

# 역해석에 의한 열전도율 및 확산율 예측

나재정\* · 이정민\* · 강경택\*

## Estimation of Thermal Conductivity and Diffusivity by an Inverse Analysis

Jae Jeong Na\* · Jung Min Lee\* · Kyung Taik Kang\*

### ABSTRACT

The objective of this study is the estimation of the two unknown thermal conductivity and thermal diffusivity by an inverse heat conduction analysis using the Levenberg-Marquardt method. One dimensional formulation of heat conduction problem in the model was applied. Two point transient temperature of test pieces and heat flux of inflow were measured under the high enthalpy flow environment. Estimated thermal conductivity and thermal diffusivity by an inverse analysis were compared with the known values of graphite test piece. It showed the effectiveness of proposed experimental inverse analysis.

### 초 록

본 논문에서는 미지의 두 열물성 값인 열전도율과 열확산율을 구하기 위하여 Levenberg-Marquardt 방법에 의한 역해석 기법을 도입하였다. 일차원 열전도 문제에 대하여 연산식을 유도하였으며, 시편에 대하여 두 지점의 온도 및 입력유동의 열유속 측정값을 적용하였다. 예측된 열전도율 및 열확산율은 알려진 그래파이트 시편에 대한 열물성 값과 비교하였으며 그 결과 본 논문에서 제시된 역해석 예측 기법 실험의 유효성이 파악되었다.

Key Words: Inverse Analysis(역해석), Heat Conduction(열전도), Thermal Conductivity(열전도율), Thermal Diffusivity(열확산율), Heat Flux(열유속)

### 1. 서 론

기체구조에 사용되어지는 재료의 대표적인 열물성 값인 열전도율(Thermal Conductivity)과 비

열(Specific Heat) 혹은 열확산율(Thermal Diffusivity)은 알려진 값들을 활용하거나 일반적으로 잘 알려진 열분석 장비에서의 측정을 통해 구할 수 있다. 그러나 이들 열물성 값 중 일부를 알 수 없는 경우 혹은 유동 간섭 현상 등의 특정 환경으로 인해 열분석 장비에 의한 측정이 곤란한 경우 여타 측정 가능한 매개변수로부터

\* 국방과학연구소 1-5

† 교신저자, E-mail: njj7284@add.re.kr

이를 예측할 수 있어야 한다.

이들 열물성 값 중 일부가 미지수이거나 측정이 곤란한 경우 측정 가능한 경계조건이나 초기 조건으로부터 이를 예측하기 위한 방법으로 다양한 역열전도 해석 문제(IHCP, Inverse Heat Conduction Problem)가 다루어지고 있다[1].

본 논문에서는 공력가열 환경에서 미지의 매개 변수인 열전도율과 열확산율을 구하기 위하여 Levenberg-Marquardt 방법[1]에 의한 역해석 기법을 도입하였다. 두께가 수 mm 내외인 실제 기체 구조 환경을 고려하여 온도 측정 점의 수를 시편 뒷면과 내부 한 개의 지점으로 최소화한 실험조건에서 역해석 기법의 유효성을 파악하였다.

## 2. 열전도 모델

미지의 열물성 값을 역해석 예측하기 위해 본 논문에서 적용한 열전도 모델을 Fig. 1으로 나타내었다.  $x = 0$ 인 전면에서 일정한 열유속(Heat Flux)  $q$ 가 가해지는 공력가열 환경으로 시편 내부에 열분해 및 전면에서의 표면 화학 반응에 의한 형상 변화가 없는 일차원 고체로 가정하였다. 시편의 초기 온도는  $T_0$ 이며  $x = l$ 인 후면은 단열 경계조건이다.

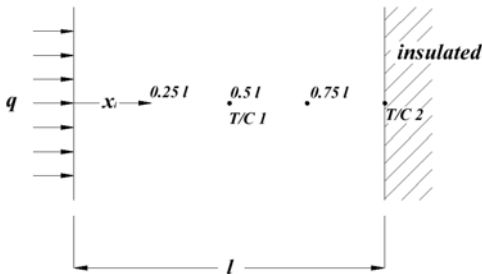


Fig. 1 Geometry and thermocouple locations

소재 내부의 열분해 및 형상변화를 무시할 수 있는 겨우 천이상태에서의 1차원 열전도 문제는 다음과 같은 지배방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1a)$$

in  $0 < x < l$ , for  $t > 0$

경계조건은 다음과 같다.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q \quad \text{at } x = 0, t > 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = l, t > 0 \quad (1c)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$T = T_0 \quad \text{for } t = 0 \quad (1d)$$

열확산계수  $\alpha$ 는 다음 식으로 정의된다.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (1e)$$

위와 같이 경계조건, 초기조건, 및 소재의 열물성 값 등 매개변수를 알고 있다면, Eq. 1으로 정의된 열전도 방정식의 직접해로부터 재료 내의 위치와 시간에 따른 온도 분포  $T(x, t)$ 를 구할 수 있다. 역열전도 해석 문제(IHCP, Inverse Heat Conduction Problem)는 이들 매개변수 중 일부가 미지수이거나 측정이 곤란한 경우의 문제이다. 본 논문에서는 공력가열 환경에서 미지의 매개변수인 열물성 계수  $\alpha(T)$  및  $\kappa(T)$ 를 구하기 위한 역해석 예측 기법 실험의 유효성을 파악하기 위하여 실험에 의한 온도 및 열유속(Heat Flux) 측정값을 적용하였다.

## 3. 온도 및 열유속 측정

본 연구에서 슬러그형 구리 칼로리미터(Slug Type Copper Calorimeter)를 사용한 열전달 방법(Heat Transfer Method)[2]을 적용하여 열유속  $q$ 를 측정하였다. 소위 차가운 벽 정체점(Cold-wall Stagnation Point) 열전달량 측정 방

범으로 평면의 디스크 형상을 갖는 직경 0.005m, 두께 0.01m 인 OFHC(Oxygen Free High Conductivity Copper) 소재의 슬러그(Slug)를 사용하였다. 측정된 슬러그 뒷면  $x=l$ 인 점의 천이 온도구배(Transient Temperature Profile)로부터 열전달량을 계산하였다. 그 결과 전면 열유속은  $1.489 \cdot 10^7 \text{W/m}^2$ 으로 측정되었다. 측정된 열량계 천이온도는 Fig. 2와 같다.

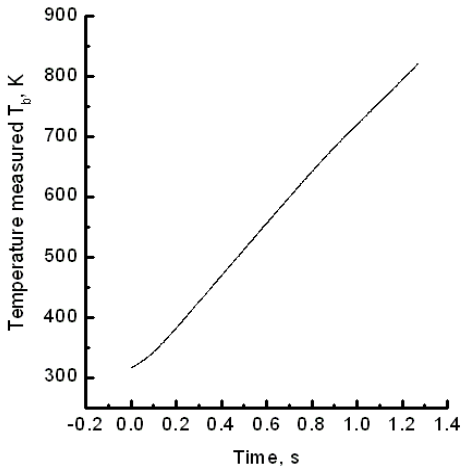


Fig. 2 Measured copper slug temperature trace from back-face thermocouple

열물성 역해석 예측을 위한 온도 측정 소재로는 그라파이트(ATJ Graphite)를 사용하였다. 열분해 현상을 배제하고 동일한 열입력 조건을 적용하기 위하여 선정하였으며 열량계와 동일한 형상을 적용하였다.

열물성 예측을 위한 천이 온도는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 시편 뒷면과 내부에 Cr-Al 열전대(Thermocouple) T/C 1, 2를 장착하여 측정하였다.

시편 온도 측정 시 뒷면까지 열입력이 침투되기에 충분한 시간을 고려하여야 한다. 시편 뒷면까지의 침투시간은 열전도 지배방정식 Eq. 1의 직접해로부터 시편 뒷면 온도에 대한 도함수(derivative)를 구하고 이를 0으로 놓음으로써 구할 수 있다. 적용된 관계식은 다음과 같다.

$$t_p = \frac{l^2}{\alpha \pi^2} \ln(2) \quad (2)$$

여기서  $t_p$ 는 침투시간이며  $\alpha$  값은 초기조건에서의 온도를 적용하였다.

#### 4. 역열전도 해석

열전도 지배방정식 Eq. 1은 온도를 종속변수로 하는 두 개의 미지수  $\alpha(T)$  및  $\kappa(T)$ 를 포함하고 있다. 본 논문에서 이들 미지 계수를 측정된 두 점 TC 1, 2에서의 온도 및 전면 열유속  $q$ , 입력 조건으로부터 역열전도 해석 기법을 적용하여 예측한다.

미지의 열물성 벡터  $\mathbf{P} = [P_1, P_2]^T = [\alpha, \kappa]^T$ 를 예측하기 위한 역열전도 해석 해는 다음의 최소자승법(ordinary least squares norm)을 최소화하는 것이다.

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(\mathbf{P})]^2 \quad (3)$$

여기서  $I$ 는 온도 측정 센서의 수,  $Y_i \equiv Y(t)$ 는 시간  $t$ 일 때의 측정 온도,  $T_i(\mathbf{P}) \equiv T(\mathbf{P}, t)$ 는 시간  $t$ 일 때의 예측 온도이다. 예측 온도  $T_i(\mathbf{P})$ 는 미지의 열물성 매개변수  $\mathbf{P}$ 의 예측 값을 사용하여 측정 위치  $x$ 에 대한 열전도 지배방정식 Eq. 1의 직접해로부터 구한다.

Equation 2로 정의된 함수  $S$ 를 최소화하는 매개변수  $\mathbf{P}$ 는 다음의 비선형 관계식을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial S(\mathbf{P})}{\partial P_j} = 2 \sum_{i=1}^I \left( \frac{\partial T_i(\mathbf{P})}{\partial P_j} \right) [Y_i - T_i(\mathbf{P})] = 0 \quad (4)$$

여기서 감도(sensitivity) 혹은 행렬(Jacobian matrix),  $\mathbf{J}(\mathbf{P})$ 를 다음 식으로 정의한다.

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \quad (5)$$

감도 계수  $J_{ij}$ 는 시간  $t$ 에서 미지의 매개변수  $P_j$ 에 대한 예측 온도  $T_i(\mathbf{P})$ 의 1차 도함수이다. 감도 행렬 정의에 의해 Eq. 3은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-2\mathbf{J}^T(\mathbf{P})[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})] = 0 \quad (6)$$

비선형 역해석 문제의 경우, Eq. 5의 해를 구하기 위해서는 반복연산(iteration) 과정이 필요하다. 반복연산에서는 연산 과정 지표(iteration index)  $k$ 에서 주어진 해  $\mathbf{P}^k$ 에 대하여 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)함으로써 예측 온도 벡터  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ 를 다음과 같이 선형화하여 구한다.

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{P}^k) + \mathbf{J}^k(\mathbf{P} - \mathbf{P}^k) \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{T}(\mathbf{P}^k)$ 와  $\mathbf{J}^k$ 는 각각 반복연산 과정  $k$ 에서의 예측온도와 감도 행렬이다.

Equation 6을 Eq. 5에 대입하면 미지의 매개변수 벡터  $\mathbf{P}$ 를 구하기 위한 다음과 같은 반복연산식이 얻어진다.

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + [(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T \mathbf{F} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{F} = [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)]$ 이다.

역열전도 해석 문제는 일반적으로 Eq. 8에서  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$ 의 불량조건(ill-conditioned)을 갖는다. 본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위하여 Levenberg-Marquardt 방법[1]에 의한 다음과 같은 반복 연산식을 적용하였다.

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + [(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + \mu^k \Omega^k]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T \mathbf{F} \quad (9)$$

여기서  $\mu^k$ 는 감쇄 매개변수(damping

parameter)이다.  $\Omega^k$ 는 대각행렬(diagonal matrix)로 다음 식을 적용하였다.

$$\Omega^k = \text{diag}[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k] \quad (10)$$

본 논문에서 감도계수는 매개변수인 열전도율  $P_1 = \kappa$ 와 열확산율  $P_2 = \alpha$ 를 다음과 같이 중앙차분(central differences)으로 섭동(perturbing)시켜 구하였다.

$$J_{i1} \cong \frac{T_i(P_1 + \epsilon P_1, P_2) - T_i(P_1 - \epsilon P_1, P_2)}{2\epsilon P_1} \quad (11a)$$

$$J_{i2} \cong \frac{T_i(P_1, P_2 + \epsilon P_2) - T_i(P_1, P_2 - \epsilon P_2)}{2\epsilon P_2} \quad (11b)$$

Levenberg-Marquardt 연산식 Eq. 8의 수렴은 다음 식을 적용하였다[2].

$$S(\mathbf{P}^{k+1}) < \epsilon_1 \quad (12)$$

허용오차  $\epsilon$ 과  $\epsilon_1$ 은  $10^{-5}$  혹은  $10^{-6}$ 을 적용하였으며, 감쇄 매개변수 초기 추정값  $\mu^0$ 는  $10^{-3}$ 을 적용하였다.

위 역열전도 해석 문제(IHCP)의 해를 구하기 위한 연산 과정은 다음과 같다.

단계 1. Fig. 1의 열전도 모델에 대한 열유속  $q$ 와 온도  $Y_i$  측정.

단계 2. 시간  $t_n$ 에서 초기 예측값  $\mathbf{P}^k$ 와 Eq. 1의 직접해로부터 온도 벡터  $T_i(\mathbf{P}^k)$  계산.

단계 3. Eq. 3에 의한  $S(\mathbf{P}^k)$  계산.

단계 4. Eq. 11에 의한 감도계수  $\partial T_i(\mathbf{P})/P_j$  계산.

단계 5. Eq. 9에 의한  $\mathbf{P}^{k+1}$  계산.

단계 6. Eq. 1의 직접해로부터  $T_i(\mathbf{P}^{k+1})$  및 Eq. 3에 의한  $S(\mathbf{P}^{k+1})$  계산.

단계 7.  $S(P^{k+1}) \geq S(P^k)$ 의 경우  $\mu^k = 10\mu^k$ 로 대체하고 단계 5부터 반복연산.

단계 8.  $S(P^{k+1}) < S(P^k)$ 의 경우  $\mu^k = 0.1\mu^k$ 로 대체.

단계 9. 수렴조건 Eq. 12를 만족할 경우 연산 종료. 아닐 경우 단계 4부터 반복 연산.

단계 10. 시간  $t_{n+1}$ 에서의 연산 수행.

### 5. 결과

실제 비행체 구조에 사용되는 소재의 두께는 수 mm 내외이므로 온도 측정을 위한 열전대를 소재 내부에 여러 개 장착하는 데는 한계가 있다. 또한, 열전대 장착 구조가 소재 내부 열전도 현상에 영향을 주게 되므로 온도 측정을 위한 열전대 수를 최소화하여야 한다.

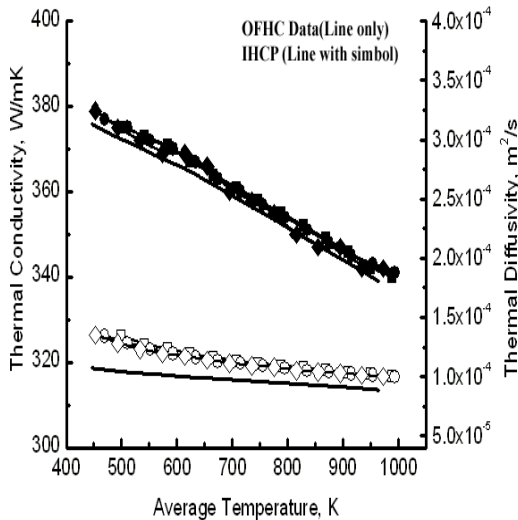


Fig. 3. Comparison of IHCP estimation of copper at the position  $x = 0.25l$ (■),  $0.5l$ (●),  $0.75l$ (◆)

본 연구에서는 시편 후면의 온도 측정 점을 고정하고 시편 내부에 1개의 열전대를 장착한 최소 측정 점의 경우 대한 실험을 수행하고 측정 결과를 적용하였다. 먼저 시편 내부 열전대의 위치를 결정하기 위하여 OFHC 소재의 열물성

값[3]과 직접해로부터 계산된 온도  $Y_i$ 를 이용하여 역해석 연산한 결과를 비교하였다.

두께  $l = 0.01m$ 인 시편에서 내부 열전대 위치  $x = 0.25l, 0.5l, 0.75l$ 일 때의 온도에 따른 역해석 예측 값과 OFHC 열물성 값 비교 결과를 Fig. 3으로 나타내었다. 열전대 위치가 후면에 가까워질수록 OFHC 값에 근접하는 경향을 보이는 하지만 열전도율의 예측 평균값은 오차  $0.2 \pm 0.15\%$ , 열확산율의 예측 평균값은 오차  $15.7 \pm 0.4\%$  범위에서 근소한 차이를 보였다. 그러나 각 위치에 따른 예측 값의 표준편차는 열전도율의 경우 11.8, 12.2, 12.5 W/mK 로 증가하였고, 열확산율 예측 값의 표준편차 역시  $1.037 \cdot 10^{-5}, 1.055 \cdot 10^{-5}, 1.061 \cdot 10^{-5} m^2/s$  로 증가하는 경향을 보였다.

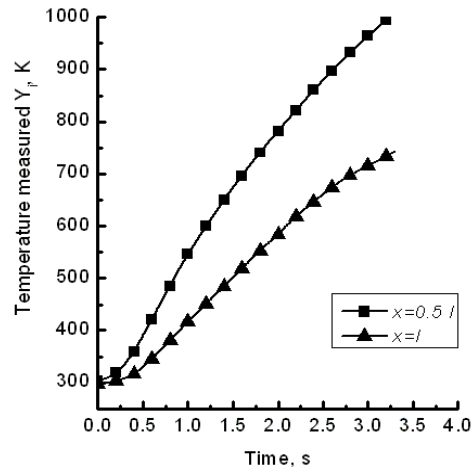


Fig. 4 Measured transient temperature  $Y_i$  of ATJ graphite(Input Data for IHCP Estimation)

이와 같은 예측 결과와 열전대 장착 시의 구조적 용이성을 고려하여 온도 측정용 열전대의 장착 위치는  $l = 0.01m$ 인 시편 후면과  $x = 0.5l$ 로 결정하였으며, 그라파이트(ATJ Graphite) 시편을 사용한 열물성 예측 실험에 적용하였다.

역해석 연산에 사용한 실험값은 Fig. 4에 나타

내었으며 열유속(Heat Flux)  $q = 1.489 \cdot 10^7$  W/cm<sup>2</sup>인 열유속 입력 조건에서의 온도 T/C 1, 2 측정값이다. 그래파이트 시편의 평균 밀도는 1,730kg/m<sup>3</sup>로 측정되었다.

본 연구에서는 시편 온도 측정 시 뒷면까지 열입력이 침투되기에 충분한 시간을 고려하고 열분해 혹은 표면 화학반응에 의한 시편 형상변화를 무시할 수 있는 범위로 측정 및 해석 시간을 한정하였다. 따라서 Fig. 4의 측정 온도값에서 역해석 연산에 사용된 온도는 측정시간 0.5에서 3.0s 범위로 설정하여 적용하였다.

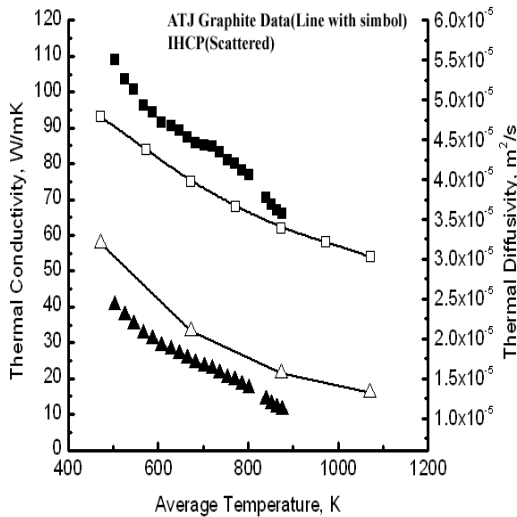


Fig. 5. Comparison of IHCP estimation of graphite:  $\kappa$  (■) &  $\alpha$  (▲)

ATJ 그래파이트 열물성[4,5]과 비교한 열전도율 및 열확산율의 역해석 예측 결과는 Fig. 5와 같다. 두 측정점의 평균 온도 503로부터 876K 범위에서 열전도도 및 열확산율의 예측 평균 값은 각각 85.3W/mK,  $1.683 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ , 표준편차는 각각 11.9W/mK,  $3.772 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 인 결과를 얻었다. 예측된 열전도율 및 열확산율은 알려진 ATJ 그래파이트 시편에 대한 열물성 값과 비교한 결과 측정 온도범위에서 열전도율의 평균값은 12%, 열확산율의 평균값은 19% 내의 오차범위

에서 역해석 예측 기법 실험의 유효성이 파악되었다.

## 6. 결론

공력가열 환경에서 미지의 열전도율 및 열확산율 값을 구하기 위하여 실험에 의한 역해석 예측 기법을 도입하였다.

일정한 열유속이 가해지고 뒷면을 단열 처리한 ATJ 그래파이트 시편에 대하여 온도 측정 점의 수를 뒷면과 내부 한 개의 지점으로 최소화한 실험조건에서 열전도율 및 열확산율을 시간의 함수로 예측하였다.

예측된 열전도율 및 열확산율은 알려진 열물성 값과 비교한 결과 열전도율은 12%, 열확산율은 19% 내의 오차범위에서 역해석 예측 기법 실험의 유효성이 파악되었다.

## 참고 문헌

1. Özisic, M. Necati, Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, 2000
2. ASTM E457-96, Standard Test Method for Measuring Heat-Transfer Rate Using a Thermal Capacitance(Slug) calorimeter, ASTM International, 2002
3. NIST Chemistry WebBook, <http://webbook.nist.gov>, National Institute of Standard and Technology, 2011
4. Thomas J. Horn and Amanle N. Abdelmesth, Experimental and Numerical Characterization of Steady State Cylindrical Blackbody Cavity at 1100 Degrees Celsius," NASA/TM-2000-209022, 2000
5. General Atomics for the Department of Energy, "Graphite Design Handbook," TDOE- HTGR-88111, 1991