

T-S 퍼지 모델링을 통한 이동 로봇의 궤도 추적 제어

황근우, 천효석, 박승규, 윤태성
 창원대학교 전기공학과

Trajectory Tracking Control of Mobile Robot via T-S Fuzzy Modeling

Keun-Woo Hwang, Seok-Hyo Cheon, Seung-Kyu Park, Tae-Sung Yoon
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

Abstract - In this paper, for the trajectory tracking control of mobile robot, firstly, we obtained the T-S fuzzy models from the tracking-error models, one of which has nonlinear form and the other is linearized around the reference trajectory. Then the tracking control inputs are designed using the proposed fuzzy linearization method and the existed PDC method. Lastly, the tracking performance is tested and compared for each model through simulation.

1. 서 론

T-S 퍼지 모델은 비선형 모델을 여러 동작점들을 기초로 하여 여러 개의 선형 모델들의 결합으로 구성되며, T-S 퍼지 제어기는 각각의 선형 모델들의 선형 제어기들의 결합으로 구성되어, 기존의 궤환 선형화에 있어서의 수학적 어려움을 제거할 수 있다[1].

본 연구에서는 이동로봇의 궤도 추적 제어를 위하여 비선형 시스템인 이동로봇의 에러 동특성에 순방향 및 궤환 제어입력을 대입하여 얻은 에러 방정식들[2]을 먼저 T-S 퍼지 모델로 표현하였다. 그런 후, T-S 퍼지 궤환 선형화 기법[3]을 사용하여 이들을 선형화 시킨 후 구해진 선형 모델로부터 제어기를 설계하였다. 그리고 본 연구에서 제안한 제어기 및 기존의 T-S 퍼지 제어 기법 중의 하나인 PDC 방법을 사용한 제어기[4],[5]의 궤도 추적 성능을 시뮬레이션을 통하여 비교해 보았다.

2. 본 론

2.1 바퀴형 이동로봇의 운동방정식

바퀴형 이동로봇에 대한 운동방정식은 식(1)과 같다.

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

x, y, θ 는 이동로봇의 자세(pose)이며, v, ω 는 로봇의 움직임을 결정하는 입력인 로봇의 속도와 각속도이다. 기준궤적과 바퀴형 이동로봇의 이동궤적에 대한 에러(error)는 아래 식(2)과 같이 정의된다.

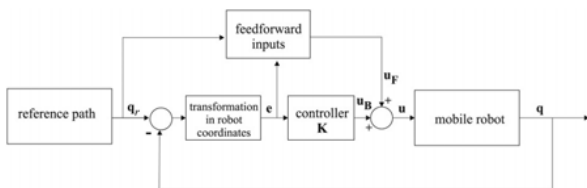
$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

식(2)에서 x_r, y_r, θ_r 는 기준궤적의 좌표이다. 그리고 식(1)과 식(2)로부터 식(3)과 같은 에러의 동특성을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos e_\theta & 0 \\ \sin e_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

여기서, $u = [v \ \omega]^T$ 이고, v_r 과 ω_r 은 기준궤적을 만들어 내는 입력이다. 지금 궤도 추적을 위한 전체 제어 시스템의 구조를 그림 1과 같이 구성하면, 제어입력을 아래와 같이 정의할 수 있다[2].

$$u = u_F + u_B = [v_r \cos e_\theta \quad \omega_r]^T + [v_c \quad \omega_c]^T \quad (4)$$



〈그림 1〉 전체 제어 시스템의 구조

그러면, 식(3)과 (4)로부터 아래의 에러 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & \frac{v_r \sin e_\theta}{e_\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad (5)$$

또한, 기준 궤적 주위($e_x = e_y = e_\theta = 0$)에서 식 (5)를 선형화시키면 아래의 에러 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & v_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 T-S 퍼지 모델

식 (5)의 에러 방정식 또는 식 (6)의 에러 방정식에 대한 전체 T-S 퍼지 모델은 식(7)과 같이 선형 모델의 결합으로 표현된다[1].

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(w(t)) \{A_i e(t) + B_i u_c(t)\}}{\sum_{i=1}^L \mu_i(w(t))} \\ &= \sum_{i=1}^L h_i(w(t)) \{A_i e(t) + B_i u_c(t)\} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\mu_i(w(t)) = \prod_{j=1}^q F_{ij}(w_j(t))$ 이다. $F_{ij}(w_j(t))$ 는 퍼지 집합 F_{ij} 에 대한 $w_j(t)$ 의 소속 정도를 나타낸다.

본 연구에서는 2.4절의 시뮬레이션에서 사용될 기준궤적을 생성하는 속도와 각속도의 범위를 고려하여, 식 (5) 및 식(6)을 대상으로 T-S 퍼지 모델링을 수행하였다.

식 (5)의 에러 방정식에 대해서 각각의 퍼지 변수의 범위는 다음과 같이 하였고,

$$-10 \leq w_r \leq 10, 1 \leq \frac{v_r \sin e_\theta}{e_\theta} \leq 6, -10 \leq e_x \leq 10, -10 \leq e_y \leq 10$$

이 때 A_i 와 B_i 를 다음과 같이 설정할 수 있다[5].

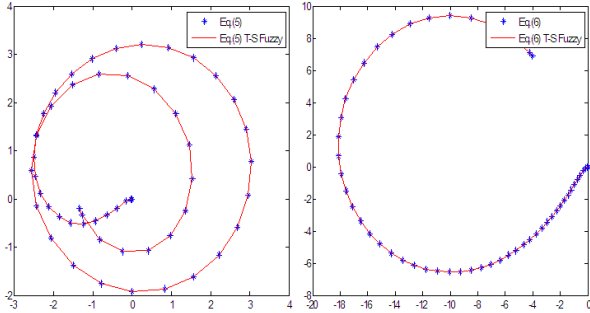
$$\begin{aligned} A_1, A_2, A_3, A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_5, A_6, A_7, A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1, B_2, B_3, B_{13} &= \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_4, B_5, B_{10}, B_{14} &= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B_3, B_7, B_{11}, B_{15} &= \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_4, B_8, B_{12}, B_{16} &= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6)의 에러 방정식에 대해서는 각각의 퍼지 변수의 범위는 $1 \leq v_r \leq 6$ 와 $-10 \leq \omega_r \leq 10$ 이고, 이 때 A_i 와 B_i 를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1, B_2, B_3, B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

위의 식 (8)과 (9)와 같이 각각의 동작점에서의 선형모델을 얻은 후, 식 (7)로 표현된 T-S 퍼지 모델을 테스트한 결과 그림 2와 같이 T-S 퍼지 모델이 식 (5)와 (6)의 에러 방정식을 잘 반영하고 있음을 확인할 수 있었다.



〈그림 2〉 T-S 퍼지 모델 결과(좌 : 식(5), 우 : 식(6))

2.3 T-S 퍼지 궤환 선형화

위에서 식 (5)와 (6)의 에러 방정식에 대하여 식 (7)-(9)와 같이 T-S 퍼지 모델을 하였는데, 이에 대한 i 번째 규칙을 식(10)와 같이 정한다[3].

i 번째 선형 모델에 대한 퍼지 규칙:

$$\text{IF } w_1(t) \text{ is } F_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } w_y(t) \text{ is } F_{iy} \\ \text{Then } \dot{e}(t) = A_{ci}e(t) + B_{ci}u_c(t) \quad (10)$$

$$z(t) = T_i e(t) \text{ and } \dot{z}(t) = A_{ci}z(t) + B_{ci}u_c(t)$$

for $i=1,2,\dots,L$

여기서 $A_{ci} = T_i A_i T_i^{-1}, B_{ci} = T_i B_i$ 이다.

그러면 전체 퍼지 좌표 변환은 다음 식(11)과 같이 되며,

$$z(t) = \sum_{i=1}^L h_i(w(t)) T_i e(t) \quad (11)$$

전체 퍼지 시스템은 식(12)와 같이 추론된다.

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(w(t)) \{A_{ci}z(t) + B_{ci}u_c(t)\} \quad (12)$$

T-S 퍼지 궤환 선형화를 위해서는 다음과 같은 가정을 필요로 한다.

$$\text{rank}[B_i \ A_i B_i \ \dots \ A_i^{n-1} B_i] = n$$

한편, 다중 입력 시스템은 다음 식과 같은 형태를 가지며, 위에 기술한

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_i e(t) + B_i u(t) \\ &= A_i e(t) + [b_{i1} \ b_{i2}] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$= A_i e(t) + \begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i12} \\ b_{i21} & b_{i22} \\ b_{i31} & b_{i32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

가정 하에서 i 번째 국부 선형 시스템을 아래 식(14)와 같은 제어 가능한 표준 형태로 변환하는 상태 변환 T_i 가 존재하게 된다.

$$\dot{z}(t) = A_{ci}z(t) + B_{ci}u(t) \quad (14)$$

위의 식에서 $A_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{i11} & a_{i12} & a_{i13} \\ a_{i21} & a_{i22} & a_{i23} \end{bmatrix}, B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_{i11} & b_{i12} & b_{i13} \\ b_{i21} & b_{i22} & b_{i23} \end{bmatrix}$ 이다.

A_{ci}, B_{ci} 의 파라미터를 이용하여 다음의 벡터들을 설정하면,

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i11} & a_{i12} & a_{i13} \\ a_{i21} & a_{i22} & a_{i23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i12} & b_{i13} \\ b_{i21} & b_{i22} & b_{i23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

좌표 변환된 전체 T-S 퍼지 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(w(t)) A_{ci}z(t) + B_{ci}u(t) \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^L h_i z_2(t) \\ \sum_{i=1}^L h_i a_{i1} z(t) \\ \sum_{i=1}^L h_i a_{i2} z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^L h_i b_{i1} u(t) \\ \sum_{i=1}^L h_i b_{i2} u(t) \end{bmatrix}$$

다음의 입력은 위의 시스템 (16)을 선형으로 만든다.

$$u(t) = \text{inv}\left(\sum_{i=1}^r h_i b_i\right)(v(t) - \sum_{i=1}^r h_i a_i z(t)) \quad (17)$$

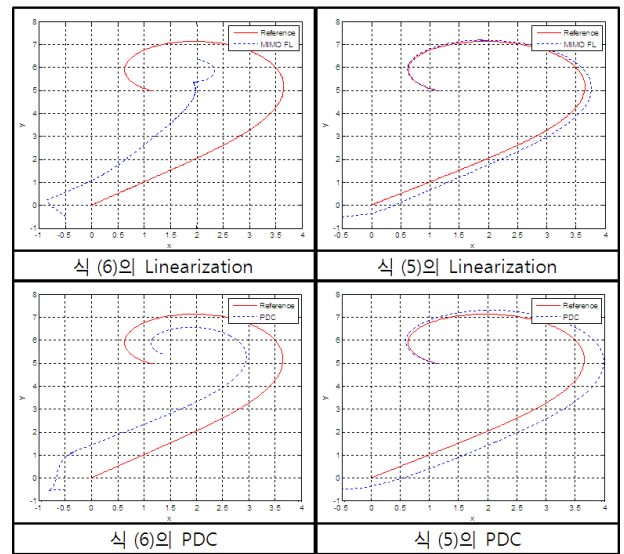
위의 식(17)에서 $v(t)$ 는 선형 시스템의 제어 입력이다. 즉, 식 (17)을 식 (16)에 대입하면 아래의 Brunovsky 표준형(canonical form)의 선형 시스템을 얻을 수 있게 된다.

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (18)$$

2.4 시뮬레이션

본 연구에서 제안된 퍼지 제어기 및 PDC 퍼지 제어기의 궤도 추적 성능을 보기 위하여 Simulink를 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다.

기준궤적을 생성하는 속도와 각속도는 $v_r(t) = 1 + 5\exp(-2t)$ [m/s], $\omega_r(t) = 10\sin(0.01t)$ [rad/s]로 하였다[4]. 그리고 로봇의 초기 자세 $q(0)$ 는 $[-0.5(m), -0.5(m), 0(\text{deg})]^T$, 기준궤적의 초기 자세 $q_r(0)$ 는 $[0(m), 0(m), 45(\text{deg})]^T$ 로 하였다. 그림 3은 시뮬레이션 결과이며 본 연구에서 제시한 T-S 퍼지 궤환 선형화 기법과 PDC 기법을 이용한 궤도 추적 제어 방법 모두 에러 방정식 (5)와 (6)에 대해 궤도 추적 결과가 다음을 확인할 수 있었다. 아래의 그래프에서 식 (5)의 Linearization과 식 (6)의 Linearization은 같은 제어기 이득 값을 사용한 결과이다.



〈그림 3〉 시뮬레이션 결과

3. 결 론

본 논문에서 제안된 T-S 퍼지 선형화 제어 방법과 기존의 PDC 제어 방법은 T-S 퍼지 모델링 기법을 사용함으로써 비선형 시스템인 이동로봇의 궤도 추적 제어 문제에 유용하게 적용될 수 있음을 시뮬레이션을 통하여 확인하였다. 그리고 제어기를 설계하는데 있어서 에러 방정식 (5)를 사용하는 경우 이동로봇이 기준궤적 주변에 없어도 잘 추적할 수 있는 반면에, 에러 방정식 (6)을 사용하는 경우는 로봇이 기준궤적에 근접하지 않으면 궤적 추적이 잘되지 않음을 확인할 수 있었다.

[참 고 문 헌]

- [1] K. Tanaka and H. O. Wang, Fuzzy control systems design and analysis, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [2] G. Klancar, I. Skrjanc, "Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time", Robotics and Autonomous Systems, Elsevier, vol. 55, pp.460-469, 2007.
- [3] 김태규, 왕범광, 박승규, 윤대성, 안호균, 박근평, "T-S 퍼지 모델을 이용한 이산 시간 비선형계의 상태 궤환 선형화", 한국지능시스템학회논문지, vol. 19, no. 6, pp.865-871, 2009.
- [4] C.J. Kim, J.W. Kwon and D.K. Chwa, "Polynomial Fuzzy Modeling and Tracking Control of Wheeled Mobile Robots via Sum of Squares Approach", IEEE 978-1-4244-3507-4/09/, pp. 973-977, 2009.
- [5] El-Hadi Guechi, Jimmy Lauber, Michel Dambrine, Saso Blazic, Gregor Klancar "Tracking-error model-based PDC control for mobile robots with acceleration limits" FUZZ-IEEE 2009, Korea, August 20-24, 2009.