

신뢰도 기반 최적설계를 위한 확률구속조건 평가방법 연구

정기우*, 김동욱*, 정상식*, 성영화**, 김동훈*
 경북대* 한국과학기술원**

A Study of Evaluating Probabilistic Constraints for Reliability-Based Design Optimization

Giwoo Jeung*, Dong-Wook Kim*, Sang Sik Jung*, Young Hwa Sung**, Dong-Hun Kim*
 Kyungpook National University*, Korea Advanced Institute of Science and Technology**

Abstract - 신뢰도 기반 최적설계는 목적함수를 최적화하는 단계와 확률구속조건을 평가하기 위한 최적화 단계로 이루어져 있다. 본 논문에서는 확률구속조건을 평가하는 방법으로 신뢰도 지수 기법과 성능치 기법을 제시하였고, 두 기법을 적용하여 초전도 자기 에너지 저장장치 모델의 신뢰도 기반 최적설계를 수행하였다.

1. 서 론

기존의 확정론적 최적설계(deterministic optimum)는 불확실 요소에 대한 확률통계적인 정보가 없으므로 실제 설계문제에서 불확실 요소로 인하여 목표성능을 만족하지 못하는 경우가 발생한다. 최근 이러한 불확실 요소의 확률정보를 이용하여 설계를 수행하는 신뢰도 기반 최적설계(reliability-based design optimization; 이하 RBDO)의 중요성이 증대되고 있다. RBDO는 구속조건을 만족함과 동시에 목적함수를 최대/최소화하는 기본 개념은 확정론적 최적설계와 같다. 그러나 RBDO는 확률구속조건을 신뢰도를 평가하는 최적화 과정이 포함된 최적설계 과정으로 설계변수를 확률변수로 정의하고 설계 시 발생하는 불확실 요소를 최적설계 과정에 직접 고려하는 최적설계 방법이다. 확률구속조건을 평가하는 방법은 최적화 과정으로 손상확률을 평가하는 방법에 따라 신뢰도 지수 기법(reliability index approach; 이하 RIA)과 성능치 기법(performance measure approach; 이하 PMA)으로 구분한다. RIA는 확률설계변수로 정의된 성능함수의 평균과 표준편차로 정의되는 신뢰도 지수 개념을 도입하여 손상확률을 계산하는 방법이다. 그리고 PMA는 목표성능치를 만족하는 확률성능치의 개념을 도입한 방법으로 신뢰도 지수 기법의 구속조건과 목적함수가 바뀐 것이다. 본 논문에서는 확률구속조건을 평가하는 방법으로 RIA와 PMA를 이용하여 초전도 자기에너지 저장장치(superconducting magnetic energy storage system; 이하 SMES)의 RBDO를 수행하였다[1].

2. 신뢰도 기반 최적설계

2.1 설계문제 정의

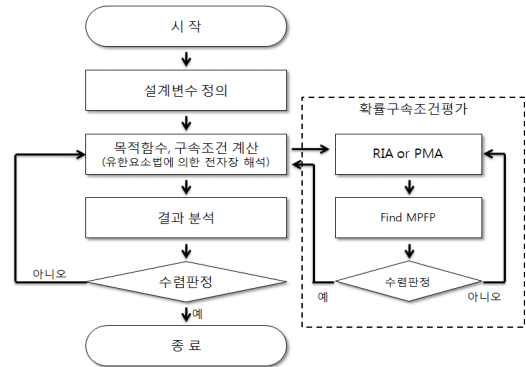
RBDO는 구속조건을 만족시키면서 목적함수를 최적화 단계와 확률구속조건을 평가하는 최적화 단계의 시스템 구조를 가지고 있고, 설계문제를 정식화하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{X}) \\ & \text{Subject to } P_f(G_i(\mathbf{X}) \leq 0) \leq \Phi(\beta_i), i = 1, 2, \dots, n \quad (1) \\ & \mathbf{X}_L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_U \end{aligned}$$

여기서 P_f 는 구속조건이 위반될 손상확률을 나타내고, 확률설계변수 \mathbf{X} 로 표현된 성능함수 $G(\mathbf{X}_i)$ 의 손상영역을 $G(\mathbf{X}_i) \leq 0$ 으로 정의하면 식 (2)로 정의된 결합확률밀도함수(joint-probability density function)를 계산함으로써 구해진다.

$$P_f = P[G(\mathbf{X}_i) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_i) d\mathbf{X} \quad (2)$$

식 (1)에서 $\Phi(\beta_i)$ 확률구속조건에 대해 설계자가 원하는 확률로서 구속조건을 손상확률을 제한하는 목표 손상확률을 의미한다. 식 (1)에서와 같이 RBDO는 각각의 성능함수로 정의된 확률구속조건의 손상확률이 목표 손상확률을 만족하는 확률설계변수에 대한 최적해를 찾는 문제로 정의된다. 따라서 확률구속조건을 평가하기 위하여 손상확률을 계산하는 신뢰도 해석이 요구된다. 이와 같이 목적함수의 최적화 단계와 확률구속조건을 평가하는 최적화 단계로 구성된 이중구조의 RBDO 순서도를 나타내면 그림 1과 같다.



〈그림 1〉 신뢰도 기반 최적설계 순서도

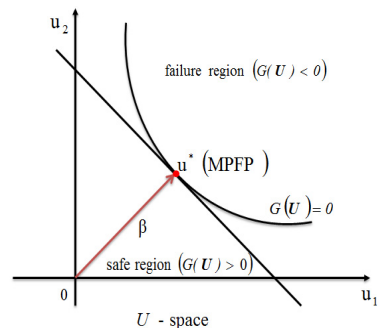
2.2 확률 구속조건 평가방법

2.2.1 신뢰도 지수 기법(RIA)

RIA는 성능함수를 일차근사하여 손상확률을 계산하는 일차근사신뢰도법(first-order reliability method) 중 하나이다. 신뢰도 지수 기법은 그림 2와 같이 표준정규분포 공간에서 원점으로부터 안전영역과 손상영역의 경계면까지의 최단거리인 최대손상가능점(most probable failure point; 이하 MPFP)으로 정의된 손상확률의 상대적지표인 신뢰도 지수를 계산한다. 성능함수의 일차근사식과 신뢰도 지수 β 는 식 (2)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} G &= a_0 + \sum_{i=0}^n a_i (\mu_i + \sigma_i \mathbf{U}_i) \\ \beta &= \mu_G / \sigma_G = |G(\mathbf{U}_i = 0)| / \sqrt{\sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{U}_i} \right)^2} \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 a_0 는 \mathbf{U}_0 에서의 성능함수 값을 나타내고, a_i 는 \mathbf{U}_i 에서 성능함수의 구배지수(gradient index)를 나타낸다.



〈그림 2〉 표준정규분포 공간에서 MPFP(RIA)

신뢰도 지수를 계산하여 손상확률을 계산하는 과정은 식 (3)과 같이 MPFP를 찾기 위한 전형적인 최적화 문제로 정의된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \beta = \sqrt{\mathbf{U}^T \mathbf{U}} \\ & \text{Subject to } G(\mathbf{U}) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

식 (3)의 MPFP는 식 (4)의 반복계산과정을 통하여 계산되고, 여기서 \mathbf{U}^k 는 k번째 반복 점에서의 최적해를 나타낸다.

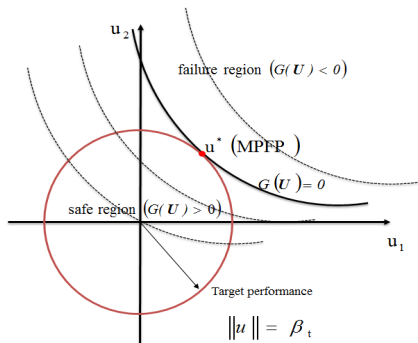
$$\mathbf{U}^{k+1} = \frac{\nabla G(\mathbf{U}^k)^T \mathbf{U}^k - G(\mathbf{U}^k)}{\nabla G(\mathbf{U}^k)^T \nabla G(\mathbf{U}^k)} \nabla G(\mathbf{U}^k) \quad (4)$$

2.2.2 성능치 기법(PMA)

PMA는 목표 손상확률로부터 계산된 신뢰도 지수를 만족하는 점에서 손상함수의 최소값을 목표 성능치로 정의하고 해를 개선하는 과정을 수행하여 MPFP점을 찾는 방법이다. PMA는 RIA의 구속조건과 목적함수가 바뀐 것으로 식 (5)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \pm G(\mathbf{U}) \\ \text{Subject to} \quad & \|\mathbf{U}\| = \beta_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 β_i 는 설계자가 지정한 목표 신뢰도 지수를 나타낸다. PMA는 식 (5)와 같이 원점에서 거리가 β_i 로 계산되는 점들 중 $G(\mathbf{U})$ 를 최소화 하는 점을 찾는 방법이다. 그림 3은 이를 기하학적으로 도식화하여 나타낸 것이다.



〈그림 3〉 표준정규분포 공간에서 MPFP(PMA)

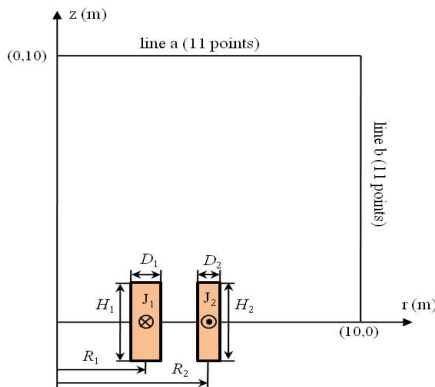
식 (5)의 MPFP는 식 (6)의 반복계산과정을 통하여 계산되고, 여기서 \mathbf{U}^k 는 k번째 반복 점에서의 최적해를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{k+1} &= \beta_i n(\mathbf{U}^k) \\ \text{where } n(\mathbf{U}^k) &= - \frac{\nabla G(\mathbf{U}^k)}{\|\nabla G(\mathbf{U}^k)\|} \end{aligned} \quad (6)$$

3. 적용사례

3.1 SMES모델

설계 대상은 1차 코일과 2차 코일로 이루어진 SMES 모델로서 그림 4에 2차원 평면 모델을 나타내었다. 그림에서 line a와 line b는 모두 21개의 점에서 1 m 간격으로 누설 자기장을 측정하고 측정된 누설 자기장의 값이 최소가 되도록 하는 각 코일 설계변수의 최적 값을 찾는 문제이고, 식 (7)과 같이 설계문제를 정식화 하였다. 고려된 설계문제를 단순화하기 위해서 조건도선에서 발생하는 퀘치(quench)현상은 고려하지 않았다[3].



〈그림 4〉 SMES 해석 모델

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(d) = \sum_{i=1}^{21} |B_{stray,i}(d)|^2 \\ & d = \mu(\mathbf{X}) \\ \text{Subject to} \quad & P_1(G_1(\mathbf{X}) \leq 0) - \Phi(-\beta_i) \leq 0 \\ & P_2(G_2(\mathbf{X}) \leq 0) - \Phi(-\beta_i) \leq 0 \\ & d_L \leq d \leq d_U \\ & G_1(\mathbf{X}) = 1 - \left(\frac{E(\mathbf{X}) - E_0}{0.05 \times E_0} \right)^2 \\ & G_2 = (R_2 - R_1) - \frac{1}{2}(D_2 + D_1) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 d 는 확률변수 \mathbf{X} 의 평균값, $B_{stray,i}$ 는 그림 3의 line a와 line b에서 i 번째 측정 점의 누설 자장 값을 나타낸다. 식 (7)에서 P 는 각 확률구속조건의 손상확률, $\Phi(-\beta_i)$ 는 목표하는 손상확률을 나타내며 5%로 정의 하였다. d_L 은 확률변수의 하한, d_U 는 상한을 나타낸다.

RBDO는 2차 코일의 R_2 , D_2 , H_2 를 확률설계변수로 최적설계를 수행하였고, 각 설계변수의 초기값과 표준편차는 표 1에 제시하였다.

〈표 1〉 SMES 모델의 RBDO 결과

설계변수	하한	상한	초기값	RIA	PMA	표준 편차
R2(mm)	2300	2400	2340	2349.6	2351.4	10
D2(mm)	200	350	310	241.8	237.3	5
H2(mm)	1700	1900	1780	1799.6	1838.2	10
$B_{stray,i}$ (uT)			6772	82	85	
Pf1(%)	-	-	10.11	1.16	4.05	-
Pf2(%)			28.03	7.12×10^{-5}	9.21×10^{-7}	

RIA와 PMA의 확률구속조건 평가 기법을 적용하여 각각의 RBDO를 수행한 결과 목적함수인 21개점에서의 누설 자기장 값은 82 uT, 85 uT로 초기 누설 자기장 값과 비교하였을 때 목표성능에 맞도록 감소한 것을 확인하였다. 또한 두 평가 기법 모두 목표성능인 손상확률 5%를 만족하는 안정적인 설계가 된 것을 표 1의 결과를 통하여 확인하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 신뢰도 기반 최적설계에서 확률구속조건의 신뢰도를 평가하는 방법으로 RIA와 PMA를 제시하였다. 각 확률구속조건 평가방법을 적용하여 SMES의 신뢰도 기반 최적설계를 수행하였고, 두 평가방법 모두 안정적인 설계가 된 것을 확인하였다. 향후 다양한 예제를 통하여 두 기법의 효율성 검증을 통하여 다양한 전기기기 모델의 최적설계에 유용하게 적용할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업지원금을 받아 수행된 것임(No. 2010-0021544)

참고 문헌

- [1] K. K. Choi, B. D. Youn, "An Investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches," Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 126, no. 4, pp. 403-411, 2004.
- [2] Hadlar, A. and Mahadevan, S., Probability, reliability, and statistical methods in engineering design, Wiley: New York, 2000.
- [3] D. H. Kim, J. k. Sykulski, and D. A. Lowther, "Robust optimization utilizing the second-order design sensitivity information," IEEE Trans. Magn., vol. 46, no. 8, pp. 3117-3120, 2010.