

바퀴형 역진자 시스템의 T-S Fuzzy Modeling에 관한 연구

이승택, 이동광, 곽균평, 박승규  
 창원대학교 전기공학과

Study on the T-S Fuzzy Modeling in Cart-Type Inverted Pendulum System

Seung-Taek Lee, Dong-Kwang Lee, Gun-Pyong Kwak, Seung-Kyu Park  
 Changwon National University

**Abstract** - 제어를 할 때 비선형 시스템을 선형화 하는 것이 중요하다. 선형화를 하기위해서는 퍼지 모델을 사용하는데 그 중 바퀴형 역진자 시스템은 비선형 시스템의 파라미터 값을 모두 알아도 T-S퍼지를 기반으로 하여 선형제어를 사용하는데 어려움이 있다. 그래서 Identification을 함으로써 바퀴형 역진자 시스템을 좀 더 편리하게 T-S 퍼지 모델로 만들 수 있다.

1. 서 론

역진자 시스템은 말 그대로 진자를 뒤집은 상태의 시스템을 뜻하며, 이 시스템은 비선형 시스템이다. 비선형은 불안정한 시스템으로 제어기법의 성능 평가하는데 활발하게 이용되고 있으며, 어떤 입력을 넣어 우리가 원하는 상태를 유지하도록 제어기를 설계하는 방법을 논문 및 다양한 연구의 용도로 많이 사용되고 있다.[1][2]

역진자의 비선형 시스템은 복잡한 비선형요소를 표현하기가 어려워 이를 좀 더 쉽게 제어할 수 있는 여러 기법 가운데 지능형 제어인 퍼지 제어기법 중 T-S 퍼지 제어 기법을 사용하면 불확실성을 갖는 시스템을 표현하는데 효율적으로 나타낼 수 있다.[3]

본 논문의 바퀴형 역진자 시스템은 파라미터 값을 알고 있어도 선형화하여 T-S퍼지 모델로 만들기가 어렵다. 그래서 Identification을 통해 비선형 시스템을 선형화 하여 좀 더 편리하고 정확도가 높은 T-S 퍼지 모델로 만들 수 있다.[4]

2. 바퀴 형 역 진자 모델

본 논문에서 고려하는 바퀴 형 역 진자 시스템의 방정식은 다음과 같다.[2]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, & \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1.5K_m K_g (J+ml^2)}{R_m r} V - (ml)^2 g \sin\theta \cos\theta \\ & \quad - \frac{(J+ml^2)(M+m) - (ml)^2 \cos^2\theta}{f_p ml \dot{\theta} \cos\theta + ml(J+ml^2) \sin\theta \dot{\theta} - (f_c + \frac{1.5K_m^2 K_g^2}{R_m r^2})(J+ml^2) \dot{x}} \\ & \quad + \frac{(J+ml^2)(M+m) - (ml)^2 \cos^2\theta}{- \frac{1.5K_m K_g ml \cos\theta}{R_m r} V - (ml)^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta} \\ \dot{x}_4 &= \frac{(J+ml^2)(M+m) - (ml)^2 \cos^2\theta}{(f_c + \frac{1.5K_m^2 K_g^2}{R_m r^2}) ml \cos\theta \dot{x} - f_p (M+m) \dot{\theta} + mgl(M+m) \sin\theta} \\ & \quad + \frac{(J+ml^2)(M+m) - (ml)^2 \cos^2\theta}{\dots} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, g는 중력가속도, l은 폴의 길이, M은 카트의 무게, m은 진자의 무게, J는 폴의 관성 모멘트, f<sub>p</sub>는 폴의 회전 마찰계수, f<sub>c</sub>는 카트의 마찰계수, r은 바퀴의 반지름, R<sub>m</sub>은 전기자 저항, K<sub>m</sub>은 모터 상수, K<sub>g</sub>는 기어비\*효율이다.

3. T-S 퍼지 모델

T-S 퍼지 모델은 "If-Then"규칙에 의해 아래와 같이 표현된다.[3]  
 Plant Rule i:  
 IF w<sub>1</sub>(k) is F<sub>i1</sub> and ... and w<sub>g</sub>(k) is F<sub>ig</sub>  
 Then x(k+1) = A<sub>i</sub>x(k) + B<sub>i</sub>u(k) (2)

For i=1, 2, ...L  
 여기서 w<sub>1</sub>(k), w<sub>2</sub>(k) ... w<sub>g</sub>(k)는 전방부 변수 이고 F<sub>ig</sub>는 퍼지 집합, A<sub>i</sub> ∈ R<sup>m × n</sup>, B<sub>i</sub> ∈ R<sup>m × m</sup>이며 L은 If-Then 규칙의 개수이다.  
 전체 퍼지 시스템은 아래의 식과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(w(k)) A_i x(k) + B_i u(k)}{\sum_{i=1}^L \mu_i(w(k))} \\ &= \sum_{i=1}^L h_i(w(k)) A_i x(k) + B u(k) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 w(k) = [w<sub>1</sub>(k), w<sub>2</sub>(k), ... w<sub>g</sub>(k)], μ<sub>i</sub>(w(k)) = ∏<sub>j=1</sub><sup>g</sup> F<sub>ij</sub>(w<sub>j</sub>(k))이고, F<sub>ij</sub>(w<sub>j</sub>(k))는 F<sub>ij</sub>에 대한 w<sub>j</sub>(k)의 소속 정도를 나타낸다.

4. T-S 퍼지 모델의 Identification

입,출력 데이터 쌍이 N이라고 가정하면 (X<sub>k</sub>, y<sub>k</sub>) (k=1, ..., N) 이며 X<sub>k</sub> = [x<sub>k1</sub>, ..., x<sub>kM</sub>]에서 M은 변수의 수를 가리킨다. Identification의 출력인 I-th T-S fuzzy 룰의 출력은 d<sub>ik</sub>(θ<sub>i</sub>) = |y<sub>k</sub> - [X<sub>k</sub> 1] • θ<sub>i</sub><sup>T</sup>|되고, 목적함수 J = ∑<sub>k=1</sub><sup>N</sup> ∑<sub>i=1</sub><sup>c</sup> (μ<sub>ik</sub>)<sup>m</sup> (d<sub>ik</sub>(θ<sub>i</sub>))<sup>2</sup> 된다.[4]

Lagrange multiplier를 이용하여 목적함수 J를 구속하면 다음과 같다.

$$F(\lambda, \mu_{ik}) = \sum_{i=1}^c (\mu_{ik})^m (d_{ik}(\theta_i))^2 - \lambda (\sum_{i=1}^c \mu_{ik} - 1), \quad k=1, \dots, N \quad (4)$$

여기서 λ는 Lagrange multiplier이고, m은 2로 고정되고 계산식에 따라 계산하면 Membership function을 구할 수 있다.

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c [d_{ik}(\theta_i)/d_{jk}(\theta_j)]^{2/(m-1)}}, \quad d_{jk} \neq 0 \quad (5)$$

or μ<sub>ik</sub> = s<sub>ik</sub>, d<sub>jk</sub> = 0 and ∑<sub>i=1</sub><sup>c</sup> s<sub>ik</sub> = 1  
 θ<sub>ij</sub>는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m (y_k - \sum_{t=1, t \neq j}^{M+1} \theta_{kt}) x_{kj}}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m x_{kj}^2} \quad (6)$$

i = 1, 2, ..., c      j = 1, 2, ..., M  
 clustering center의 Identification을 위한 프로그래밍 단계는 다음과 같다.[5][6]

step 1: 클러스터 c의 숫자를 할당하고 fuzzy weighting exponent인 m을 2로 설정한다. 클러스터 센터의 parameter 벡터인 θ<sub>i</sub>를 초기화한다. 종료계는 ε<sub>1</sub> > 0와 반복색인 r=1로 설정한다.

step 2: d<sub>ik</sub>(θ<sub>i</sub>) = |y<sub>k</sub> - [X<sub>k</sub> 1] • θ<sub>i</sub><sup>T</sup>|을 이용하여 d<sub>ik</sub>(θ<sub>i</sub>)를 계산하고 식(5)를 가지고 μ<sub>ik</sub>를 계산한다. 식(6)를 가지고 θ<sub>ij</sub>를 계산한다.

step 3: U = μ<sub>ik</sub>로 설정한다. 만약 ||U<sup>(r)</sup> - U<sup>(r-1)</sup>|| < ε<sub>1</sub>이면 멈추고 그렇지 않다면 r=r+1을 하여 step 2를 실행한다. 이러한 단계로 인해 μ<sub>ik</sub>는 J사 점점 최소화 하는 방향으로 나아갈 수 있다.

그 후 다음과 같이  $v_{ij}$ 를 쉽게 구할 수 있다.

$$v_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_{ik} x_{kj}}{\sum_{k=1}^N \mu_{ik}}, \quad i=1, 2, \dots, c \quad j=1, 2, \dots, M \quad (7)$$

$v_{ij}$ 를 구하면 이를 이용해 클러스터 센터와 트레이닝 입력 사이의 거리는 아래의 식과 같다.

$$d_{ik}^{(j)} = \|x_{kj} - v_{ij}\| \quad (8)$$

그리고 Membership function의 등급은 다음 식을 사용하여 알 수 있다.

$$\mu_{ik}^{(j)} = \frac{1}{\sum_{g=1}^c [d_{ik}^{(j)}(\theta_i)/d_{gk}^{(j)}(\theta_g)]^{2/(m-1)}}, \quad d_{gk}^{(j)} \neq 0 \quad (9)$$

$$\text{or } \mu_{ik}^{(j)} = s_{ik}^{(j)}, \quad d_{gk}^{(j)} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^c s_{ik}^{(j)} = 1$$

여기서 j는 k-th입력의 j-th 구성요소이다.

Membership function  $\mu_{ik}^{(j)}$ 의 등급에 관한 training은 클러스터 센터의 training과 절차가 비슷하다.

j변수에 관한 Membership function은 다음과 같다.

$$w_{ik} = \prod_{j=1}^M \mu_{ik}^{(j)} \quad (10)$$

전체 퍼지물의 Membership function은 다음과 같다.

$$\beta_{ik} = \frac{w_{ik}}{\sum_{q=1}^c w_{qk}} \quad (11)$$

모든  $\theta_i$ 를 식6에 의해 정의하면  $\hat{\theta}$ 로서 다음과 같다.

$$\hat{\theta} = [p_{10} \dots p_{c0} \quad p_{11} \dots p_{c1} \dots p_{1M} \dots p_{cM}]^T \quad (12)$$

여기서  $p_{i0} = b_i$ 이고  $p_{ij} = a_{ij}$ ,  $j=1, \dots, M$ ,  $i=1, \dots, c$ 이다.

그래서 k-th 출력은 다음과 같다.

$$\hat{y}_k = \varphi \theta = \sum_{i=1}^c \beta_{ik} \hat{y}_{ik} = \sum_{i=1}^c \beta_{ik} (p_{i0} + p_{i1}x_{k1} + \dots + p_{iM}x_{kM}) \quad (13)$$

$$\varphi = [\beta_{1k} \dots \beta_{ck} \quad \beta_{1k}x_{k1} \dots \beta_{ck}x_{k1} \dots \beta_{1k}x_{kM} \dots \beta_{ck}x_{kM}]$$

그 후 최소 제곱계산에 근거하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\theta = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T Y \quad (14)$$

Training 출력은  $Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N]^T$ 이다.

### 5. 시뮬레이션

다음 식은 전체 퍼지 시스템의 각각의 A와 B의 파라미터 값이다.

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 1 & 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (15)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.06 & 1 & -0.04 & -0.01 \\ 0.11 & 1 & -0.02 & -0.01 \\ 0.28 & 1 & 0.19 & -0.02 \\ -0.17 & 1 & -0.02 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (16)$$

$$\dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.01 & 1.11 & -0.02 \\ -0.01 & 0.02 & 0.95 & -0.01 \\ 0.03 & 0.01 & 1.06 & -0.02 \\ 0.08 & -0.01 & 1.07 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (17)$$

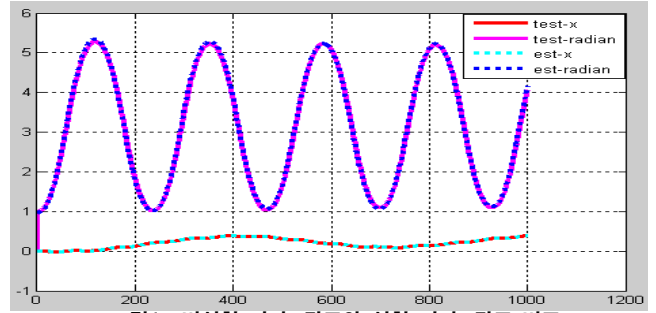
$$\dot{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.13 & 0.41 & 0.94 \\ -0.44 & 0.13 & 0.06 & 0.96 \\ 0.20 & 0.12 & 0.26 & 0.95 \\ 0.19 & -0.04 & 0.26 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

다음의 표1은 클러스터 센터  $v_{ij}$ 의 파라미터 값이다.

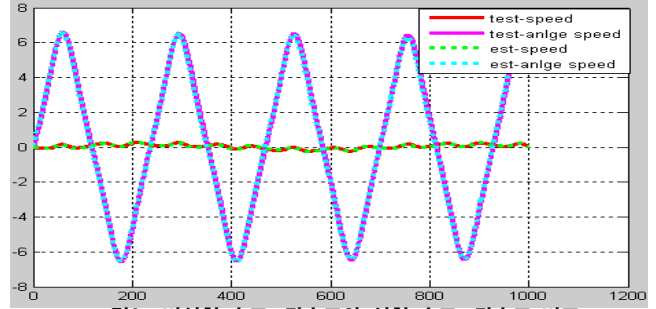
〈표 1〉 클러스터 센터의 파라미터

i \ j	1	2	3	4	5
1	0.0728	3.8525	0.0328	-5.5347	-0.7724
2	0.0831	2.6209	0.0174	0.5310	0.1074
3	0.0688	3.4155	0.0129	-1.2601	0.1078
4	0.1121	3.4644	0.0012	0.5649	-0.0199

그림1과 그림2는 비선형 시스템의 출력과 Identification을 통해 선형화된 출력을 비교한 것이다.



〈그림1〉 비선형 거리, 각도와 선형 거리, 각도 비교



〈그림2〉 비선형 속도, 각속도와 선형 속도, 각속도 비교

test쪽의 출력은 이산화한 비선형 시스템의 입력에 sin파를 넣어 출력으로 나온 거리, 각도, 속도, 각속도이고 est는 Identification을 통해 선형화된 거리, 각도, 속도, 각속도의 추정 값으로 두 그래프를 비교해본 결과를 보면 비선형 시스템이 Identification을 통해 선형화된 것을 알 수 있다.

### 6. 결 론

본 논문에서는 바퀴형 역진자 시스템을 선형화 하기 위해 T-S 퍼지 모델을 사용하였다. 바퀴형 역진자 시스템의 비선형식을 Identification한 다음 비선형 시스템의 출력 값과 Identification을 통해 선형화된 출력 값을 비교해 본 결과 미세한 차이가 있지만 같게 나오는 것을 확인할 수 있었다. 그 결과 본 논문에서 사용된 바퀴형 역진자 비선형 시스템을 직접 선형화 하여 T-S 퍼지 모델로 만들 때 복잡하다는 문제점이 있는데, Identification을 사용함으로써 이러한 문제점을 해결하여 간편하게 선형화 할 수 있어 보다 효율적으로 T-S 퍼지 모델로 만들 수 있다는 것을 보였다.

### [참 고 문 헌]

[1] El-Hawwary, M.I.; Elshafei, A.L.; Emara, H.M.; Fattah, H.A.A.; "Adaptive Fuzzy Control of the Inverted Pendulum Problem," Control Systems Technology, IEEE Transactions on , vol.14, no.6, pp.1135-1144, Nov. 2006  
 [2] Khailaie, S.; Bahmanyar, P.; Lucas, C.; "Decision making strategy in the designing of a fuzzy controller for inverted pendulum-cart system," Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on , vol., no., pp.1-8, 18-23 July 2010  
 [3] 김태규, 왕법광, 박승규, 윤태성, 안호균, 박근평, "T-S 퍼지모델을 이용한 이산 시간 비선형계통의 상태 궤환 선형화", 한국지능시스템학회, 19호, 865-871, 2009  
 [4] Fa Guang Wang; Seung Kyu Park; Taesung Yoon; Ho Kyun Ahn; "T-S fuzzy modeling of interior permanent magnet synchronous motor," Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2010 10th International Conference on , vol., no., pp.182-186, Nov. 29 2010-Dec. 1 2010  
 [5] Kung,C.C. and Su,J.Y., "Affine Takagi-Sugeno fuzzy modeling algorithm by fuzzy c-regression models clustering with a novel cluster validity criterion," IET Control Theory Appl., vol.1, pp. 1255 - 1265, 2007.  
 [6] Chaoshun Li, Jianzhong Zhou, Xiuqiao Xiang, Qingqing Li, Xue li An, "T-S fuzzy model identification based on a novel fuzzy c-regression model clustering algorithm," Engineering Applications of Artificial Intelligence vol. 22, pp. 646 -653, 2009.