

소속함수 의존성을 이용한 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템의 관측기 기반 제어기 설계

김호준*, 주영훈**, 박진배*

연세대 전기전자공학부*, 군산대 제어로봇공학과**

The Design of Membership-function-dependent Observer-based Controller Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model

Ho Jun Kim*, Young Hoon Joo**, Jin Bae Park
Yonsei University*, Kunsan University**

Abstract - 본 논문은 비선형 시스템의 소속함수 의존성을 이용한 관측기 기반 퍼지 제어기 설계 기법을 제시한다. Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델링을 이용해 비선형 시스템을 퍼지 모델로 표현한다. 시스템의 안정화 조건은 소속함수의 의존성을 이용한 리아푸노프 안정도 해석 방법을 이용해 유도된다. 안정화 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현되며, 부등식의 해를 이용해 제어기의 이득값을 구한다. 모의실험을 통해 설계된 제어기의 타당성을 검증한다.

1. 서 론

현실의 대부분의 시스템은 비선형적 움직임을 나타낸다. 따라서 비선형 움직임을 효율적으로 나타내고 제어하기 위한 연구가 많이 이루어지고 있다. 이러한 연구 중 최근 들어 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 시스템이 많은 관심을 받고 있다. T-S 퍼지 시스템은 비선형 시스템을 부분적인 선형 시스템의 형태로 나타낼 수 있기 때문에, 비선형 제어 이론에 비해 다루기 쉬운 선형 제어 이론의 도입에 유리하다. 이상적인 상태에서는 실제 시스템의 모든 상태 변수를 알고 있다고 가정한다. 하지만 실제 시스템에서는 시스템의 상태 변수를 정확하게 알아내기 어려운 경우가 많다. 따라서 관측기를 통해 시스템의 상태 벡터를 추정하는 방법이 많이 이용 된다 [4], [8].

T-S 퍼지 시스템의 주요 관심사 중 하나는 시스템의 안정화 조건을 완화시키는 부등식 조건을 세우는 것이다. 일반적으로 T-S 퍼지 시스템의 안정화 조건 부등식은 리아푸노프 안정도 해석 방법을 이용해 유도된다. 현재 T-S 퍼지 시스템의 안정화 조건은 중분조건만을 제시하기 때문에 실제 시스템이 안정하더라도 안정하지 않다고 판정할 수 있다. 따라서 안정화 조건 부등식을 완화시키는 것은 T-S 퍼지 시스템을 해석함에 있어 매우 중요한 요소이며, 안정화 조건을 완화시키기 위한 많은 연구가 이루어져 왔다 [1-7]. 보통 안정화 조건을 완화시키는 방법은 모델링된 시스템의 행렬을 변형하는 경우가 많다. 하지만 이 방법은 시스템의 안정도 해석 시 소속함수에 대한 정보를 포함 할 수 없다는 한계가 있다. 따라서 근래 들어 소속함수의 정보를 안정화 조건에 포함시켜 완화된 조건을 제시하기 위한 연구가 이루어지고 있다 [1-3]. 소속함수는 보통 연속함수로 표현되기 때문에 안정화 조건 부등식으로 표현하기가 쉽지 않다. 그렇기 때문에 소속함수를 그대로 사용하지 않고 소속함수간의 크기 관계를 나타내어 안정화 조건 부등식에 포함하는 방법이 최근에 연구 되었다 [1], [2].

본 논문에서는 비선형 시스템의 관측기 기반 제어기 설계 기법을 제시한다. 비선형 시스템은 T-S 퍼지 시스템으로 표현이 된다. 안정화 조건은 리아푸노프 안정도 해석방법을 이용해 유도되며 선형 행렬 부등식의 형태로 나타나므로 쉽게 이득 값을 구할 수 있다. 소속함수의 의존성을 이용해 안정화 조건을 완화시킨다. 모의실험을 통해 설계된 제어기의 효과를 검증한다.

2. 퍼지 모델

본 논문에서는 다음과 같은 형태의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \tag{1}$$

이 때 $x(t) \in R^n$ 은 상태변수, $u(t) \in R^m$ 은 제어입력이고 $f(x(t))$ 와 $g(x(t))$ 는 비선형 벡터함수이다. 비선형 시스템 (1) 은 다음과 같은 T-S 퍼지 모델로 표현된다.

Plant Rule i :

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and ... and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{2}$$

여기서 Γ_h^i 는 i 번째 규칙에서 h 번째 퍼지 집합이며, A_i, B_i 는 알려진 차원의 행렬이다. $z_h(t)$ 는 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집

합이다. r 은 T-S 퍼지 모델의 규칙의 수를 나타낸다. Parallel distributed compensation(PDC)를 적용하여 퍼지 제어기와 관측기를 다음과 같이 표현 할 수 있다.

Controller Rule i :

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and ... and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \tag{3}$$

Observer rule i :

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and ... and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{4}$$

여기서 C_i 는 알려진 차원의 행렬이고, $\hat{x}(t)$ 와 $\hat{y}(t)$ 는 관측된 시스템의 상태변수와 출력변수이고, $y(t)$ 는 실제 출력변수이다. K_i 는 i 번째 규칙의 제어기 이득이고, L_i 는 i 번째 규칙의 관측기 이득이다. (2),(3),(4)에 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 비퍼지화를 적용하면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{5}$$

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \tag{6}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i \hat{x}(t), \tag{7}$$

여기서

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \Gamma_j^i(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

$$w_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0, \quad h_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1,$$

$i = 1, 2, \dots, r, \Gamma_j^i(z_j(t))$ 는 Γ_j^i 집합 안의 $z_j(t)$ 의 소속정도를 나타낸다. 실제 시스템의 상태변수와 관측된 시스템의 상태변수의 차이를 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 라고 정의한다. 식 (7)에 식 (5)와 (6)을 대입하면 다음과 같은 결합 시스템의 상태방정식을 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x_a(t) \tag{8}$$

$$\text{여기서 } G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}, \quad x_a(t) = [\hat{x}(t) \ e(t)]^T \text{ 이다.}$$

소속함수간의 의존성을 나타내기 위해 다음의 보조정리를 도입한다.

보조정리 1 [1] : h_i 는 $\sum_{i=1}^r h_i(\cdot) = 1, h_i(\cdot) \geq 0$ 을 만족하고 $L_{ij}, i, j \in 1, \dots, r$ 는 소속함수에 독립적인 행렬의 표현이다. 소속함수간 크기 관계를 표현하기 위해

$$H = \tilde{M}H \gg 0, \tilde{H} \gg 0, \tilde{M} \gg 0 \text{ 라 정의해 주면,}$$

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \tilde{h}_k \tilde{h}_l (\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_{ik} m_{jl} L_{ij}) < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j L_{ij} < 0.$$

여기서, $H = [h_1 \dots h_r]^T$, $\tilde{H} = [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_r]^T$,
 $\forall k \in 1, \dots, r, \exists (i, j): \tilde{h}_k = h_i - h_j \geq 0$
 \gg 는 행렬의 모든 원소가 0 이상임을 뜻한다.

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 00 \\ 00 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 00 \\ 000.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 00 \\ 01 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 00 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 01 \\ 00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 00 \end{bmatrix}$$

3. 관측기 기반 제어기 설계

이번 절에서는, 식 (8)로 표현된 결합 시스템의 안정화 조건을 제시한다. 보조정리 1을 이용해 소속함수의 의존성을 이용한 완화된 안정화 조건을 세울 수 있다. 다음 정리 1을 통해 식(8)로 표현된 시스템의 제어기 이득 값과 관측기 이득 값을 얻을 수 있다.

정리 1 : 행렬 $P = P^T > 0$ 를 만족하고 적절한 차원의 행렬 P, K_i, L_i 가 있을 때 다음의 선형 행렬 부등식이 만족한다면 시스템 (8)은 점근적으로 안정하며,

$$\sum_{i=1}^r m_{ik}^2 (G_{ii}^T P + P G_{ii}) < 0, \quad 1 \leq k \leq \tilde{r} \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r m_{ik} m_{jl} ((G_{ij} + G_{ji})^T P + P(G_{ij} + G_{ji})) < 0, \quad 1 \leq k \leq \tilde{r}, 1 \leq l \leq \tilde{r} \quad (10)$$

이 때, $G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}$ 이며, m_{ik} 는 보조정리 1에 의해 주어진 행렬 M 의 i 번 째 행 k 번 째 열의 원소를 뜻한다.

증명 : 페이지 제한으로 생략한다.

정리 1을 통해 i 번 째 퍼지 규칙의 제어기 이득 값 K_i 와 관측기 이득 값 L_i 를 얻을 수 있다.

참고 1 : 정리 1에서 소속함수의 의존성을 이용해 안정화 조건을 완화시키는 방법은 주어진 시스템의 행렬 A_i, B_i, C_i 와 독립적으로 소속함수의 크기만을 고려한다. 따라서 주어진 시스템의 행렬식을 이용해서 안정화 조건을 완화시키는 방법 [4], [5]과 함께 쓰일 수 있는 장점이 있다.

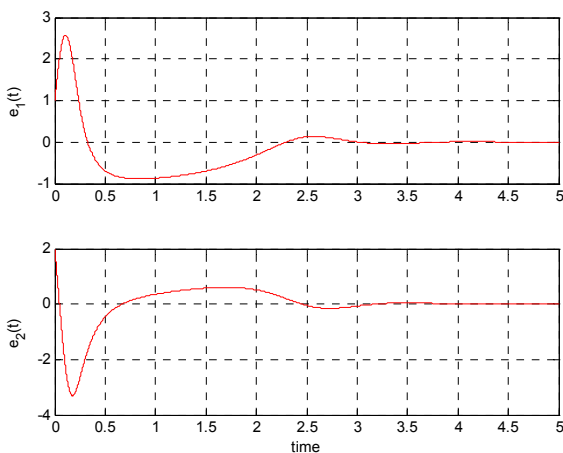
4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

[1]에서 다룬 다음 예제를 통해, 정리 1의 효용성을 증명한다. 주어진 시스템은 식 (8)의 형태와 같으며, 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \dots = B_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = \dots = C_8 = [1 \ 1]$$



〈그림 1〉 오차 상태 변수 $e_1(t), e_2(t)$ 의 시스템 응답

또한 주어진 시스템에서 소속함수간의 의존성을 표현한 행렬 M 은 다음과 같다.

이 때, 정리 1에 의한 관측기 이득 값은 다음과 같다.

$$L_1 = [-5.0343 \ 13.5279]^T, L_2 = [-13.8203 \ 34.4181]^T$$

$$L_3 = [-14.7034 \ 24.4199]^T, L_4 = [-10.6422 \ 28.6705]^T$$

$$L_5 = [2.7175 \ -1.8348]^T, L_6 = [-5.9886 \ 18.3779]^T$$

$$L_7 = [3.8732 \ -5.2737]^T, L_8 = [-4.9129 \ 15.6169]^T$$

초기값은 $e_1(0) = 1, e_2(0) = 2$ 라 가정한다. 그림 1에 의해 $t \rightarrow \infty$ 일 때, $e_1(t) = e_2(t) = 0$ 임을 확인 할 수 있다. 즉, 정리 1에 의해 제안된 기법으로 설계한 관측기 기반 제어기는 $e(t)$ 를 점근적으로 안정화 시킨다.

5. 결 론

본 논문에서는 소속함수의 의존성을 이용한 관측기 기반 퍼지 제어기를 설계했다. 관측기 기반의 페루프 시스템을 고려하였으며, 이를 T-S 퍼지 시스템으로 표현하였다. 리아푸노프 안정도 해석 방법을 통해 시스템을 안정화 시키는 충분조건을 유도한다. 안정화 조건은 소속함수의 의존성을 이용해 완화된다. 주어진 충분조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 나타나며, 그것의 해를 유도하였다. 시뮬레이션을 통해 제안된 정리의 타당성을 입증하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] M. Bernal, T. M. Guerra, A. Kruszewski, "A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models," Fuzzy Sets and Systems. Vol. 160, no. 19, pp. 2776-2795, 2009.
- [2] M. Bernal, T. M. Guerra, A. Kruszewski, "A membership-function-dependent stability analysis of Takagi-Sugeno models" in: Proc. IFAC World Congress 2008, Seoul, South Korea, pp.5611-5616.
- [3] A. Sala, C. Arino, "Relaxed stability and performance LMI conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with polynomial constraints on membership function shapes," IEEE Fuzzy Syst. Vol. 16, pp.1328-1336, 2008.
- [4] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability and LMI-based designs", IEEE Trans. Fuzzy. Syst. Vol. 6, no.2, pp. 250-265, 1998.
- [5] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability conditions of fuzzy control systems," IEEE Trans. Fuzzy Syst, Vol. 8, no. 5, pp. 523-534, 2000.
- [6] H. K. Lam and M. Narimani, "Stability Analysis and Performance Design for Fuzzy-model-based Control System Under Imperfect Premise Matching," IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 17, No. 4, pp. 949-961, 2009.
- [7] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems", IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [8] X. J. Ma, Z. Q. Sun, and Y. Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer", IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol. 6, no. 2, pp. 41-51, 1998

감사의 글 : 본 연구는 2010년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다.
(No. 20104010100590)