제34회 한국정보처리학회 추계학술대회 논문집 제17권 2호 (2010. 11)

수치등각사상의 Theodorsen방정식해법에 관한 연구

송은지*
*남서울대학교 컴퓨터학과
sej@nsu.ac.kr

A Study on Methods for Solving Theodorsen Equation in Numerical Conformal Mapping

Eun-Jee Song*
*Dept of Computer Science, Nam-Seoul University

요 약

등각사상은 함수론의 기본적인 문제로 2차원 Laplace방정식이 나타나는 열전도, 정전(靜電) potential, 유체의 문제에 이용되는 등 공학이나 물리학에서 그 응용분야가 넓다. 수치등각사상의 목적은 보다 빠르고, 보다 정확하며, 보다 적용범위가 넓은 계산법을 연구하는데 있다. 단위원 내부로부터 Jordan 영역 내부로의 등각사상을 구하는 문제는 비선형 방정식인 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀결된다. Theodorsen 방정식에 관해서는 여러 가지 수치해법이 제안되어 있는데 본 논문에서는 그 중 SOR법인 Niethammer와 Newton법인 Vertgeim의 방법을 다루어 비교, 분석하였다. 이 2가지 방법을 실제 계산기상에 실현시켜 수치실험을 하여 그 유효성을 비교, 분석한 결과 난이도가 낮은 문제에서는 Niethammer의 방법이 난이도가 높은 문제에서는 Vertgeim이 제안한 방법이 유효함을 알게 되었다.

1. 서론

수치등각사상에는 표준영역인 단위원으로부터 문제영역인 Jordan영역에로의 사상과 역방향에로의 사상 즉,Jordan영역으로부터 단위원에로의 사상이 있다. 단위원으로부터 Jordan영역에로의 사상을 구하기 위해서는 비선형방정식을 Jordan영역으로부터 단위원에로의 사상을 구하기 위해서는 선형방정식을 구해야 하는 것이 일반적이기 때문에 각각 독립적으로 연구되어 지고 있다.

본 논문에서는 단위원으로부터 Jordan영역에로의 사상을 구하는 방법을 다룬다. 이 사상의 결정은 경계함수에 관한 비선형방정식인Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀착된다. 여러 Theodorsen방정식의 해법 가운데 여기서는 SOR법인 Niethammer의 방법과 Newton법인 Vertgeim의 방법을 소개한다[1][2]. 2개의 방법을 계산기 상이 실현시켜 실험한 결과 난이도가 낮은 문제에서는 Niethammer의 방법이 난이도가 높고 요구정도(要求精度)가 높을 경우에는 Vertgeim의 방법이 유효하였다. Vertgeim의 방법은 Newton의 반복법을 Riemann-Hilbert 문제로 해석하고 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 계산량과 기억용량을 대폭 절약한 효율적인 방법이다.

2. Theodorsen 방정식

단위원에서 Jordan 영역 내부로의 수치등각사상을 구하는 문제는 다음에 설명하는 비선형 적분방정식인 Theodorsen 방정식의 해를 구하는 것으로 귀착된다. 이하, D를 단위원 내부, Δ를 Jordan영역의 내부라 하고 g를 D로부터 Δ에로의 등각사상으로 정규화 조건

$$g(0) = 0,\ g'(0) > 0 \qquad (1)$$

을 만족한다고 하자. Jordan 폐곡선을 Γ라 하고 파라메터 표현을 η 라 하면

$$\Gamma := \{\eta(t) : t \in T\}, \quad T := \{t \mid 0 \le t < 2\pi\}$$

로 정의 할 수 있다. 이렇게 하면, 원주 상에서의 g는 어떤 주기 2π 연속함수 $\tau(t)$를 이용하여

$g(e^{it}) = \eta(\tau(t) + t)$ 로 쓸 수 있다.

$A(\overline{D})$와 $A(\overline{D})|_T$ 를 다음과 같이 정의한다.

$A(\overline{D})$: D 에서 해석적(Analytic)이고 $\overline{D}$ 에서 연속인 복소함수의 공간.

$A(\overline{D})|_T$: $A(\overline{D})$의 요소 h의 경계함수 $f(t) = h(e^{it})$ 의 집합.

(정리1) $g : D$상에서 등각사상 ⇔ $g \in A(\overline{D})$

정리1로 부터 $g \in A(\overline{D})$이므로 원주상에서 계산되면 내부에서도 계산 할 수 있어서 등각함수 g를 구하는 문제는 $\eta(\tau(t) + t) \in A(\overline{D})|_T$를 결정하는 함수 $\tau(t)$를 를 구하는 문제로 귀결된다.

(정의1) 함수 f 가

$$f \sim \sum_{k \in z} \hat{f}_k e^{ikt} \quad \hat{f}_k : f\text{의 k번째 Fourier계수}$$

로 전개 되었을 때

$$Kf \sim -i \sum_{k \in z} sign(k) \hat{f}_k e^{ikt}$$

로 정의되는 K를 공역작용소(共役作用素:Conjugate operator)라고 한다.

정의1에서 정의된 공역작용소 K를 이용한 다음과 같은 정리가 있다[3].

(정리2)

$$f(t) \in A(\overline{D})|_T \Leftrightarrow Im\, f(t) - Im\ \hat{f}_0 = K\, Re\, f(t)$$

$Imf(t)$: $f(t)$허수부 $Ref(t)$: $f(t)$실수부

다음은 (1)식의 정규화 조건을 만족하기 위해 보조함수 h를 도입하여

$$g(z) = z\, e^{h(z)} \tag{2}$$

로 한다. 그러면 $g(0)=0$ 이고, $g'(0)>0$은 $g'(0)=e^{h(0)}>0$ 이므로 $Im\, h(0)=0$ 의 조건을 만족하면 된다. (2)식을 h에 대해 정리하고 경계함수 G를 도입하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} G\tau(t) :=\ & h(e^{it}) = \log(g(e^{it})/e^{it}) \\ & = \log(\eta(\tau(t)+t)/e^{it}) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $Im\, h(0)=0$ 이므로 $Im\ \widehat{G}_0 = 0$ 이다.

$$\therefore\ Im\, G\tau(t) - K\, Re\, G\tau(t) = 0 \tag{4}$$

인 Theodorsen방정식이 유도된다.

여기서는 문제영역이 $\eta(t) = \rho(t)e^{it}$로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 하고 (3)식을 극좌표로 표현하여 정리하면

$$G\tau(t) = \log\rho(\tau(t)+t) + i\tau(t) \tag{5}$$

$$Re\, G\tau(t) = \log\rho(\tau(t)+t), \quad Im\, G\tau(t) = \tau(t)$$

이 되므로 Theodorsen방정식 (4)를

$$\Psi\tau(t) := \tau(t) - K\log\rho(\tau(t)+t) = 0 \tag{6}$$

과 같이 정의 할 수 있다.

3. 수치해법

수치계산을 하기 위한 이산화에서는 짝수 표본점 $N=2n$을 사용하여

$$t_j = 2\pi j/N, \quad t = (t_0, t_1, \cdots, t_{N-1})^T$$

로 하며 t의 함수인 f를 t_j상에서 이산화한 것을

$$f_j := f(t_j) \quad , \ f = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})^T$$

로 하고 , 스칼라 함수 σ를 $s \in R^N$ 에 대하여

$$\sigma(s) := (\sigma(s_0), \sigma(s_1), \cdots, \sigma(s_{N-1}))^T$$

로 정의 하도록 한다. 정의1에서 정의한 공역작용소(共役作用素)K는 다음과 같이 이산화 한다.[]

$$\begin{array}{l} x \xrightarrow{F_N} (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n\ ;\ b_1, b_2, \cdots, b_{n-1})^T \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow\ \widehat{K}_N \\ y \xleftarrow{F_N^{-1}} (0, -b_1, \cdots, -b_{n-1}, 0\ ;\ a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})^T \end{array}$$

F_N :이산형 Fourier변환 F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환

$\widehat{K}_N$: 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환

즉, 이산화된 공역작용소는

$$K_N := F_N^{-1}\widehat{K}_N F_N \tag{7}$$

이 된다. (7)은 Wittich행렬이라 불리우며 각 요소는

$$(K_{2n})_{lj} := \begin{cases} 0 & : \ j-l \text{가 짝수} \\ \dfrac{1}{n}\cot\dfrac{(l-j)\pi}{2n} & : \ j-l \text{가 홀수} \end{cases} \tag{8}$$

이다. 문제영역이 $\eta(t) = \rho(t)\, e^{it}$로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 하면 Theodorsen방정식은 이산영역에서

$$\Psi(\tau) = \tau - K_N \log\rho(\tau + t) = 0 \tag{9}$$

이 된다[4].

3.1 Niethammer의 방법(SOR법)

x' 를 홀수번째 표본점 x''를 짝수 번째 표본점으로 한다. 즉, $x' := (x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1})^T$

$x''; = (x_0, x_2, \cdots, x_{2n-2})^T$ 로 한다.

$P_{2n}x = \begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix}$로 정의 하여 (8)에 적용하면

$$P_{2n}K_{2n}P_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -L_n^T \\ L_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$(L_n)_{kj} = \frac{1}{N}\cot\frac{(2k-2j+1)\pi}{2n}$$

$$(k, j = 0, 1, \cdots, n-1)$$

이 된다. 그러므로 (9)식에서의 해인 τ는

$$\tau'' = -L_n^T \log\rho(\tau' + t') \tag{10}$$

$$\tau' = L_n \log\rho(\tau'' + t'')$$

로 분리하여 계산할 수 있다.(10)식에 SOR법을 적용하면

$$\tau''_{k+1} := -\omega L^T \log\rho(\tau'_k + t') + (1-\omega)\tau''_k \tag{11}$$

$$\tau'_{k+1} := \omega L \log\rho(\tau''_{k+1} + t'') + (1-\omega)\tau'_k$$

$(\omega$: 이완계수, $0 < \omega \le 1$, $k = 0, 1, 2, \cdots)$

L, L^T계산은 FFT를 이용하여 효율적으로 계산 할 수 있다.

3.2 Vertgeim 의 방법(Newton법)

(9)식에 Newton반복법을 적용하면 다음과 같다.

$$\Psi(\tau_k)+\Psi_{\tau_k}\delta_k=0 \qquad (12)$$
$$\tau_{k+1}=\tau_k+\delta_k$$

Ψ_{τ_k}: τ_k 에서 Ψ의 미분 $k=0,1,2,\cdots$

여기서는 반복법(12)에 Jacobi행렬을 사용하지 않고 Riemann-Hilbert문제로 유도하여 기억용량을 감소시켰다. 일반적으로 Jacobi행렬은 표본수 N에 대하여 $O(N^2)$의 기억용량이 필요하나 Riemann-Hilbert 문제로 해석하여 풀면 $O(N)$ 의 기억용량으로 절약된다. 더구나 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 $O(N^3)$의 계산량을 $O(NlogN)$으로 절약할 수 있어 이 방법은 상당히 경제적이라 할 수 있다. Ψ의 τ 에서의 미분을 계산하면 (12)식은

$$\Psi_\tau\delta(t)=\delta(t)Im\,\xi(t)-K\,[\delta Re\,\xi](t)$$

$$\xi(t):=\rho'(\tau(t)+t)/\rho(\tau(t)+t)+i$$

이 되므로 다음과 같이 대입하여 정리할 수 있다.

$$\Psi\tau(t)+\Psi_\tau\delta(t)=\delta(t)Im\xi(t)-K\,(\delta(t)Re\xi(t))+\Psi\tau(t)=0$$

$$\Psi\tau(t)+\delta(t)Im\,\xi(t)=K\,(\delta(t)Re\xi(t))$$

위의 식을 정리하면 원주상에서 함수 f 를

$$f(e^{it}):=\xi(t)\delta(t)+i\Psi\tau(t)\,, \qquad (13)$$
$$f(e^{it})\in A(D)|_T\,, Imf(0)=0$$

로 정의할 수 있다. (13)식을 변형하면

$$Re(i\xi(t)f(e^{it}))=-\Psi\tau(t)Re\xi(t) \qquad (14)$$

로 되어 $f(e^{it})\in A(\overline{D})|_T$를 구하는 Riemann-Hilbert문제로 해석할 수 있다. Riemann-Hilbert의 문제의 해인 $f(e^{it})\in A(\overline{D})|_T$는 다음과 같이 구할 수 있음이 알려져 있다[5].

$$f(e^{it})=(iq+\sigma(t)+iK\,\sigma(t))\exp(-K\,\phi(t)+i\phi(t))$$

$$\phi(t)=\arg\xi(t)-\pi/2$$
$$\sigma(t)=\Psi\tau(t)\sin\phi(t)\exp(K\,\phi(t))$$
$$q=-\hat{\sigma}_0\tan\hat{\sigma}_0$$
$\hat{\sigma}_0$: σ의 0번째 $Fourier$계수

$\hat{\phi}_0$: ϕ의 0번째 $Fourier$계수

이렇게 해서 구한 f를 (13)식에 대입하여

$$\delta(t)=\frac{f(e^{it})-i\Psi\tau(t)}{\xi(t)}$$

로 수정량 δ를 계산한다.

4. 수치실험

수치실험 예로서는 단위원에서 문제영역이 편심원에로의 등각사상을 구하는 문제를 다룬다. 이 예는 참값이 알려져 있어 오차평가가 용이하기 때문이다.
주어진 조건과 구하고자 하는 해는 다음과 같다.
경계가 $\eta(s)=\rho(s)\,e^{is}$로 극좌표 표현되었을 때
주어진 조건 :

$$\rho(s)=\frac{r\cos s+\sqrt{1-r^2\sin^2 s}}{r+1}, \quad 0\le r<1$$

구하고자 하는 해: $\tau(t)=\arctan\dfrac{r\sin t}{1-r\cos t}$

과 같다. 여기서 파라메터 r은 1에 가까울수록 영역의 변형이 심해지고 난이도가 높아진다.

초기치를 $\tau_0=(0,0,\cdots,0)^T$로 하고 요구정도는 $\|\tau_k-\tau_{k+1}\|_2<10^{-5}$ 로 한다. 수치실험 결과를 나타내는 표에서 기호의 의미는 다음과 같다.

r: 형상 파라메타 N: 표본수 ω: 이완계수

4.1 Nithammer의 방법

표1,2,3은 이완계수 ω를 $0.4\sim1.0$ 에서 0.2간격으로 변화시켜 요구정도를 만족할 때까지의 반복횟수를 비교해 본 결과이다. ω 를 고정 시켰을 때의 반복횟수는 표본수 N에는 별로 의존하지 않고 형상파라메타 r에 의하여 달라짐을 알 수 있다. 또한 반복횟수가 가장 작은 최적 이완계수는 r = 0.1 일 때 ω = 1.0 이며 r =0.5일 때 ω = 0.8 이고 r = 0.9 일 때는 ω = 0.6으로 r이 1에 가까울수록 즉 문제가 어려울수록 이완계수 ω 가 작아지는 경향을 보였다.

<표 1> r = 0.1 일 때의 반복횟수

N	r = 0.1			
	ω = 0.4	ω = 0.6	ω = 0.8	ω = 1.0
16	19	11	7	4
32	19	11	7	4
64	19	11	7	4
128	19	11	7	4

<표 2> r = 0.5 일 때의 반복횟수

N	r = 0.5			
	ω = 0.4	ω = 0.6	ω = 0.8	ω = 1.0
16	21	14	8	9
32	21	14	8	10
64	21	14	8	10
128	21	14	8	10

<표 3> r = 0.9 일 때의 반복횟수

N	r = 0.9			
	ω = 0.4	ω = 0.6	ω = 0.8	ω = 1.0
16	24	14	***	***
32	25	15	***	***
64	25	15	***	***
128	25	15	***	***
256	24	14	***	***

*** : 수렴하지 않음

4. 2 Vertgeim의 방법

Newton 법인 Vertgeim방법으로 실험한 결과를 요구정도를 만족할 때까지의 반복횟수로 최적이완계수를 사용한 Niethamme방법의 결과와 함께 표4에 나타내었다.
Newton반복법은 이론적으로 2차 수렴함이 알려져 있는데 이론대로 r=0.1과 r=0.5일 경우는 3회,4회로 수렴속도가 매우 빠르고, 문제가 어려운 r = 0.9일 경우는 수렴하는 속도가 느려지나 표본수 N를 늘리면 2차 수렴하여 수렴속도가 빨라진다. 적은 수의 표본수에서 2차 수렴하지 않은 원인은 이산오차 때문이라 추측된다. SOR법인 Niethammer의 결과와 비교해 보았을 때 Newton법인 Vertgeim의 수렴속도가 빠름을 알 수 있고 특히, 어려운 문제에서 Vertgeim의 방법이 더욱 유효함을 알 수 있다.
그러나 표5에서 비교했듯이 Niethammer가 Vertgeim보다 계산량이 적으므로 난이도가 높지 않은 문제에서는 Niethammer가 유효함을 알 수 있다.

<표4>Vertgeim과 Niethammer에 의한 반복횟수

N	r = 0.1		r = 0.5		r = 0.9	
	Ver	Nie	Ver	Nie	Ver	Nie
32	3	4	4	8	45	15
64	3	4	4	8	38	15
128	3	4	4	8	16	15
256	3	4	4	8	6	14
512	3	4	4	8	6	15

<표5> 수치해법의 비교 (FFT이용)

제안자	1회 반복의 계산량	수렴	반복법
Niethammer	$N\log N$	1차	SOR법
Vertgeim	3 $N\log N$	2차	Newton법

5. 결론 및 향후과제

본 논문에서는 단위원에서 Jordan 영역에로의 수치등각사상을 구하는 여러 해법 중 Niethammer에 의한 SOR법과 Vertgeim에의한 Newton법을 분석 실험하여 그 유효성을 비교하였다. 요구정도가 높고 난이도가 높은 문제에서는 수렴속도가 빠른 Vertgeim의 방법이 유효하며 난이도가 높지 않은 문제에서는 계산량이 적은 Nethammer의 방법이 유효함을 알 수 있었다. SOR법에서는 이완계수에 의하여 반복횟수가 변화하므로 최적이완계수를 정하는 문제가 중요하다. 실험결과, 문제가 어려울수록 이완계수가 작아지는 경향을 보이는데 향후 이론적 연구가 요구된다. 또한 등각사상의 실용화를 위해서는 문제영역에서 표준영역으로 표준영역에서 문제영역에로의 양방향의 등각사상이 필요하므로 단위원에서 Jordan영역에로의 등각사상 뿐만 아니라 Jordan영역에서 단위원에로의 등각사상에 관한 연구도 필요하다.

참고문헌

1.Vertgeim B..A,"Apprximate construction of some conformal mapping(Russian)", Doklady Akad.Nauk SSSR 119 , pp.2-14 (1958)

2. Nierhammer W.," Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung", Computing, pp.146-153(1966)

3. Gutknecht M.H.,"Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation", J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.31-77(1986).

4. Gutknecht M.H., "Solving Thenodorsen's Integral Equation for conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods" , Numer. Math. 36(4) , pp.405-429 (1981).

5.Wegert E., "An iterative method for solving nonlinear Riemann-Hilbert problems" , J. Comput. Appl. Math. 29 pp. 311-327 (1990).

6. Hübner,O." The Newton method for solving the Theodorsen integral equation ", J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.19-29 (1986).

7. 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 개량에 관한 연구“,한국정보처리학회 논문집 제8-A권 제4호, pp503-508, (2001).

8. 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 수렴성에 관한 연구“, 한국정보처리학회 논문집 제11-A권 제2호, pp203-206, (2004).

9. 송은지, "저주파 필터를 적용한 Wegmann방법의 오차평가에 관한 연구“, 한국정보처리학회 논문집 제12-A권 제2호, pp103-108, (2005).