

FEM을 이용한 Shielded Microstrip Line의 정전용량 해석

이우찬*, 김형석**, 아델 라얀*
 텍사스(오스틴)대학교*, 중앙대학교**

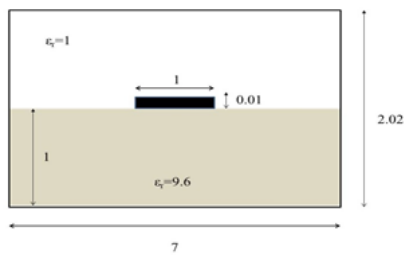
A Calculation of the Capacitance of a Shielded Microstrip Line using the Finite Element Method

Woochan Lee*, Hyung-Suk Kim**, Adel Rayan*
 The University of Texas at Austin*, Chung-Ang University**

Abstract - This paper presents a derivation of the capacitance of a shielded microstrip line using the Finite Element Method (FEM). The first approach adopts a 2-D version of Gauss's theorem and an approximation of integral to finite differencing. In this case, the choice of a contour and the size of a mesh affects the validity of the capacitance. Next, the method for deriving the capacitance by using of energy relation is shown. Finally, the simulation results are compared to those of the commercial tool (COMSOL) adopted FEM .

1. 서 론

전자기 문제에 있어 모든 구조에서 해석적으로 Field를 구하기는 어렵기 때문에 여러 수치해석적인 기법들이 제안되어 왔다. 이러한 기법 중, Finite Difference Method (FDM)이나 MoM (Method of Moments) 등의 여타의 전자기 수치해석 기법에 비하여 FEM은 복잡한 구조의 해석에 있어서 이점을 가지고 있다. 본 논문에서는 FEM을 이용하여 그림 1에 제시된 shielded microstrip line 구조의 정전용량을 해석한다. 이를 위하여 1) Gauss's theorem을 이용하여 총 전하를 구하고, 이를 통하여 정전용량을 계산하는 방법, 2) 에너지를 이용한 정전용량 계산하는 방법을 적용하였고, 전자의 경우 적분경로 선택과 element의 크기에 따라 상용툴로부터 도출된 정전용량과 오차가 변화하게 된다. 최종적으로 제안된 방법들과 상용 계산 소프트웨어인 COMSOL의 계산결과를 비교하여 제시하였다.



<그림 1> The shielded microstrip line

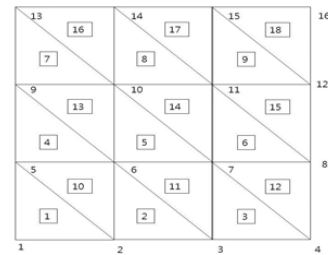
2. 본 론

2.1 FEM을 이용한 Shielded Microstrip Line의 전위 계산

본 논문에서는 linear triangular element가 사용되었고 이 경우 각 element의 unknown function ϕ 는 다음의 식 (1)과 같다.

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (1)$$

또한, node와 element의 numbering 구조는 그림 2의 방식과 같다. 그림 2는 총 node 개수 (Nn)이 16개, 총 element 개수 (Ne)가 18개일 때의 예를 나타낸다. 이와 같은 numbering은 node number간의 최대 거리를 최소화시키고, 이에 따라 matrix bandwidth가 좁아지기 때문에 행렬 계수 저장과 연산에 있어 이점을 가진다 [2]. 또한, 구조해석의 왜곡을 방지하기 위해 dy 는 내부 도체의 높이인 0.01 또는 0.01/2로 고정하였고, dx 를 변화시킴에 따라서 mesh density를 조절하였다.



<그림 2> Nodes and elements numbering example

Functional F (M은 node 개수)와 subfunctional F^e 는 각각 식 (2), (3)과 같고, 본 논문의 shielded microstrip line 구조에서 정전용량을 도출하기 위해서는, 위치에 따라 $\alpha_x = \alpha_y = \epsilon_r$, $\beta = 0$, $f = 0$ 을 대입한 후, Dirichlet 경계조건을 이용하여 Laplace equation의 해인 ϕ 를 구하여야 한다. 이 때, 해를 구하기 위한 $\delta F = 0$ 은 식(4)와 같이 행렬의 꼴로 나타내어진다.

$$F(\phi) = \sum_{e=1}^M F^e(\phi) \quad (2)$$

$$F^e(\phi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \left[\alpha_x \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial y} \right)^2 + \beta (\phi^e)^2 \right] d\Omega - \iint_{\Omega^e} f \phi^e d\Omega \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{\partial F^e(\phi^e)}{\partial \phi_i^e} \right\} = [K^e] \{ \phi^e \} - \{ b^e \} \quad (4)$$

$$K_{i,j}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (\alpha_x b_i^e b_j^e + \alpha_y c_i^e c_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ij}) \quad (5)$$

$$b_i^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e \quad (6)$$

다음으로 $K_{i,j}^e$ 와 b_i^e 를 통하여 Global coefficient matrix $[K]$ 와 $\{b\}$ 를 생성하고, 경계조건 Γ_1 (outer conductor, $V=0$), Γ_2 (inner conductor, $V=1$)를 적용하여 $[K]$, $\{b\}$ 의 계수를 변화시키면, 식 $[K] \{ \phi \} = \{ b \}$ 을 통하여 전체 node의 ϕ 를 구할 수 있게 된다. 최종적으로, mesh density의 값에 따른 ϕ 의 변화를 다음의 그림 3-6에 나타내었다.



<그림 3> ϕ with 14140 elements (dy=0.01, dx=0.2)



<그림 4> ϕ with 28280 elements (dy=0.01, dx=0.1)



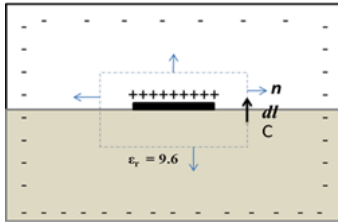
〈그림 5〉 ϕ with 56560 elements (dy=0.01, dx=0.05)



〈그림 6〉 ϕ with 113120 elements (dy=0.005, dx=0.05)

2.1.1 Gauss' s theorem을 이용한 정전 용량 계산

총 전하 $Q=C/V$ 의 관계를 이용하여 C를 구하기 위해서는 먼저 inner conductor의 Q를 알아야 하며, 이를 위하여 2-D Gauss's theorem ($Q = \oint_l \vec{D} \cdot \vec{dl}$)을 적용한다.



〈그림 7〉 Contour line C around the inner conductor

이 때 적분 경로 C의 선택은 그림 7과 같다. 또한, 미분을 차분으로 근사하기 위하여 Forward differencing을 적용하면 이에 따른 Q는 식 (7)과 같다.

$$Q = \oint_l \vec{D} \cdot \vec{dl} = - \oint_l \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} dl \cong - \epsilon_0 \Delta l \sum_i \epsilon_i \frac{V_{n+1} - V_n}{\Delta n} \quad (7)$$

이 때 Δl 의 값은 각 적분 경로에 따라 dx 또는 dy 가 되며, 이 값들이 작을수록, 즉 mesh density가 높아질수록 함으로의 근사가 적분에 보다 가까워지며, 또한 차분 역시 미분과 보다 가까워진다.

또한, contour가 커질수록 계산에 사용되는 sample의 값들이 많아지게 되므로, 큰 contour를 사용한다면 작은 contour에 비하여 Q 값을 보다 정확히 구할 수 있음을 예상할 수 있다. 실제로 같은 mesh density 에서 smallest contour를 적분 경로로 택하여 구한 정전용량은 largest contour를 적분 경로로 택한 값에 비하여 COMSOL 결과값과의 오차가 더 크다.

2.1.2 에너지를 이용한 정전 용량 계산

Linear triangular element에서는 식(1)이 성립하므로, $E = -\nabla\phi$ 의 관계를 이용하면 각 element에서의 E-field는 다음의 식 (8)과 같은 constant vector로 주어진다.

$$E^e = - \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{j=1}^3 (b_j^e \hat{x} + c_j^e \hat{y}) \phi_j^e \quad (8)$$

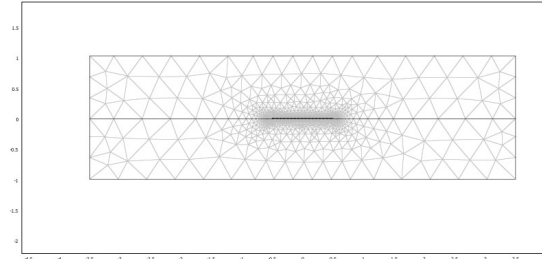
따라서, 각 element의 에너지는 다음의 식 (9)를 만족하며, 식 (10)에 의하여 정전용량을 구할 수 있다. 이때, 전술한 바와 같이 inner conductor의 경계조건 $V=1$ 을 이용한다.

$$W^e = \frac{1}{2} \iint_s \epsilon |E^e|^2 ds = \frac{1}{2} \Delta^e \epsilon |E^e|^2 \quad (9)$$

$$C = \frac{2W}{V^2} = \frac{2 \int W^e}{V^2} \quad (10)$$

2.2 상용 계산 소프트웨어(COMSOL)를 이용한 정전용량 검증

COMSOL은 FEM을 기반으로 한 수치해석 소프트웨어로서, 이에 shielded microstrip line의 구조를 입력하여 검증하였다. 그림 8은 Initial mesh 로서, 더 조밀한 mesh generation 역시 가능하다. 이와 함께 전술한 방법들로 도출된 정전 용량을 표 1에 비교하였다.



〈그림 8〉 Initial meshes generated by COMSOL

〈표 1〉 계산 방법 별 정전 용량 비교

# of element	14140	28280	56560	113120
Methodology				
By Gauss's theorem - smallest contour	186.10pF	181.11pF	178.71pF	178.48pF
By Gauss's theorem - largest contour	186.09pF	181.09pF	178.69pF	178.47pF
By energy calculation	182.78pF	177.49pF	174.89pF	176.27pF
Reference: COMSOL	177.35pF (2730 elements)	177.26pF (10920 elements)	177.22pF (43680 elements)	

3. 결 론

본 논문에서는 FEM을 이용하여 shielded microstrip line 구조의 정전 용량을 해석하였고, 이를 위하여 1) Gauss's theorem을 이용하여 총 전하를 구하고, 이를 통하여 정전용량을 계산하는 방법, 2) 에너지를 이용한 정전용량 계산하는 방법을 적용하였고, COMSOL의 결과와 비교하였다. 표 1을 통하여 볼 때, 같은 mesh density일 때 Gauss's theorem을 이용한 방법에 비하여 에너지를 이용한 방법이 보다 COMSOL의 결과와 가까움을 확인할 수 있다. 이와 더불어, Gauss's theorem을 이용한 방법에서 적분 경로의 크기 변화는 실제 정전 용량의 계산에 큰 영향을 미치지 않는다는 것을 확인할 수 있다.

또한 각 방법의 경우 mesh density가 높아질수록 보다 COMSOL의 결과와 가까워진다. 즉, 에너지를 이용한 방법의 경우 element 개수 28280 이상, Gauss's theorem을 이용한 방법의 경우 element 개수 56560 이상이면 상용 소프트웨어의 결과와 유사해진다. 행렬 연산에 있어서 Gaussian elimination을 적용할 경우 연산시간이 $O(N^3)$ 의 복잡도를 가지고 있음을 고려하여 볼 때, 에너지를 이용한 방법을 적용하여 정전 용량을 계산하는 것이 Gauss's theorem을 적용하는 것보다 실행시간 측면에서 유리하다고 할 수 있다.

향후 본 논문에서 채택된 uniform linear triangular elements 대신 COMSOL 등에서 쓰인 adaptive mesh element(그림 8)를 사용한다면 개선된 결과를 도출할 수 있겠고, HFSS 등 다른 상용 소프트웨어를 사용한 구형 및 FDM을 이용한 다른 구형 역시 의미가 있을 것으로 생각 된다.

[참 고 문 헌]

- [1] J. Jin, The Finite Element Method in Electromagnetics 2nd edition, NJ: John Wiley & Sons, 2002.
- [2] M. Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB 3rd edition, FL: CRC Press, 2009.
- [3] D. Pozar, Microwave Engineering 3rd edition, NJ: John Wiley & Sons, 2004
- [4] S. Judd et al., "An Analytical Method for Calculating Microstrip Transmission Line Parameters," Transaction of Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-18, No. 2, 1970.
- [5] S. Musa et al., "Calculating the Capacitance of Shielded Microstrip Lines," Proceedings of the COMSOL Conference, 2007.