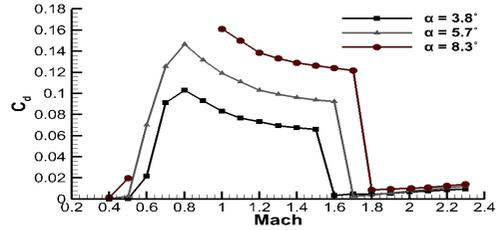


Fig. 9. α 변수에 따른 마하수-항력 계수 그래프

Table 4. β 변수에 대한 형상 변수 및 해석 결과

Case	x_1	x_2	x_3	α	β	Max C_d	Off-condition Range
$\beta = 3.8^\circ$	0.4	0.04	0.5	5.71°	3.81°	1.0680×10^{-1}	M0.6 ~ M1.5
$\beta = 5.7^\circ$	0.5	0.05	0.5	5.71°	5.71°	1.4634×10^{-1}	M0.6 ~ M1.6
$\beta = 8.5^\circ$	0.6	0.06	0.5	5.71°	8.53°	-	M0.5 ~ M1.7

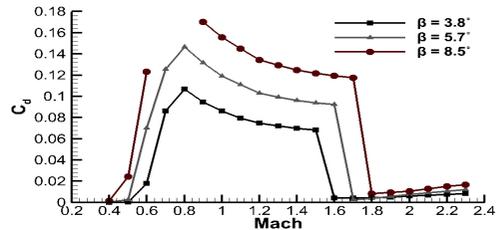


Fig. 10. β 변수에 따른 마하수-항력 계수 그래프

3.3.2. 각도 변수에 따른 항력 계수 변화

상기 길이 변수에 따른 항력 계수의 변화에서 익형의 두께(x_2)가 항력 계수 및 탈설계 구간에 큰 영향을 주는 변수임을 확인하였으며, 그 주된 원인으로 익형 앞전의 각도 변화에 따른 충격파의 세기 변화가 고려되었다. 이에 익형 앞전과 뒷전의 각도에 따른 항력 계수의 변화를 추가로 고찰하였다.

앞전의 각도(α)의 경우, Table 3 및 Fig. 9의 결과와 같이 그 값이 감소할수록, 탈설계 구간 및 최대 항력 계수가 작아지는 경향성을 보였다. 또한 뒷전의 각도(β)의 경우 역시, Table 4 및 Fig. 10의 결과와 같이 그 값이 감소할수록, 탈설계 구간 및 최대 항력 계수가 작아지는 경향성을 보였다.

α 의 값이 작아질 경우, 익형의 앞전에서 발생하는 경사 충격파(oblique shock)의 세기가 작아진다. 또한 α 의 값이 감소하면서 β 의 값이 일정할 경우, 팽창파가 발생하는 익형 좁은 부분의 각도가 커지게 되면서 팽창파의 세기 역시 작아진다. 이로 인하여 익형 앞전과 뒷전의 압력 분포의 차이가 줄어들게 되고, 최대 항력 계수가 감소한다. 또한 α 의 값이 작을수록 경사 충격파의 각이 감소하면서, 팽창파의 중첩 구간이 더 낮은 마하수에서 생성된다. 이로 인하여 설계 조건에 해당하는 마하수가 더 낮은 조건에서 생성되며, 이는 탈설계 조건 구간의 감소를 야기한다.

β 의 값이 작아질 경우에도, α 의 값이 일정할 때, 팽창파가 발생하는 익형의 좁은 부분의 각도가 커지게 된다. 이로 인하여 팽창파의 세기가 작아지면서 최대 항력 계수가 감소한다. 또한 α 의 값을 일정하게 유지하면서 β 의 값이 감소하면 익형의 두께가 얇아지게 되며, 이는 압력 항력의 감소로 이어지게 되어 모든 마하수에 대하여 항력이 감소하는 효과를 야기한다.

상기 고찰 결과, Busemann 복엽 익형의 성능에 영향을 주는 변수는 익형의 두께와 두 익형 사이의 거리, 익형을 형상을 구성하는 각도임이 확인되었다. 특히 이들 변수 중 익형의 두께 및 익형의 형상 각도에 따라 최대 항력 계수 및 탈설계 구간이 크게 변화하였으며, 이에 대한 뚜렷한 경향성을 가졌다. 이에 본 연구에서는 상기 고찰 결과에서 얻은 경향성을 통하여 3개의 변수 조합으로 구성된 격자 중 항력 성능의 좋을 것으로 예상되는 Busemann 복엽 익형의 형상에 대한 CFD 계산을 수행하여 Baseline 형상과 비교하였다.

3.4. 매개 변수 연구를 통한 최적화

Fig. 11는 매개 변수 연구를 통하여 최적화된 Busemann 복엽 익형의 형상이다.(점선은 Baseline의 형상을 의미한다.) Table 5과 Fig. 12의 결과와 같이 최적화된 형상은 Baseline 형상과 비교하였을 때, 최대 항력 계수가 약 34.8% 감소하였으며, 탈설계 구간 역시 마하 0.6~1.6에서 마하 0.6~1.4로 감소하였다. 단, 상하 익형간의 거리가 증가한 요인으로 인하여 설계 조건 이후의 항력 계수는 소폭 증가하였으나, 탈설계 구간에서의 항력 감소를 고려하였을 때, 수용할 수 있는 증가폭이다.



Fig. 11. 최적화된 부스만 익형 형상

Table 5. 최적화 익형의 형상 변수 및 해석 결과

Case	x_1	x_2	x_3	α	β	Max C_d	Off-condition Range
Baseline	0.5	0.05	0.5	5.71	5.71	1.4634×10^{-1}	M0.6 ~ M1.6
Optimum	0.6	0.04	0.6	3.81°	5.71°	9.5474×10^{-2}	M0.6 ~ M1.4
Diamond	-	-	-	-	-	9.5491×10^{-2}	-

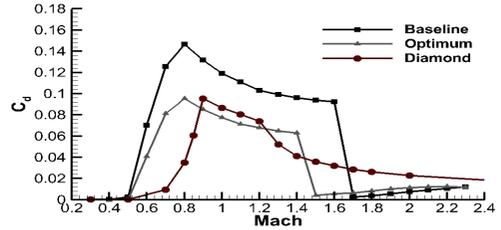


Fig. 12. 최적화 익형의 마하수-항력 계수 그래프

Fig. 12에서 기존의 다이아몬드형 익형과 비교한 결과, 최적화된 복엽 익형은 최대 항력 면에서 거의 동일한 성능을 가지고 있는 것으로 계산되었으며, 일부 탈설계 구간에서도 기존의 익형보다 더 낮은 항력 계수를 가지는 것이 확인되었다.

결론

본 연구에서는 Busemann 복엽 익형의 CFD 해석을 통하여 해당 익형이 가지는 탈설계 조건에서의 항력 성능 저하에 대한 원인을 고찰하였다. 그 결과, 탈설계 영역에서의 높은 항력 계수는 Busemann 복엽 익형의 형상으로 인한 충격파와 팽창파의 중첩에서 기인되었다는 결론을 얻었다. 이에 초음속 복엽 익형의 형상 변수 중 높은 항력 계수에 영향을 주는 변수에 대한 연구를 위하여 3개의 형상 변수에 대한 매개 변수 연구를 진행하였으며, 그 결과, 익형의 두께, 상하 익형 사이의 거리 및 익형 앞전과 뒷전의 각도가 탈설계 조건에 영향을 준다는 결론을 얻었다. 이 때, 각 변수가 익형의 성능에 미치는 영향에 대한 경향성을 찾을 수 있었으며, 이를 통하여 기존 형상보다 향상된 항력 성능을 가지는 형상을 설계하였다.

본 연구의 한계점은 무양력 조건에서의 해석에 머물렀다는 점이다. 초음속 영역에서의 비행은 충격파를 수반하게 되며, 충격파는 형상의 각도에 민감한 반응을 가진다. 따라서 익형이 받음각을 가지는 조건의 경우, 상기 해석 결과와 다른 유동 특성이 발생할 것으로 예상되며, 향후 Busemann 복엽 익형의 양력 조건에 대하여 매개 변수 연구가 이루어질 것이다.

또한 최근 연구되는 Busemann 복엽 익형의 경우, 탈설계 영역에서의 항력 성능 저하를 해결하기 위하여 마하수에 따라 익형은 변형할 수 있는 힌지(Hinge)를 만드는 등 4개 이상의 많은 형상 변수를 이용한 최적 설계가 이루어지고 있다.⁽⁴⁾ 따라서 최적화 알고리즘 등을 통한 Busemann 복엽 익형의 다점 최적 설계 역시 향후 이루어질 것이다.

참고문헌

- (1) John D. Anderson, 2002, "Modern compressible flow", 3rd edition, McGraw-Hill, New York
- (2) Busemann, Adolf, 1935, Aerodynamic Lift at Supersonic Speeds, No. 6, 12th edition, Luftfahrtforschung, pp. 210-220.
- (3) Rui Hu, January 2011, Adjoint Aerodynamics Optimization of Supersonic Biplane Airfoil, 49th AAIA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA 2011-1248
- (4) Kusunose, K., Matsushima, K., Maruyama, D., 2011, "Supersonic Biplane," Progress in Aerospace Sciences, Vol. 47, No. 1, pp. 53-87.