

영구자석형 스텝모터의 LQR을 이용한 최적 PID 위치제어

이영우*, 김원희*, 신동훈*, 정정주§
 한양대학교 전기공학과*
 한양대학교 전기생체공학부§

Optimal PID position control using LQR approach for permanent magnet stepper motors

Youngwoo Lee*, Wonhee Kim*, Donghoon Shin* and Chung Choo Chung§
 Department of Electrical Engineering, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea*
 Division of Electrical and Biomedical Engineering, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea§
 §Corresponding author(Tel: +82-2-2220-1724; E-mail: cchung@hanyang.ac.kr)

Abstract - 본 논문에서는 기존의 proportional-integral-derivative (PID) 제어기의 이득조정과정에서 linear quadratic regulator(LQR)을 이용하여 이득조정을 하는 방법을 제안한다. 제안된 제어기의 이득은 LQR의 수식으로 표현되어지며 Matlab/simulink을 이용한 모의실험을 통해 위치프로파일에 대한 위치추종오차의 성능이 평가되어진다.

1. 서 론

Proportional-integral-derivative (PID) 제어기는 산업현장에서 가장 많이 쓰이며 간단하고 직관적으로 이득을 조절할 수 있는 제어기법이다 [1], [2], [3]. 이러한 PID 제어기는 선형 시스템 및 비선형 시스템의 위치 및 속도를 제어하는데 다양한 방법으로 응용되어 왔다. 이러한 PID 제어기는 직관적으로 이득조정이 가능하지만 반복적인 이득조정 작업을 통해 시스템의 응답을 향상시킨다는 점에 있어서 제어기의 이득조정과정이 최적화 되었다고 보기에는 어렵다. 최근에는 영구자석형 스텝모터에 direct quadrature (DQ)변환 없이 field oriented control (FOC)을 적용한 기법들이 연구되어지고 있다 [6]. 영구자석형 스텝모터에 FOC를 적용한 PID 제어기는 점성마찰에 의한 영향을 없애주기 위해 속도에 대한 피드포워드 성분을 PID 제어기에 추가시킴으로 인해 영구자석형 스텝모터의 위치추종성능을 향상시킬 수 있다 [6].

본 논문에서는 linear quadratic regulator (LQR)기법을 이용한 PID 제어기의 이득조정 방법을 영구자석형 스텝모터에 적용함으로써 새로운 PID 제어기의 이득조정 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 제어기의 이득조정기법은 선형시스템의 상태와 입력에 대한 두 가지 관점에서의 제어기 이득조정이 가능하고 따라서 시스템의 입력에 대한 가중치로서의 제어가 가능함에 따라 에너지 관점에서의 개인 조정이 가능하다는 점에서 제안된 제어기가 장점을 가진다 [3], [4]. 또한 LQR의 특성에 따른 이득여유와 위상여유에 따른 이득조정에서의 강인함을 보장한다.

2. 본 론

2.1 제어기 설계

상태공간에서 영구자석형 스텝모터의 역학적 관계식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}[-K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - B\omega] \\ \dot{i}_a &= \frac{1}{L}[v_a - R i_a + K_m \omega \sin(N_r \theta)] \\ \dot{i}_b &= \frac{1}{L}[v_b - R i_b - K_m \omega \cos(N_r \theta)] \end{aligned} \quad (1)$$

v_a, v_b 와 i_a, i_b 는 A상과 B상의 상전류 및 상전압이고, ω 와 θ 는 회전자의 각속도와 각위치, B 는 점성마찰계수, J 는 모터의 관성, K_m 는 모터의 토크상수, R 은 모터의 상 저항, L 은 모터의 인덕턴스, N_r 은 모터의 톱니의 수이다. 본 논문에서 모터의 A상과 B상간에 존재하는 자기적 결합 및 인덕터에 의해서 발생되어지는 물리적 편차는 무시되어진다. 영구자석형 스텝모터에서 전기적 역학식이 기계적 역학식보다 매우 빠르기 때문에 본 논문에서는 기계적 2차 역학방정식만 고려되어진다 [5]. 상태공간에서 영구자석형 스텝모터의 기계적 역학식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}[-K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - B\omega]. \end{aligned} \quad (2)$$

아래와 같이 영구자석형 스텝모터에서 토크는 모터의 입력으로 간주되어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}[\tau - B\omega]. \end{aligned} \quad (3)$$

위 식에서, $\tau = -K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta)$ 이다. 위치프로파일을 추종하기 위해서 PID 제어기가 같이 설계되어진다. 토크가 시스템의 입력으로 간주하면 시스템은 선형으로 간주되어진다. 시스템의 추종성능을 향상시키기 위해 속도에 대한 피드포워드 성분을 PID 제어기에 추가하고 그 역학식은 다음과 같다.

$$\tau = K_P(\theta_d - \theta) + K_I \int_0^t (\theta_d - \theta) + K_D(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + B\omega_d + J\dot{\omega}_d. \quad (4)$$

위 식에서 ω_d 는 속도프로파일이다. 추종오차 $e = [e_1, e_2, e_3]^T$ 는 아래와 같이 정의되어진다.

$$\begin{aligned} e_1 &= \int_0^t (\theta_d - \theta), dt \\ e_2 &= \theta_d - \theta, \\ e_3 &= \dot{\theta}_d - \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

상태공간에서의 추종오차에 대한 역학식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= \dot{\omega}_d + \frac{1}{J}[\tau - B\omega]. \end{aligned} \quad (6)$$

식 (4)에 의해 (6)을 전개하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_I}{J} & -\frac{K_P}{J} & -\frac{K_D + B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

LQR적용을 위하여 (7)을 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_e e + B_e u = (A_e - B_e K) e, \\ u &= -K e. \end{aligned} \quad (8)$$

위 식에서 $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{B}{J} \end{pmatrix}, B_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}, K = [K_I, K_P, K_D]$ 와 같다.

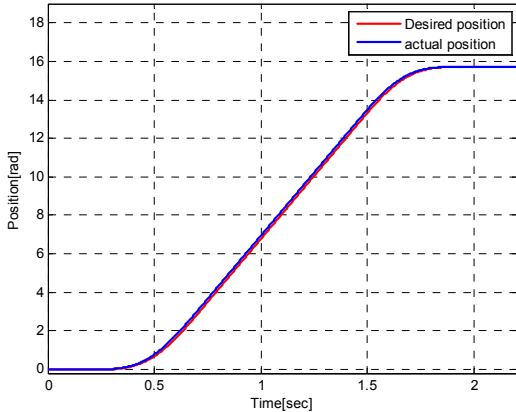
영구자석형 스텝모터 시스템의 상태와 입력에 대한 대수적 비용함수는 $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$ 이다. 상태 가중치 행렬(Q)과 입력 가중치(R)의 선택에 따른 Riccati 방정식은 $A_e^T P + P A_e - P B_e B_e^T P + Q = 0$ 이고 $K = -R^{-1} B_e^T P$ 로 정리되어진다. 위와 같은 방법으로 인해 LQR에 의한 PID 제어기의 이득이 결정되어진다. 이러한 LQR 기법에 의한 PID 제어기의 이득이 결정되어지면 입력토크가 결정되어진다. 영구자석형 스텝모터에서 실질적인 입력은 토크가 아닌 각 상의 상전류가 되므로 전류프로파일을 생성하기 위한 제안 설계기법이 사용되어진다. 영구자석형 스텝모터에서 DQ없이 FOC를 구현에 필요한 토크를 생성하기 위해 영구자석형 스텝모터의 실질적인 입력이 되는 상전류는 다음과 같이 정의되어진다 [6].

〈표 1〉 영구자석형 스텝모터의 매개변수

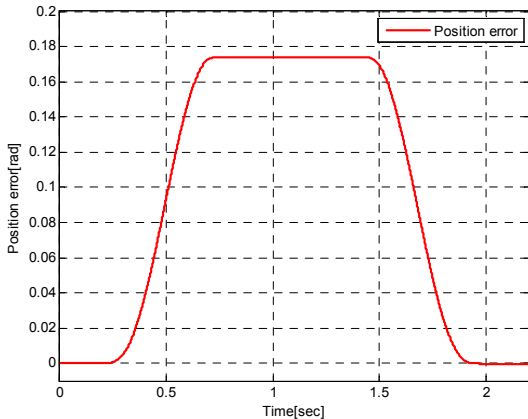
매개변수	값	매개변수	값
L	4 mH	B	5×10^{-3}
R	14.8 Ω	K_m	0.51
J	8×10^{-5} Kg·m ²	N_r	50

〈표 2〉 LQR 가중치 및 PID 제어기 이득

가중치	값	이득	값
Q	$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$	K_p	3.1623
		K_I	0.0032
R	1	K_D	0.0453



〈그림 1〉 프로파일에 따른 위치 추종



〈그림 2〉 위치 추종 오차

$$i_a^d = -\frac{\tau}{K_m} \sin(N_r \theta), i_b^d = \frac{\tau}{K_m} \cos(N_r \theta). \quad (9)$$

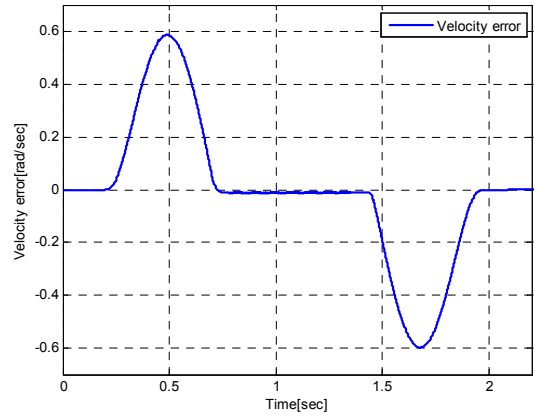
2.2 모의실험

모의실험은 Matlab/simulink를 통해 실행되었다. 모의실험은 가속, 등속 및 감속구간을 가지는 프로파일을 사용하였고, 그림 1은 프로파일에 따른 위치추종 성능을 나타내며, 그림 2와 그림 3은 위치와 속도에 대한 추종오차를 나타내고 있다. 그림 4는 입력토크에 따른 각 상의 전류를 나타내고 있다.

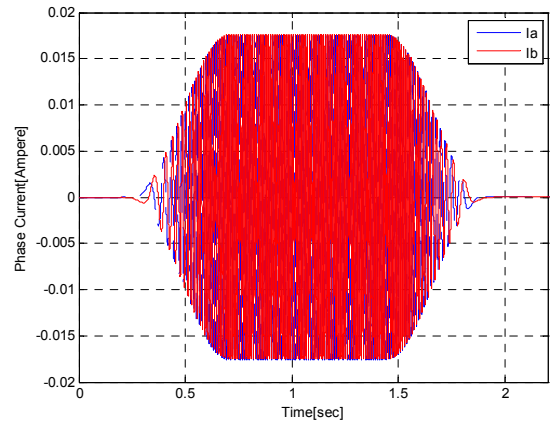
표 1과 표 2는 영구자석형 스텝모터의 매개변수와 LQR 및 PID 제어기 이득 대한 모의실험 값을 나타내고 있다. 그림 1에 따라 LQR에 의한 PID 제어기의 이득계산에 의한 위치추종이 잘 이루어지고 있는 것을 확인할 수 있다. 또한 그림 4에 따른 에너지 관점에서의 입력가중치(R)에 따른 PID 제어기의 이득조정 가능하다는 것을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서 LQR에 의한 PID 제어기의 이득조정에 대한 위치추종에 대한 성능을 살펴보았다. 본 논문에서 제안되어진 제어기법을 영구자석



〈그림 3〉 속도 추종 오차



〈그림 4〉 입력토크에 따른 A, B상전류

형 스텝모터에 적용함으로써 스텝모터의 위치추종 성능을 향상시키고 기존의 PID 제어기의 이득조정방식이 아닌 시스템의 상태와 입력, 두가지 관점에서의 제어기의 이득조정이 가능하다는 측면에서 영구자석형 스텝모터의 위치추종에 대한 새로운 기법을 제시하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] S. E. Osama and K. J. Praveen, "LQR-based stator field oriented control for the induction motor drives," in *Proc. IEEE Applied Power Electron. Conf. Exposition*, 2008, pp. 1126-1131.
- [2] M. Moradi, A. Ahmadi, and S. Abhari, "Optimal control based feedback linearization for position control of dc motor," in *Proc. IEEE Int. Conf. Adv. Computer Contr.*, 2010, pp. 312-316.
- [3] G. R. Yu and R. C. Hwang, "Optimal PID speed control of brushless dc motors using LQR approach," in *Proc. IEEE Int. Conf. Syst.*, 2004, pp. 472-478.
- [4] J. B. Hea, Q. G. Wang, and T. H. Leeb, "PI/PID controller tuning via LQR approach," *Chemical Eng. Science*, vol. 55, pp. 2429-2439, July 2000.
- [5] D. Chen and B. Paden, "Adaptive linearization of hybrid step motors: stability analysis," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 38, no. 6, pp. 874-887, June 1993.
- [6] W. Kim, C. Yang, and C. C. Chung, "Design and implementation of simple field oriented control for permanent magnet stepper motors without DQ transformation," to appear in *IEEE Trans. Magnetics*, 2011.