

미네랄과 콜라겐으로 구성된 골조직의 유효탄성계수 예측

The bounds using eigenvalues for estimating the effective elastic moduli of bone tissue consisting of mineral and collagen

*윤원석¹, #윤영환¹

*W. S. Yoon¹, #Y. J. Yoon(yyoon@hanyang.ac.kr)¹

¹한양대학교 기계공학부

Key words : Effective elastic moduli, eigenvalue, Voigt, Reuss

1. 서론

골조직(bone tissue)은 인장 실험과 비틀림 실험 등의 실험적인 방법을 통해서 직교 이방성(orthotropic)¹ 혹은 횡방성(transversely isotropic)²의 물성치를 측정할 수 있다. 실험값으로 결정된 골조직의 물성치는 나노 크기(nano scale)에서 마이크로의 크기(micro scale)로의 배열에 따라서 그 이방성이 결정된다³

미시적인 크기에서 콜라겐(collagen)과 미네랄(mineral)은 골조직을 구성하는 주요 물질이다. 미네랄은 뼈의 강도 부분에 있어서 콜라겐에 비하여 큰 응력을 부담 한다. 미네랄 보다 작은 응력을 부담하는 콜라겐은 힘은 분산시키거나 전달해주는 특성을 띤다.⁴

미네랄과 콜라겐이 다른 특성을 갖고 있기 때문에 골조직 내 두 가지 물질의 분포는 뼈의 물성치에 큰 영향을 미친다. 여기서 우리는 골조직을 균질한(homogeneous) 형태의 미네랄과 콜라겐으로 이루어진 복합 재료라 간주하고, Voigt와 Reuss bounds를 이용하여 유효탄성계수를 예측한다.

2. 유효탄성 계수의 경계값 설정

뼈는 항상 같은 미네랄과 콜라겐의 분포를 가질 수 없기 때문에 뼈의 탄성계수를 정확히 산출하기 어렵다. 따라서 뼈의 탄성계수를 측정하기 위해서는 최대와 최소의 범위를 설정해서 유효탄성계수(effective elastic moduli)를 구하는 방법이 효과적이다.

Voigt과 Reuss 모델은 두 가지 물질로 이루어진 복합 물질에서 탄성계수의 경계값(bound)을 설정하는데 자주 쓰이는 모델이다. Voigt 모델은 Fig1(a)에서 볼 수 듯이 균일 변형률(uniform strain)을

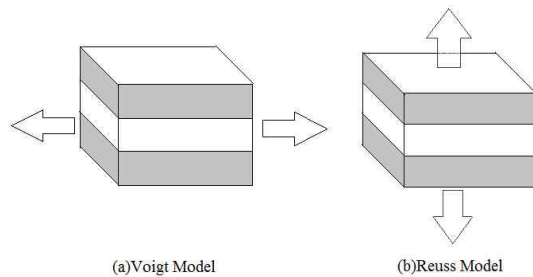


Fig. 1 (a) Uniform strain model of two phases(Voigt Model) (b) Uniform stress model of two phases(Reuss Model)

조건으로 하기 때문에 가장 큰 값의 탄성계수의 범위 조건(upper bound)로 설정할 수 있다.

반대로 Reuss모델은 Fig. 1(b)처럼 균일 응력(uniform stress)을 조건으로 하기 때문에 가장 낮은 탄성계수의 범위(lower bound)로 생각할 수 있다.

3. 경계값 계산

Voigt 모델과 Reuss 모델을 통해서 경계 조건을 설정한 후 뼈의 유효탄성계수를 측정하기 위해서 변형률 에너지(strain energy)로부터 고유값(eigen values)을 유도한다. 그러면 고유값은 다음의 부등식을 형성한다.⁵

$$A_k^R \leq A_k^{eff} \leq A_k^V \quad (1)$$

설정된 부등식은 총 다섯 개이며 이 중 c_{44}^{eff} 만이 정확한 범위를 갖는 반면 나머지 c_{11}^{eff} , c_{12}^{eff} , c_{13}^{eff} 그리고 c_{33}^{eff} 는 나머지 부등식 내에서 서로 연립되어 있다. 연립된 부등식을 풀기 위해서는 몇 가지 가정이 필요하며, 가정을 설정하여서 5개의 부등식을 풀어내었다.

Table 1 The experimentally measured orthotropic elastic constants of cortical bone from Ashman et al.(1984)

	E_1 (Gpa)	E_2 (Gpa)	E_3 (Gpa)	G_{12} (Gpa)	G_{23} (Gpa)	G_{13} (Gpa)
Ashman et al.	12.0	13.4	20.0	4.53	5.61	6.23
	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}
	0.376	0.222	0.235	0.422	0.371	0.350

4. 결론

유효탄성계수를 구하기 위해 부등식들을 풀 때 가장 먼저 c_{13}^{eff} 의 양수, 음수의 여부를 가정한다. c_{13}^{eff} 가 양수인 경우에 c_{33}^{eff} 는 반드시 양수를 갖아야 부등식이 성립한다. c_{13}^{eff} 가 음수인 경우는 $c_{11}^{eff} + c_{12}^{eff}$ 와 c_{33}^{eff} 가 반드시 각각 양수이어야 하고 $c_{11}^{eff} + c_{12}^{eff} > c_{33}^{eff}$ 라는 조건을 만족해야한다. 이를 Table 1 상의 재료의 물성치를 갖고 값을 구해내면 c_{13}^{eff} 가 음수일 때, $-10.538 \leq c_{13} \leq -10.344$ 를 만족한다. 이때 요소 c_{11}^{eff} , c_{12}^{eff} 그리고 c_{33}^{eff} 는 각각 $18.26 \leq c_{11}^{eff} \leq 18.323$ 과 $9.19 \leq c_{12}^{eff} \leq 9.257$ 그리고 $28.933 \leq c_{33}^{eff} \leq 29.047$ 의 값을 갖는다.

두 가지 경우를 제외하고 다른 조건을 갖는 경우에는 모두 가정을 위배하므로 적합하지 않다. 이 결과값은 각각의 모든 탄성 텐서 요소에 대한 부등식을 일반화 할 수 없지만 두 가지 경우를 만족하면 다음과 같은 결과치로 부등식을 형성시킬 수 있다.

후기

본 연구는 한국연구재단 연구비 (2010-0023070)의 지원에 의해서 이루어졌습니다.

참고문헌

1. Ashman, R.B., Cowin, S.C., Van Buskirk, W.C. and Rice, J.C. , "A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone," Journal of Biomechanics, **17**, 349-361, 1984.
2. J. Lawrence Katz, "Hard tissue as a composite material--I. Bounds on the elastic behavior," Journal of Biomechanics, **4**, 455-473, 1971.
3. Yoon, Y.J., Cowin, S.C, "The estimated elastic constants for a single bone osteonal lamella," Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, **7**, 1-11, 2008b.

4. Baohua Ji, "A study of the interface strength between protein and mineral in biological materials," Journal of Biomechanics, **41**, 259-266, 2008.
5. Yoon, Y.J., Cowin, S.C, "Estimation of the effective transversely isotropic elastic constants of a material from known values of the material's orthotropic elastic constants," Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, **1**, 83-93, 2002a