

로그변환 파동장을 이용한 주파수 영역 완전 파형역산에서의 효율적인 가우스-뉴턴법 구현

손우현¹⁾, 편석준²⁾, 신창수¹⁾

¹⁾서울대학교 에너지시스템공학부, son0228@gpl.snu.ac.kr

²⁾인하대학교 에너지자원공학과

Implementation of Gauss-Newton method using conjugate gradient in the Frequency-domain full waveform inversion

Woohyun Son¹⁾, Sukjoon Pyun²⁾ and Changsoo Shin¹⁾

¹⁾Dept. of Energy Systems Engineering, Seoul National University

²⁾Dept. of Energy Resources Engineering, Inha University

서론

탄성과 완전 파형역산 이론은 오래 전부터 정립되어 왔지만, 컴퓨터 계산 용량의 한계로 1980년 대 이전에는 활발한 연구가 진행되지 못하였다. Tarantola (1984)가 파동방정식의 수반행렬 특성에 기반한 그래디언트 계산 알고리즘을 제안한 이후부터 탄성과 완전 파형역산이 효율적으로 수행되었다. Tarantola의 방법은 야코비 (Jacobian) 행렬을 직접적으로 계산하지 않기 때문에 효율적이지만, 그래디언트 기법이 갖고 있는 근본적인 한계점을 지니고 있다. 많은 연구자들은 적절한 그래디언트 방향을 계산함과 동시에 방대한 메모리 용량과 계산 시간을 최소화하기 위해 CG (conjugate gradient) 알고리즘을 기초로 한 방법을 제안하였다. CGLS (conjugate gradient least square) 법이라고도 불리우는 이 방법은 야코비 행렬을 직접적으로 계산하거나 저장할 필요가 없는 장점이 있다. MT (magnetotelluric) 문제에서 Mackie and Madden (1993)은 최소자승 역산 문제를 푸는 선형 CG법을 제안하였다. CG법을 이용하여 최소자승 문제를 푸는 이러한 방법은 탄성과 파형역산에서도 많이 적용되고 있다(Chen et al., 2007, Epanomeritakis et al., 2008). 이 방법을 적용하여 가우스-뉴턴법이라고 부르는 선형화된 완전 파형역산이 효율적으로 수행될 수 있다.

본 연구에서는 로그 변환 파동장(Shin and Min, 2006)을 이용한 완전 파형역산에서 가우스-뉴턴법을 적용하였다. 본 연구에서 제안한 알고리즘의 장점을 확인하기 위해 SEG/EAGE 암염동 모델 을 이용하여 테스트하고 최대 경사법의 역산 결과와 비교하였다.

가우스-뉴턴법

주파수 영역 파형역산에서 목적함수는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e}^* \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{u}$, \mathbf{d} 와 \mathbf{u} 는 관측 파동장 벡터와 모델링 파동장 벡터이고, $*$ 는 켈레 복소수를 의미한다. 식 (1)의 목적함수를 최소화하는 변수 벡터 \mathbf{p} 를 구하기 위해서 선형화된 최소 문제를 반복적으로 푸는 가우스-뉴턴법을 적용한다. 모델링한 파동장 \mathbf{u} 는 테일러 급수를 이용하여 1차 미분항까지 전개하면 다음과 같다.

$$E = [\mathbf{d} - \mathbf{u}_0 - \mathbf{J}\Delta\mathbf{p}]^T [\mathbf{d} - \mathbf{u}_0 - \mathbf{J}\Delta\mathbf{p}]^* \quad (2)$$

여기서 \mathbf{u}_0 는 초기 속도 모델을 사용하여 모델링한 파동장 벡터, \mathbf{J} 는 모델 변수들에 대한 파동장의 민감도를 나타내는 야코비 행렬, $\Delta\mathbf{p}$ 는 변수 벡터의 변화량이다. 최소자승 원리를 적용하여 식 (2)를 $\Delta\mathbf{p}$ 의 각 요소에 관해서 미분하고, 이를 0으로 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J}^* \Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}^T \mathbf{e}_0 \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{d} - \mathbf{u}_0$. 식 (3)을 풀면 모델 변수들의 변화량 벡터를 얻을 수 있다.

로그 파동장을 이용한 가우스-뉴턴법의 개선

앞 절과 같은 방식으로 로그 파동장을 이용한 파형역산 공식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_2}{\partial p_m} \\ M & M & O & M \\ \frac{\partial u_r}{\partial p_1} & \frac{\partial u_r}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_r}{\partial p_m} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{u_1 u_1^*} & 0 & L & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_2 u_2^*} & L & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & \frac{1}{u_r u_r^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_2}{\partial p_m} \\ M & M & O & M \\ \frac{\partial u_r}{\partial p_1} & \frac{\partial u_r}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_r}{\partial p_m} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ M \\ \Delta p_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_2}{\partial p_m} \\ M & M & O & M \\ \frac{\partial u_r}{\partial p_1} & \frac{\partial u_r}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_r}{\partial p_m} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{u_1} \left(\ln \frac{d_1}{u_1} \right)^* \\ \frac{1}{u_2} \left(\ln \frac{d_2}{u_2} \right)^* \\ M \\ \frac{1}{u_r} \left(\ln \frac{d_r}{u_r} \right)^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{u} 는 모델링 파동장, \mathbf{d} 는 관측 파동장, \mathbf{p} 는 모델 변수, r 은 수신기 개수, m 은 변수의 개수이다. 식 (4)에서 야코비 행렬을 얻기 위해 파동 방정식을 선형 대수 방정식으로 정의하고, 양변을 p_1 에 관해서 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} \\ M \\ \frac{\partial u_n}{\partial p_1} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial p_1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ M \\ u_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

이와 같은 과정으로 p_2 부터 p_m 까지 수행하면 야코비 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_2}{\partial p_m} \\ M & M & O & M \\ \frac{\partial u_n}{\partial p_1} & \frac{\partial u_n}{\partial p_2} & L & \frac{\partial u_n}{\partial p_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ M & M & O & M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & 1 & 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{V} \tag{7}$$

식 (4)에 식 (7)를 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{V}^T\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{U}_a(\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{V})^* \Delta\mathbf{p} = \mathbf{V}^T\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{e}_a \tag{8}$$

여기서

$$\mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{9}$$

그리고

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_1 u_1^*} & 0 & L & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_2 u_2^*} & L & 0 \\ M & M & 0 & M \\ 0 & 0 & L & \frac{1}{u_r u_r^*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_1} \left(\ln \frac{d_1}{u_1} \right)^* \\ \frac{1}{u_2} \left(\ln \frac{d_2}{u_2} \right)^* \\ M \\ \frac{1}{u_r} \left(\ln \frac{d_r}{u_r} \right)^* \end{bmatrix} \tag{10}$$

식 (8)을 다음과 같이 간단한 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{p} = \mathbf{g} \tag{11}$$

$\Delta\mathbf{p}$ 는 CG 법(Golub and Loan, 1996)을 적용하여 식 (11)을 풀면 구할 수 있다.

수치 예제

SEG/EAGE 암염동 모델의 A-A 라인의 단면에 대해 본 연구에서 제안한 알고리즘의 테스트를 수행하였다(Fig. 1a). 인공합성 자료를 생성하기 위해서 주파수 영역에서 0.2 Hz 부터 12 Hz 까지 총 60개의 주파수를 선택하고, 유한 요소법을 이용한 모델링을 실시하였다. 20 m의 격자 간격으로 779 x 209 모델 격자를 사용했다. 지표면에 779 개의 수신기를 배열하여 155 개의 송신원 모음을 생성했다. 초기 속도 모델은 1.679부터 4.45 km/s 까지 깊이에 따라 선형적으로 증가한다. Fig. 1b는 그래디언트 법으로 2000번 반복 역산을 수행하여 얻은 속도 모델이고, Fig. 1c는 Gauss-Newton 법으로 300번 반복 역산한 결과이다. Fig. 1b와 1c에서 그래디언트 법은 암염동 하부 속도 구조를 역산하는데 실패한 반면, Gauss-Newton 법은 실제 모델과 유사한 구조를 보여준다. Fig. 2는 SEG/ EAGE 암염동 모델 역산에 대한 위상의 RMS 오차를 보여주며, Gauss-Newton 법이 그래디언트 법에 비해 상당히 향상된 수렴속도를 보인다. 이러한 결과는 제안한 Gauss-Newton 법이 고대비 속도 모델을 역산할 때 효율적이고 견고(robust)하다는 것을 의미한다.

결 론

본 연구에서는 로그 목적함수에 대해 CG 법을 적용하여 근사 Gauss-Newton 법을 제안하였다. 로그 목적함수 적용 시 수치적 불안정성을 다룰 필요가 있지만, 이는 경험적인 필터링 기법으로 쉽게 처리할 수 있다. 수치 예제를 통해 로그 파동장을 이용한 Gauss-Newton 법이 성공적으로 수행됨을 확인 하였고, 암염 구조와 같은 고대비 속도 모델에 대한 수렴 속도가 향상됨을 알 수 있었다. 중요한 결과는 로그 파동장을 이용한 Gauss-Newton 법이 암염동 하부의 저속도 구조를 제공한다는 것이다. 이는 본 연구의 방법이 암염동 하부 구조를 묘사할 수 있고, 참 진폭 회수를 적절하게 다룰 수 있음을 의미한다.

사 사

본 연구는 2010년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지 기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No. 0456-20090023)

참고 문헌

- Chen, P., Jordan, T. H. and Zhao, L., 2007. Full three-dimensional tomography: a comparison between the scattering-integral and adjoint-wavefield methods. *Geophys. J. Int.*, 170: 175-181.
- Epanomeritakis, I., Akcelik V., Ghattas, O. and Bielak, J., 2008. A Newton-CG method for large-scale three-dimensional elastic full-waveform seismic inversion. *Inverse Problems*, 24: 034015 (26pp).
- Golub, G. H. and Van Loan, C. F., 1996. *Matrix Computations*. 3rd ed., Johns Hopkins University Press.
- Mackie, R. L. and Madden, T. R., 1993. Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients. *Geophys. J. Int.*, 115: 215-229.
- Shin, C. and Min, D.-J., 2006. Waveform inversion using a logarithmic wavefield. *Geophysics*, 71: R31-R42.
- Tarantola, A., 1984. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49: 1259-1266.

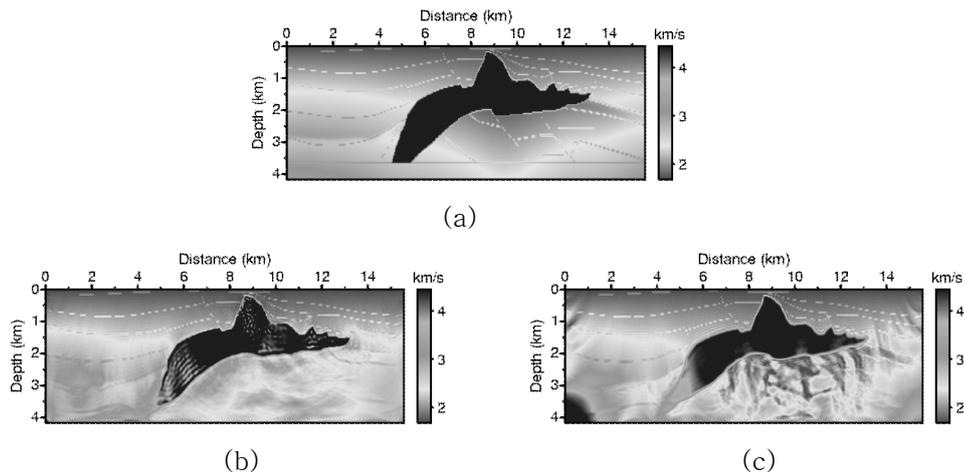


Fig. 1. (a) A-A' line section of the SEG/EAGE salt model. Inverted velocity model obtained by the gradient method at 2000th iteration (b) and the Gauss-Newton method at 300th iteration (c).

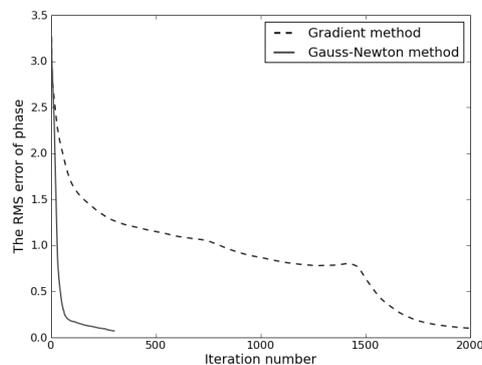


Fig. 2. The RMS error history of phase for the SEG/EAGE salt model inversion.