

# 내열합금 구조품에서의 국부적 소성변형과 이중후방응력 경화 모델

윤수진\* · 이상연\* · 박동창\* · 윤현걸\*

## Localized Plastic Deformation in Heat-Resistant Alloy and Combined Two-Back Stress Hardening Model

Su-Jin Yun\* · Sang-Yeun Lee\* · Dong-Chang Park\* · Hyun-Gul Yoon

### ABSTRACT

In the present work, FEM analyses are carried out to investigate the fractures occurred within the structural part in the course of combustion experiment. The loss of structural integrity stems from the localized deformation and the damage induced due to a severe change in the thermal load. Moreover, the two-back stress evolution model is proposed using the Armstrong-Frederick and the Phillips' rules to depict the plastic deformation, and the continuum damage mechanics is also incorporated into the present model. It is noted that the present model is able to formulate a wide range of constitutive description with ease. The numerical results depicts that a severe strain localization and damage evolution can be obtained depending on the dominant back stress.

### 초 록

본 논문에서는 유한요소해석을 통해 연소시험 과정 중 발생한 내열 구조품의 파단현상이 분석되었다. 구조 불안정성은 소성변형으로 인한 것으로 이는 급격한 열하중의 변화에서 비롯된 것이다. 한편 소성변형 국부화 현상을 이해하기 위해 Armstrong-Frederick과 Phillips 경화식을 이용, 이중후방응력 구성방정식이 제안되었으며, 또한 본 모델은 연속체 파손역학과 조합되었으며 광범위한 소성변형 거동을 보일 수 있다. 수치해석을 통해 소성변형 집중 현상은 지배적인 후방응력의 전개에 의존하는 것으로 나타났다. 또한 물체 내에서의 파손 현상은 소성변형 집중을 가속화하는 것으로 밝혀졌다.

Key Words: Finite deformation, Damage, Back stress, Kinematic hardening, Localization

### 1. 서 론

다양한 조건에서의 연소화염 특성을 얻기 위해 고온-고압 연소실험이 실시되었으며 본 시험 장치 내부에는 화염안정화장치가 장착되어 있다. 본 구조품은 연료의 연소 시 지속적인 화염을 공급/유지하는 기능을 한다. 본 구조품의 온도상

\* 정회원, 국방과학연구소, 1기술연구본부-5부

† 교신저자, E-mail: sjy1521@hanmail.net

승은 연소실험 중의 지속적인 연료의 연소에 기인하며 외부로부터 고압의 공기/연료 혼합물의 유입에 의해 내부압력이 본 구조품의 앞면에 형성된다. 따라서 본 구조품은 가혹한 고온/고압 환경에 노출되므로 내열합금의 일종인 Ni-Cr 합금인 Inconel 718 소재가 적용되었으며 본 소재는 높은 용융점, 고온 기계적 강도, 연신을 및 강한 내부식성을 특징으로 한다. 하지만 연소시험 종료 후 시험장치를 해체하는 과정에서 Fig. 1에서 보는 바와 같이 본 구조품의 중간 부분에 파단 및 크랙이 발생한 것이 발견되었으며 주로 거터 (gutter)가 서로 교차하는 주변에서 주로 발생되었다.

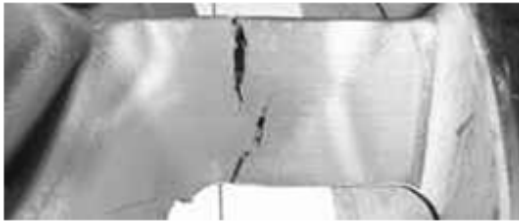


Fig. 1 Typical damage occurred afterward combustion experiment

앞서 언급된 구조품 내에서의 파단 거동을 이해하기 위해 수치해석이 수행되었다. 이와 같은 구조체에서의 비연속성의 발생은 소성변형 집중 현상과 연관 있으며 이 경우 전단 밴드 (shear band) 형성이 발생할 가능성이 높고 더욱이 내부에서의 결함 생성과 밀접한 관련이 있다. 본 연구에서는 연속체 파손역학 (CDM: Continuum Damage Mechanics)과 소성변형 구성방정식과의 조합과 아울러 이중후방응력 (two-back stress) 경화 구성방정식이 제안되었다.

## 2. 구성방정식과 키네메틱스

보다 정확한 소성변형의 예측을 위해서는 보다 적합한 구성방정식이 요구된다. 또한 대변형에 의한 비선형성은 연속체 물체 축의 회전과 미세조직의 변화에서 비롯되는 것으로 항복곡면

의 만곡 형상과 관련이 있으며 이는 이동경화 (kinematic hardening)를 적용하여 근사적으로 해석할 수 있다. 내부 변수 (internal variable)인 후방응력  $\alpha_{ij}$  (back stress)는 항복곡면의 중심의 이동과 미세조직의 재배열 효과를 나타내며 이는 항복곡면 상의 고정된 굴곡도에 기인한 것이다 [1, 2]. 또한 통상적인  $J_2$  유동이론 (flow theory)과 등방경화는 비현실적으로 과대한 소성 변형량에서 전단밴드 생성을 예측하나  $J_2$  변형이론 (deformation theory)은 항복곡면상의 꼭지점 생성을 근사할 수 있어 보다 현실적인 변형량 예측이 가능하다 [3]. 한편 전통적인 Jaumann 객관적 응력률 (objective stress rate)이 적용되면 단순 전단 하에서 응력의 진동이 발생한다 [4]. 이를 극복하기 위해서 객관적인 응력율에 대해 일반적인 연속체 (continuum) 스핀 (spin) 대신 소성 (plastic) 스핀 개념이 고려된 하부구조 (sub-structure) 스핀이 적용되었다 [5].

소성 대변형은 불연속 결함을 동반할 수 있으므로 파손역학이 구성방정식 안에 포함되어야 하며 이는 소재의 강도저하와 관련이 있다 [6]. Bonora [12]에 의한 파손역학 전개식이 본 연구에서 적용되었으며 상태 및 내부 변수들은 유효항을 이용한 결함 인자의 함수로 표현되었다.

Ning과 Aifantis [7]는 일반적인 이동경화식 대신 비선형 Armstrong-Frederick과 Phillips 경화식들을 조합하여 이중성분 후방응력 전개식을 제안하였다. 한편 본 논문의 구성방정식에서 혼합법칙은 단지 후방응력율에만 적용되었으므로 소성변형율과 응력은 단일장으로 표현된다.

대표적 체적요소 (representative volume element)의 강도저하는 결함인자로 표시되며, 등방 (isotropic) 결함의 경우에는 다음과 같다 [8].

$$\phi = (A - \bar{A})/A \quad (1)$$

여기서 상첨자 ('-')는 상태 변수 혹은 내부 상태 변수들은 가상의 무결함 유효상태에서의 물리량을 나타내며  $A$ 와  $\bar{A}$ 는 명목 (nominal)과 유효 (effective) 표면적이다. 그럼 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (1-\phi)\bar{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_e = (1-\phi)\bar{\sigma}_e, \\ E &= \bar{E}(1-\phi)^2\end{aligned}\quad (2)$$

하첨자 'e'는 등가를 나타낸다. 마찬가지로 명목 변형과 유효 변형과의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{1-\phi}\bar{\epsilon}_{ij}^e, \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{1-\phi}d\bar{\epsilon}_{ij}^p \\ d\epsilon_e^p &= \frac{1}{1-\phi}d\bar{\epsilon}_e^p, \quad \epsilon_e^p = \int \frac{1}{(1-\phi)}d\bar{\epsilon}_e^p\end{aligned}\quad (3)$$

상첨자 'e'와 'p'는 각각 탄성 및 소성 상태를 나타낸다. 유효항의 함수로 나타낸 이동 경화에서의 항복함수는 아래와 같다.

$$F = \frac{1}{2}(\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(\bar{s}_{ij} + \bar{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_y^2 \quad (4)$$

여기서  $s_{ij}$ 는 응력 디비에이터이다. 소성변형의 증분과 등가값은 유효소성계수  $\bar{K} = \frac{2}{3}\bar{E}_t$  (effective plasticity coefficient)를 이용하면;

$$\bar{d}\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{1}{\bar{K}}\frac{\bar{s}_{ij}\bar{s}_{kl}}{\bar{\sigma}_y^2}d\bar{\sigma}_{kl}, \quad \bar{d}\epsilon_e^p = \frac{1}{\bar{K}}\frac{\bar{s}_{kl}}{\bar{\sigma}_y}d\bar{\sigma}_{kl} \quad (5)$$

그럼, 명목 소성변형 증분은:

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{1-\phi}\frac{3}{2}\frac{1}{\bar{K}}\frac{\bar{s}'_{ij}\bar{s}'_{kl}}{\bar{\sigma}_y^2}d\bar{\sigma}_{kl}, \quad d\epsilon_e^p = \frac{1}{1-\phi}\frac{1}{\bar{K}}\frac{\bar{s}'_{kl}}{\bar{\sigma}_y}d\bar{\sigma}_{kl} \quad (6)$$

후방응력은 비선형 Armstrong-Frederick [9]과 선형 Phillips [10] 경화식에 따라 전개되는 것으로 가정되었으며 여기서  $\beta$ ,  $\gamma$ 와  $\zeta$ 는 각 후방응력 전개식에서의 경화계수들이다:

$$\begin{aligned}d\bar{\alpha}_{ij}|_1 &= \beta d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \gamma \bar{\alpha}_{ij} d\bar{\epsilon}_e^p, \\ d\bar{\alpha}_{ij}|_2 &= \zeta d\bar{s}_{ij}\end{aligned}\quad (7)$$

소성변형이 단일 이동경화식으로 해석되면 여러 가지 문제에 봉착할 수 있다. 따라서 Shi [11]는 다음과 같이 두 개의 성분의 조합을 제안하였다:

$$\begin{aligned}d\epsilon^p &= fd\epsilon_1^p + (1-f)d\epsilon_2^p, \\ \sigma &= \eta\alpha + (1-\eta)\sigma_2\end{aligned}\quad (8)$$

Ning과 Aifantis [7]는 일반적인 이동경화식 대신 두 개의 이동경화식을 조합하여 이중성분 (two component) 후방응력 전개식을 제안하였으며 각각의 경화 계수들도 정의하였다.

$$\begin{aligned}d\epsilon^p &= fd\epsilon_1^p + (1-f)d\epsilon_2^p, \\ \sigma &= f\sigma_1 + (1-f)\sigma_2, \quad \alpha = f\alpha_1 + (1-f)\alpha_2\end{aligned}\quad (9)$$

여기서  $f$  혹은  $\eta$ 는 전형적인 혼합법칙에서의 혼합분률이다. 위의 모델은 후방응력 뿐만이 아니라 소성변형율을 포함하여 현재 상태 응력에 대해서도 혼합법칙을 적용함으로써 얻어졌다. 두 가정은 모두 다수의 물질인자들이 요구되며 그 결정도 용이하지 않다. 더욱이 응력, 후방응력 및 변형율에 대한 혼합법칙의 적용은 단일의 연속체에서 한 개 이상의 응력장과 변형율장이 존재한다는 것을 의미하므로 물리적으로 비현실적인 요소를 내포하고 있다.

본 연구에서도 흡사하게 후방응력의 전개는 Armstrong-Frederick 경화식과 Phillips 경화식과의 조합에 따르는 것으로 가정되었다. 하지만 혼합법칙은 단지 객관적 후방응력율에 대해서만 적용되었으므로 소성변형율과 응력은 단일 장으로 표현된다. 또한 본 구성방정식은 제한된 수의 인자의 조절로 비교적 간단하게 광범위한 소성 변형 현상을 구현할 수 있는 이점이 있다. 본 연구에서 혼합법칙의 적용은 아래와 같이 유효항을 이용 후방응력 증분에 국한되었다:

$$\begin{aligned}d\bar{\alpha}_{ij}|_m &= fd\bar{\alpha}_{ij}|_1 + (1-f)d\bar{\alpha}_{ij}|_2 = \\ &f(\beta d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \gamma \bar{\alpha}_{ij} d\bar{\epsilon}_e^p) + (1-f)\zeta d\bar{s}_{ij}\end{aligned}\quad (10)$$

여기서 인자  $f$ 는 지배적인 후방응력을 결정한다. Phillips 계수는 주어진 것으로 가정되었으며 Armstrong-Frederick의 계수는 이에 따라 결정된다. 또한 일치 조건 (consistency condition)을 통해서 물질인자들은 엄격하게 결정되었다.

$$\bar{s}'_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \bar{s}'_{ij} (f\bar{\beta}d\bar{\varepsilon}_{ij}^p - f\bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij}^p) - \bar{s}'_{ij} (1-f)\bar{\zeta}d\bar{s}_{ij} = 0$$

$$\bar{K} = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} \left[ \bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij} \frac{\bar{s}'_{ij}}{\bar{\sigma}_y} \right] \quad (11)$$

$$\bar{K}_t = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} (\bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij}), \quad \bar{K}_c = \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} (\bar{\beta} + \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij}) \quad (12)$$

하첨자  $t$ 와  $c$ 는 각각 인장과 압축을 의미한다. 그럼 Armstrong-Frederick식의 경화계수는 아래와 같이 얻어질 수 있다.

$$\bar{\beta} = \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_c + \bar{K}_t}{2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_c - \bar{K}_t}{2\bar{\alpha}_s} \quad (13)$$

$\alpha_s$ 는 역하중 (reverse loading) 시의 계수이다. 그럼 최종 후방응력은;

$$(\bar{\alpha}_{ij}^p \bar{\alpha}_{ij}^p)^{1/2} = \left[ \frac{9\bar{\beta}^2}{4\bar{\gamma}^2} + \frac{2(1-f)^2}{3} \frac{\bar{\zeta}^2}{\bar{\gamma}^2} \bar{E}_t^2 + \frac{2(1-f)\bar{\beta}\bar{\zeta}}{f\bar{\gamma}} \frac{d\bar{E}^p}{d\bar{\varepsilon}_e^p} \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$0 < f \leq 1, \quad d\bar{E}^p \equiv d\bar{\varepsilon}_{ij}^p d\bar{s}_{ij}.$$

$J_2$  변형이론이 적용되므로 시컨트 (secant) 모듈러스와 접선 (tangential) 모듈러스가 요구되며 결합인자의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e^p} = \frac{(1-\phi)\bar{\sigma}_e}{\int \frac{1}{1-\phi} d\bar{\varepsilon}_e^p} \equiv (1-\phi)^2 \bar{E}_s$$

$$E_t = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e^p} = \frac{d\sigma_e}{d\bar{\sigma}_e} \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\varepsilon}_e^p} \frac{d\bar{\varepsilon}_e^p}{d\varepsilon_e^p} \equiv (1-\phi)^2 \bar{E}_t \quad (15)$$

응력 증분과 변형 증분과의 관계식은:

$$d\varepsilon_{ij} = (L_{ijkl} + C_{ijkl}) d\sigma_{kl}, \quad R_{ijkl} = L_{ijkl} + C_{ijkl} \quad (16)$$

여기서  $L_{ijkl}$ 과  $C_{ijkl}$ 는 각각 탄성 및 소성계수를 의미한다. 유효항을 이용하면 탄성계수 텐서는:

$$C_{ijkl} = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \left( \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \frac{s'_{ij} s'_{ikl}}{\sigma_y^2} \right] \quad (17)$$

$$C_{ijkl} = \frac{1}{(1-\phi)^2} \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{\bar{E}_s} - \frac{1}{\bar{E}} \right) \left( \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\bar{E}_t} - \frac{1}{\bar{E}_s} \right) \frac{\bar{s}'_{ij} \bar{s}'_{ikl}}{\bar{\sigma}_y^2} \right]$$

따라서 변형율과 응력율은 다음과 같다.

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{(1-\phi)^2} (\bar{L}_{ijkl} + \bar{C}_{ijkl}) d\sigma_{kl}$$

$$d\sigma_{kl} = (1-\phi)^2 (\bar{L}_{ijkl} + \bar{C}_{ijkl})^{-1} d\varepsilon_{ij}.$$

응력율은 하부구조 스핀 텐서에 대해서 동회전 (co-rotation)으로 나타내며 이는 순수한 강제 회전을 의미한다. 현상학적인 소성 스핀은 다음과 같으며 또한 소성 스핀은 흡사하게 후방응력과 객관적 응력율로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$W_{ij}^p|_1 = \eta (\alpha_{ik} D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj}),$$

$$W_{ij}^p|_2 = \xi (\alpha_{ik} \dot{\sigma}_{kj}^p - \dot{\sigma}_{ik}^p \alpha_{kj}) \quad (18)$$

여기서  $D^p$ 는 소성변형율이다. 변형 에너지 등가 원리를 토대로 다음과 같이 각 후방응력 성분에 대한 조합이 본 연구에 적용되었다.

$$W_{ij}^p|_m = [W_{im}^p|_1 \alpha_{mk}|_1 + W_{im}^p|_2 \alpha_{mk}|_2] \alpha_{kj}^{-1}|_m \quad (19)$$

응력과 후방응력에 대한 동축 회전율은 하부 구조 스핀에 의해 표현되며 그 식은 아래와 같다:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \overset{\bullet}{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj},$$

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ij} = \overset{\bullet}{\alpha}_{ij} - \Omega_{ik} \alpha_{kj} + \alpha_{ik} \Omega_{kj} \quad (20)$$

$$\Omega_{ij} = W_{ij} - W_{ij}^p \Big|_m, \quad W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (21)$$

비례하중 (proportional loading) 조건에서 결함 인자의 적분으로 다음의 관계식을 얻는다 [12].

$$\phi = \phi_0 + (\phi_{cr} - \phi_0) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\ln(\varepsilon^p / \varepsilon_{th}^p)}{\ln(\varepsilon_{cr}^p / \varepsilon_{th}^p)} h \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right) \right]^\alpha \right\},$$

$$h \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right) = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^2, \quad \sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (22)$$

여기서  $\nu$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_{cr}$ ,  $\varepsilon_{th}^p$ 는 각각 Poisson 비, 초기 결함, 극한 결함, 극한 등가 소성 변형량 및 결함 발생 개시의 소성변형을 나타낸다.

### 3. 수치해석 결과

ABAQUS V. 6.6 explicit를 이용 유한요소 수치해석 되었다. 소성변형 거동은 Fig. 2와 같으며, 거터가 교차하는 지점에서 높게 발생하고 있어 실제 현상과 거의 일치하는 것이 관찰된다.

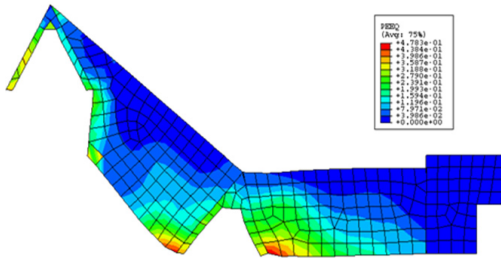


Fig. 2 Distribution of equivalent plastic strain (peeq) obtained at elevated temperature

한편 결함의 진전과 구성방정식의 효과를 명확하고 나타내기 위해 변형을 독립 등은 조건이 적용되었다. 등가 소성변형의 분포는 Fig. 3에서 보는 바와 같으며 결함 인자가 소성변형 구성방정식에 포함되면 보다 현실적인 소성변형 국부화 현상을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

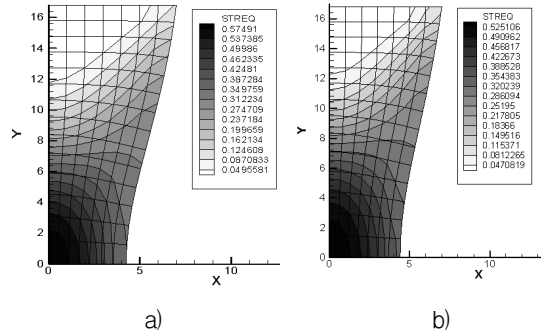


Fig. 3 Deformation of Inconel 718 tensile specimen showing equivalent plastic strain (STREQ) with fractional factor 0.5: a) with damage ( $\phi \neq 0$ ), and b) without damage ( $\phi = 0$ )

혼합분류는 지배적인 후방응력은 혼합분류와 Phillips 계수에 의해 결정된다. 등가 소성변형과 결함인자의 분포는 Fig. 4에서 보여주며 혼합분류의 증가에 따라 소성변형이 국부적으로 집중됨을 알 수 있다.

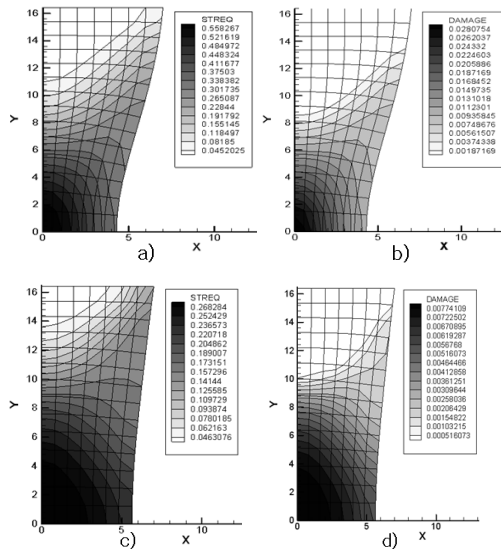


Fig. 4 Effect of fractional factor (f) on distribution of: a) equivalent plastic strain (f=0.9), b) damage factor (f=0.9), c) equivalent plastic strain (f=0.1), and d) damage factor (f=0.1)

혼합분류에 따른 등가 소성변형과 결함 인자의 변화를 Fig. 5에서 보여주며 혼합분류의 증가

에 따라 소성변형과 결함인자의 증가는 매우 급격하다. 후방응력의 전개는 Phillips 경화 계수에 의해서도 영향을 받을 수 있으며 그 결과는 Fig. 6에서 보는 바와 같다. Phillips 경화계수가 증가할수록 국부적 소성변형과 결함 인자는 다소 감소하나 광범위한 Phillips 경화 계수의 제어에도 그 영향에 비해서 거의 미미하다.

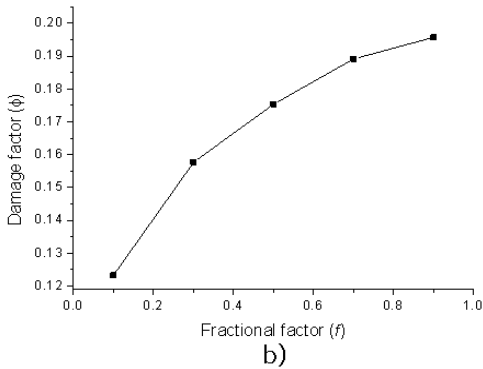
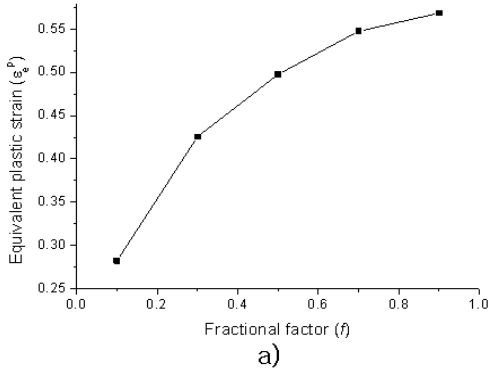


Fig. 5 Variation of a) equivalent strain and b) damage factor at center with respect to  $f$

응력 모델이 개발되었다. 또한 연속체 파손역학과 조합되어 광범위한 소성변형 거동들에 대해 분석되었다. 수치해석을 통해 결함인자의 전개로 국부적 소성변형은 증가하는 것으로 밝혀졌으며 더 나아가서 Armstrong-Frederick 경화식의 영향이 지배적일수록 변형 집중과 결함의 증가가 뚜렷하다.

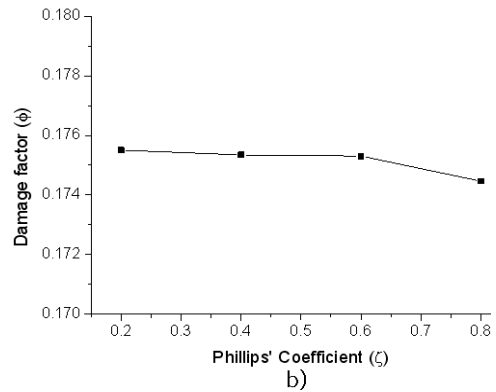
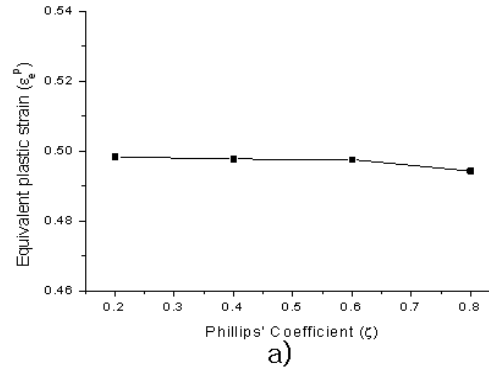


Fig. 6 Variation of a) equivalent strain and b) damage factor at center with respect to  $\zeta$

#### 4. 결 어

본 연구에서는 연소시험 과정 중에서 발생한 내열 구조물의 파단에 대해서 분석되었다. 구조물의 파손은 가혹한 열환경의 변화에 의해서 거터 교차부위에서의 국부적 소성변형의 집중에 말미암은 것으로 밝혀졌다. 더욱이 소성변형 국부화에 대한 연구를 위해 Armstrong-Frederick 경화식과 Phillips 경화식을 이용하여 이중 후방

#### 참 고 문 헌

1. Aifantis E.C., The Physics of Plastic Deformation, Int. J. Plasticity, 1987; 3 (3): pp. 211~247
2. Paulun J.E. and Pecherski R.B., On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite deformation plasticity, Int. J.

- Plasticity, 1987; 3 (4): pp. 303~314
3. Kuroda M., Plastic spin associated with a corner theory of plasticity, *Int. J. Plasticity*, 1995; 11 (5): pp. 547~570
  4. Lee E.H., Finite Deformation Effects in Plasticity Analysis, Numerical Analysis of forming Processes, Ed. J. F. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood and J. M. Alexander, John Wiley & Sons Ltd., 1984; pp. 373~391
  5. Dafalias Y.F., Corotational Rates for Kinematic hardening at Large Plastic Deformation, *J. App. Mech.*, 1983; 50: pp. 561~565
  6. Abu Al-Rub R. K. and Voyiadjis G. Z., On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials, *Int. J. Solids and Structures*, 2003; 40 (11): pp. 2611~2643
  7. Ning J. and Aifantis E. C., On anisotropic finite deformation plasticity Part II. A two-component model, *Acta Mechanica*, 1994; 106: pp. 73~85
  8. Voyiadjis G.Z. and Park T., Kinematics description of damage for finite strain plasticity, *International J. Engng Sci.*, 1999; 56 (4): pp. 483~511
  9. Mroz Z., Shrivastava H.P. and Dubey R.N., A Non-Linear Hardening Model and Its Application to Cyclic loading, *Acta Mechanica*, 1976; 25: pp. 51~61
  10. Phillips A., Tang J. L., and Ricciuti M., Some New Observation on Yield Surfaces, *Acta Mechanica*, 1974; 20:23~39
  11. Shi M.F., Gerdeen J.C., and Aifantis E.C., On finite deformation plasticity with directional softening Part II. Two-component model, *Acta Mechanica*, 1993; 101: pp. 69~80
  12. Bonora N., A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure, *Engng. Fracture Mech.*, 1997; 58 (1/2): pp. 11~28