한국컴퓨터정보학회 동계학술대회 논문집 제20권 제1호 (2012. 1)

Quasi 우도추정량을 이용한 환율, 금리, 주가지수에 대한 연구

김인규°
°우송정보대학 컴퓨터정보계열
e-mail:ikkim0056@wsi.ac.kr

Study for Exchange rate, Interest, Stock price Using Quasi-Likelihood Estimatorfor

Inkyu Kim°
°Division of Computer Information, Woosong Information College

● 요 약 ●

본 논문에서는 비선형 시계열 자료를 이용한 Quasi-Score 추정함수를 정의하고 Quasi-Score 추정함수로부터 얻은 추정량의 극한분포를 제시한다. 그리고 금융외환시장의 불확실성을 나타내는 환율, 금리, 주가지수 등의 연관성에 관한 시계열 모형을 수립하고 Quasi 우도추정법을 이용하여 모수추정을 실시한다.

키워드: Quasi-Score함수, RCA모형, ARCH모형, GARCH모형

I. 서론

시계열분석에 있어서 가장 중요한 점은 과거의 관찰값들로부터 미래를 예측하는 것이다. 미래를 예측하기 위해서는 관찰값에 적합한 모형을 수립하고 그 모형에 포함되어 있는 모수를 추정함으로써 미래값을 얻을 수 있다. 모수추정방법으로는 분포의 가정없이 단지 평균과 분산만을 알고 있을 경우 최우추정법과 같은 성질을 얻을 수 있는 추정법이 Quasi-Score함수를 이용한 추정법이다. 본 연구에서는 비선형 시계열모형에서 Wedderburn(1974)이 제안한 Quasi- Score추정함수를 정의하고 Quasi-Score추정함수로부터 얻은 추정량의 극한분포를 제시하고자 한다.

II. 관련 연구

2.1 Quasi 우도추정법

비선형 시계열모형에서 Quasi-Score추정함수를 정의하고 Quasi우도추정함수로부터 얻은 추정량에 대한 극한분포를 제시하고자 한다.

〈정의 2.1〉

비선형 시계열모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같이 정의한다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} g(X_t;\theta) \tag{2.1}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \left\{ \frac{X_t - \mu_t(\underline{X_{t-1}};\underline{\theta})}{v_t(\theta)} \right\} \frac{d\mu_t(\underline{X_{t-1}};\underline{\theta})}{d\theta}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \begin{bmatrix} g_1(X_t;\theta_1) \\ \vdots \\ g_p(X_t;\theta_p) \end{bmatrix},$$

여기서 $\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta}) = E(X_t|F_{t-1})$이고 $v_t(\theta) = Var(X_t|F_{t-1})$이다. 식(2.1)에서 $S_n(\theta)=0$을 만족하는 $\hat{\theta}_n$는 Quasi우도추정량이다. Quasi우도추정량에 대한 극한분포를 구하기 위해 다음과 같은 정규조건을 제시하고자 한다.

〈정규조건 1〉

(1) 시계열 $\{X_t\}$는 정상성과 에르고딕을 만족한다.

(2) $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$ 를 만족하는θ^*는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X_{t-1}};\underline{\theta})}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X_{t-1}};\underline{\theta})}{d\theta}\right)^T\right]\Bigg|_{\theta=\theta^*} \xrightarrow{p} F(\theta)$$

,

여기서 $F(\theta) = E\left[v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)^T\right]$이고 $F(\theta)$는 양정치(positive definite) 행렬이다.

(3) $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$ 를 만족하는 θ^*는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[h_t(\theta^*) - h_t(\theta)] \xrightarrow{p} 0 ,$$

여기서 $h_t(\theta) = \left[(X_t - \mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)) \frac{d}{d\theta} \left(v_t^{-1}(\theta) \frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{d\theta} \right) \right]$ 이다.

2.2 RCA(1) 모형

1차 확률계수 자기회귀(RCA(1))모형은 다음과 같다.

$$X_t = (\theta + Z_t) X_{t-1} + \epsilon_t \ .$$

RCA(1)모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu_t(X_{t-1};\theta)) v_t^{-1}(\theta) \frac{\partial \mu_t(X_{t-1};\theta)}{\partial \theta} \qquad (2.2)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{Z_t X_{t-1} + \epsilon_t}{\sigma_z^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2} X_{t-1}.$$

여기서 식(2.2)에서 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 Quasi우도추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_n = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_t X_{t-1}}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_z^2 X_{t-1}^2} \right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_{t-1}^2}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_z^2 X_{t-1}^2} \right).$$

그리고 Quasi우도추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \ \frac{1}{E\left[\frac{X_{t-1}^2}{\sigma_z^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2} \right]} \right)$$

2.3 ARCH(1) 모형

1차 조건부 이분산 자기회귀(ARCH(1))모형은 다음과 같다.

$$X_t = \theta X_{t-1} + \epsilon_t$$

$$E(\epsilon_t | F_{t-1}) = 0$$

$$Var(\epsilon_t | F_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2.$$

ARCH(1)모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu_t(X_{t-1};\theta) v_t^{-1}(\theta)) \frac{\partial \mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial \theta} \qquad (2.3)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{\epsilon_t X_{t-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2}.$$

즉, 식(2.3)에서 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 Quasi우도추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_n = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_t X_{t-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2} \right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2} \right).$$

그리고 Quasi우도추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \ \frac{1}{E\left[\frac{X_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2} \right]} \right).$$

III. 결론

환율등락률, 금리등락률, 주가수익률에 대한 정규성 검정을 실시한 결과 유의하지 않음을 알 수 있었다. 따라서 모수추정 방법으로 최우추정법을 사용하는 것은 이론적인 오차보다도 더 많은 오류 가능성을 내포할 수 있으므로 분포의 가정없이 사용할 수 있는 Quasi우도추정법을 사용하여 모수를 추정하였다. Quasi-Score추정함수를 비선형 시계열모형에 정의하여 Quasi우도추정량을 구하였으며 Quasi우도추정량이 근사적으로 정규분포를 따름을 증명하였다. 본 연구에서 제시한 Quasi우도추정법은 기존의 조건부 최소제곱추정법보다 효율적인 추정량을 얻을 수 있으므로 우수한 추정법임을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008.

[2] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction, *Lecture Note in Statistics No 11*, *Springer*, New York.

[3] Wedderburn, R. P. M. (1974). Quasi-likelihood functions, generalized linear models and the Gauss-Newton method. *Biometrika* 61, 439-447.