

고정밀 균등자장의 솔레노이드 시스템 개발 및 보정을 위한 고조파 수치해석

김인호, 이세희
 경북대학교 IT대학 전기공학과

Harmonic Analysis for Development and Shimming
 of High Precision and Uniform Magnetic Field in Solenoid System

In-Ho Kim, Se-Hee Lee
 Kyungpook National University

Abstract - 핵자기공명(NMR, Nuclear Magnetic Resonance) 장치의 성능은 자계의 세기와 균일한 정도에 따라 좌우된다. 그리고 균일도를 높이기 위해 자성체를 더하는 작업을 보정(Shimming)이라고 하며 이를 위해서는 기존에 분포하는 자계와 더해지는 자성체에 의해 발생하는 자계의 세기를 부분별로 정확하고 정밀하게 계산하는 것이 요구된다. 하지만 이를 비오-사바르의 법칙(해석해)으로 계산하는 것은 너무 복잡하고 그 대안으로 사용하는 유한요소법 기반의 수치해석 프로그램은 유한요소법 자체가 가진 오차로 인해 정확한 결과를 얻기 어렵다. 따라서 이를 해결하기 위해 가렛(M. W. Garrett)이 제안한 고조파 해석을 Real*16이 적용된 포트란을 사용하여 구하고 그 결과를 해석해의 값 및 수치해석 프로그램 결과와 비교하였다. 이를 통해 자계를 계산함에 있어서 고조파 해석의 타당성을 확인하였다.

1. 서 론

NMR은 고자계 상태에 놓인 원자가 특정한 주파수에 반응하는 현상이며 원자의 종류에 따라 반응하는 주파수가 다르기 때문에 물질의 성분을 분석하는 분야에서 응용된다. 대표적인 장비로는 NMR 분광기와 MRI가 있으며 NMR 장비의 성능은 장비가 발생시킬 수 있는 자계의 세기와 그 균일도에 의해 좌우된다. 그리고 자계의 균일도를 높이는 방식으로는 보정이 있으며 이는 NMR 장비에서 발생되고 있던 자계에 덧붙여진 자성체에 의해 발생하는 자계를 중첩시켜 균일도를 높이는 방식이다. 보정을 하기 위해서는 본래 발생되고 있던 자계와 덧붙여지는 자성체에 의해 발생하는 자계를 정확하게 구해야 한다[1].

도체를 따라 흐르는 전류로 인해 유도되는 자계는 도체가 선이나 단순한 면의 형태일 때는 전자기학 교재에 소개되는 비오-사바르의 법칙으로 구할 수 있지만 복잡한 면이나 부피를 가질 때에는 그 값을 구하기 매우 어렵다. 다른 계산 방법으로 유한요소법이나 유한체적법이 적용된 수치해석 프로그램을 사용할 수 있지만 문제를 풀 때마다 구조물을 생성하고 요소망을 나누어 계산하는 과정이 번거로울 수 있고 유한요소법이나 유한체적법에 내포된 오차와 한계로 인해 정확하고 정밀한 결과를 구하기 어렵다. 본 논문에서는 이런 문제를 해결하기 위해 가렛이 제안한 고조파 해석을 검증해 보았다.

가렛은 균일한 전류가 흐르는 루프 및 솔레노이드에서 발생한 자계의 z축 성분을 구하기 위해 소스항과 자계가 측정되는 지점의 항의 조합을 급수 전개하여 계산하는 고조파 해석을 제안하였다. 따라서 이를 확인하기 위해 일정한 전류가 흐르는 하나의 루프와 정사각형 단면을 갖는 솔레노이드를 가정하고 여기에서 발생하는 자계를 Real*16이 적용된 포트란을 사용하여 고조파 해석을 하고 같은 문제에 대해 해석해 및 수치해석 프로그램으로 나온 값과 비교하였다. 그 결과 루프에 대해서는 해석해의 값과 일치하며 솔레노이드에 대해서는 수치해석 프로그램 결과와 유사함을 확인할 수 있었다.

2. 본 론

2.1 고조파 해석[CGS]

가렛의 고조파 해석은 CGS 단위계를 기반으로 하였으므로 거리는 cm, 전류는 A, 자계는 gauss 단위를 사용한다. 고조파 해석은 축 대칭 자성체에서 발생하는 자계의 z축 성분 B_z 를 소스 항 q_n 과 자계가 측정되는 지점의 항 $r^n P_n$ 의 조합이 급수 전개된 형태로 다음과 같다[2].

$$B_z = 0.2\pi \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} r_p^n P_n \quad (1)$$

여기서 r_p 는 원점에서 측정점까지의 거리, P_n 은 원점을 기준으로 z축과 측정점이 이루는 각 α 의 cosine값을 변수로 가지는 르장드르 다항식이

다. 측정점이 z축 상에 존재하게 되면 $\cos\alpha=1$ 이 되어 르장드르 다항식은 n과 관계없이 항상 1이 되므로 식 (1)은 다음과 같이 정리된다.

$$B_z = 0.2\pi \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} z_p^n \quad (2)$$

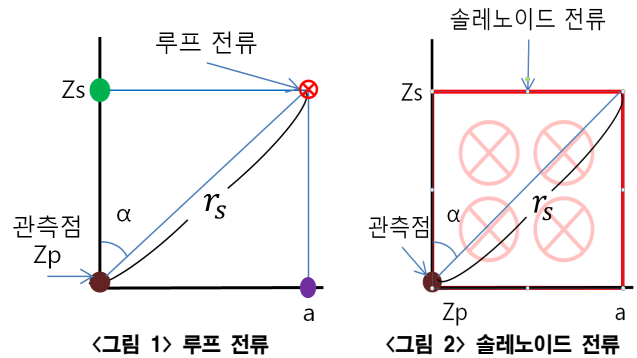
여기서 z_p 는 측정점의 z값이다.

2.1.1 루프 전류의 q와 B_z

루프 전류의 q는 다음과 같다.

$$q_n(F) = is^2 r_s^{-n} P_n' = i(\sin^2\alpha) r_s^{-n} P_n' \quad (3)$$

여기서 i 는 루프에 흐르는 전류, r_s 는 그림 1과 같이 원점에서 소스까지의 거리, α 는 원점을 중심으로 z축과 r_s 가 이루는 각, P_n' 은 $\cos\alpha$ 를 변수로 가지는 르장드르 다항식의 미분형이다[3].



<그림 1> 루프 전류

<그림 2> 솔레노이드 전류

2.1.2 솔레노이드 전류의 q와 B_z

솔레노이드 전류의 q는 다음과 같다.

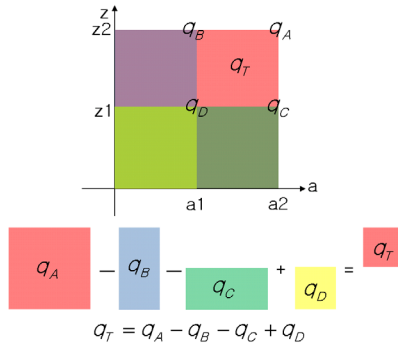
$$\begin{aligned} q_1(C) &= i'' r_s u f_c(\alpha) \\ q_2(C) &= i'' [s - f_c(\alpha)] \\ q_{n+2}(C) &= i'' n^{-1} r_s^{-n} U_{n+2}^* (n > 0) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 i'' 은 전류밀도, r_s 는 그림 2와 같이 원점에서 솔레노이드의 대각선 길이, u 는 $\cos\alpha$, s 는 $\sin\alpha$ 이며 $f_c(\alpha)$ 와 U_{n+2}^* 은 다음과 같다.

$$f_c(\alpha) = \ln(s+1) - \ln u = \ln(a+r) - \ln z = \sinh^{-1}(a/z) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U_2^* &= 1 \\ n U_{n+1}^* &= u^{-1} [(n-1) U_n^* - s^3 P_{n-1}'] \end{aligned} \quad (6)$$

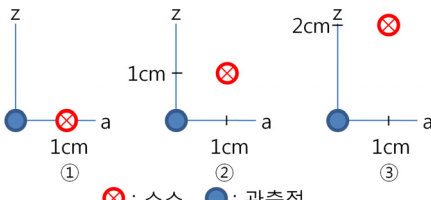
솔레노이드 전류의 q는 위와 같이 구할 수 있지만 실제 솔레노이드는 그림 2와 같은 형태가 아니라 z축이 비어있는 형태이므로 이를 구하기 위해서는 다음 기법을 사용해야 한다. 그림 3과 같이 실제 솔레노이드 전류의 q_T 를 구하기 위해 q_A 에서 q_B 와 q_C 를 빼고 두 번 빠지게 되는 q_D 를 더해준다. 이렇게 되면 내부반경 a_1 , 외부반경 a_2 이고 높이가 z_1 에서 z_2 인 솔레노이드 전류에 의한 q_T 를 구할 수 있다.



〈그림 3〉 실제 솔레노이드 전류의 q 계산 방법

2.2 루프 전류에 의한 자계의 z축 성분 계산

그림 4와 같이 반지름이 1cm이고 원점에서 z축으로 각각 0, 1, 2cm 거리에 위치한 루프 전류에 의해 발생하는 B_z 를 해석해와 수치해, 고조파 해석으로 각각 계산한다. 이때 전류는 편의상 1A로 두었다.



〈그림 4〉 루프 전류

비오-사바르의 법칙을 사용하여 루프 전체를 적분하면 다음과 같은 식이 나온다[4].

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} [T] \quad (5)$$

여기서 I는 전류, a는 루프의 반지름, z는 루프의 중심에서 측정점까지의 거리이다.

루프 도선의 반지름은 0에 수렴한다고 가정하지만 유한요소법은 최소한의 형상이 존재해야 해석이 가능하므로 도선의 반지름을 0.1mm로 두고 축 대칭으로 계산하였다. 이때 요소의 차수는 2차 및 4차 두 가지로 각각 두었다.

해석해와 수치해석 프로그램은 MKS 단위를 사용하므로 결과의 단위는 [T]이다. 따라서 이를 [G]로 변환하여 표 1과 같이 정리하였다. 그리고 오차는 고조파 해석에 대한 수치해석 프로그램 결과의 오차를 의미한다. 이를 통해 고조파 해석은 해석해와 일치하고 수치해석 프로그램 결과는 해석해와 오차가 존재함을 볼 수 있다. 또한 요소의 차수가 높아져도 정확도의 차이를 얻지 못하는 것을 확인하였다.

〈표 1〉 결과 정리

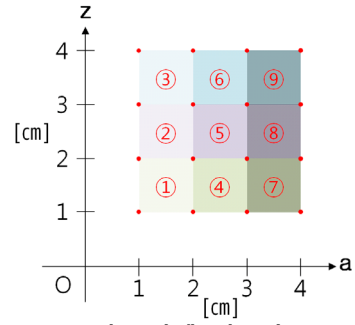
	해석해[G]	수치해석 프로그램[G]		고조파 해석 [G]	오차[%]	
		2th	4th		2th	4th
①	0.628	0.6264	0.6277	0.628	0.255	0.048
②	0.222	0.2219	0.2215	0.222	0.045	0.225
③	0.0562	0.0557	0.0556	0.0562	0.89	1.068

2.3 솔레노이드 전류에 의한 자계의 z축 성분 계산

그림 5와 같이 길이가 1cm인 정사각형을 단면으로 갖는 솔레노이드가 ①에서 ⑨까지의 위치에 존재하고 1A의 전류가 흐를 때 발생하는 B_z 의 값을 수치해석 프로그램과 고조파 해석으로 구하고 그 결과를 비교한다. 이때 수치해석 프로그램은 루프 전류와 동일한 경계조건을 적용하였으며 요소의 차수를 2차 및 4차로 두고 각각 계산하였다.

두 방법에 따른 결과를 표 2와 같이 정리하였다. 수치해석 프로그램의 결과는 유효숫자를 모두 적용한 값이며 Real*16이 적용된 고조파 해석의 결과는 소수점 이하 33자리까지 나온 값을 소수점 이하 7자리까지 정리한 것이다. 루프 전류의 결과와 동일하게 수치해석 프로그램의 결과는 요소의 차수가 높아져도 결과의 정확도가 높아지지 않는 것을 볼 수 있다. 또한 유효숫자를 소수점 이하 6자리까지만 나타낼 수

있다는 점에서 정밀한 결과를 얻지 못한다는 것을 알 수 있다.



〈그림 5〉 솔레노이드 전류

〈표 2〉 결과 정리

	수치해석 프로그램[G]		고조파 해석 [G]	오차[%]	
	2th	4th		2th	4th
①	0.148130	0.148130	0.1495785	0.968	0.968
②	0.056863	0.056863	0.0582836	2.437	2.437
③	0.024965	0.024927	0.0263244	5.164	5.308
④	0.154400	0.154400	0.1583163	2.474	2.474
⑤	0.085322	0.085314	0.0891623	4.307	4.316
⑥	0.045899	0.045818	0.0496724	7.597	7.599
⑦	0.131540	0.131540	0.1391590	5.475	5.475
⑧	0.089273	0.089276	0.0967432	7.722	7.719
⑨	0.056286	0.056287	0.0635793	11.471	11.470

3. 결 론

가렛이 제안한 고조파 해석을 이용하여 루프 전류와 솔레노이드 전류에 의해 발생하는 자계의 z축 성분을 Real*16이 적용된 포트란으로 계산하고 이를 해석해 및 유한요소법 기반의 수치해석 프로그램을 사용해 얻어진 결과와 비교하였다. 이를 통해 루프 전류와 같이 단순한 형상에 서만 정확한 값을 쉽게 계산할 수 있는 해석해와 구조 및 요소망의 생성으로 인한 복잡함과 자체에 내포된 오차를 가지는 유한요소법의 단점을 보완할 수 있다고 판단하였다. 그리고 Real*16 기반의 포트란을 사용하여 수치해석 프로그램이 계산할 수 있는 것보다 더 높은 정밀도를 가지는 결과를 얻을 수 있으므로 계산에 요구되는 시간을 줄이고 수치해석 프로그램이 요구하는 고성능의 컴퓨터 환경을 요구하지 않으며 결과의 정확도를 높이는 방법을 얻게 되었다. 따라서 이 방법을 사용하여 NMR의 보정에서 요구되는 높은 정밀도를 충족시킬 수 있을 것으로 판단되며 실험을 통해 이 방법의 유효성을 확인할 예정이다.

감사의 글

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0003503).

[참 고 문 헌]

- [1] C. J. Snape-Jenkinson, S. Crozier and L. K. Forbes, "NMR Shim Coil Design Utilising a Rapid Spherical Harmonic Calculation Method," ANZIAM J. Vol. 43, pp. 375-389, 2000
- [2] M. W. Garrett, "Thick Cylindrical Coil Systems for Strong Magnetic Fields with Field or Gradient Homogeneities of the 6th to 20th Order," J. Appl. Phys., Vol.38, pp. 2563-2586, 1967.
- [3] M. W. Garrett, "Axially Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Fields. Part I," J. Appl. Phys., Vol.22, pp. 1091-1107, 1951.
- [4] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, "Foundations of Electromagnetic Theory," Addison-Wesley Pub. Co., 1993.