

MRA에서 특성값의 측정단위와 수치형태에 따른
종합 만족도 산출 방법

Calculation of Composite Desirability
Function According to the Measurement Unit
and Numerical Pattern of Characteristics in
the Multiple Response Analysis

최성운*

Sungwoon Choi*

Abstract

This paper presents the optimization steps with weight and importance of estimated characteristic values in the multiresponse surface analysis(MRA). The research introduces the shape parameter of individual desirability function for relaxation and tightening of specification bounds. The study also proposes the combined desirability function using arithmetic, geometric and harmonic means considering the measurement unit and numerical pattern.

Keywords : Weight, Importance, MRA, Shape, Individual, Overall Desirability, Arithmetic, Geometric and Harmonic Means, Measurement Unit, Numerical Pattern

* 경원대학교 산업공학과

1. 서 론

반응표면분석(Response Surface Method : RSM)은 1차, 2차 회귀함수로 설비, 치공구, 금형 생산기술 조건의 원인계인 인자(독립, 설명, 설계변수, 흥미영역, 공정조건) x_j (인자의 수 $j=1, 2, \dots, k$)의 독립성을 위한 수치 변환(Coded Variable)을 통해 직교성(Orthogonality)과 회전성(Rotatability)의 실험계획을 실시한다. 특성값(종속, 반응변수) y_i (Replicate의 수 $i=1, 2, \dots, n$)는 인자 x 의 직교블럭(Orthogonal Blocking)의 좌표수(Run)마다 반복을 실행할 수 있다. 1차 RSM $y_i = \beta_o + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_{12}x_1x_2$ 로 2^q 요인 배치법 또는 심플렉스 계획으로 중심점(Center Point : CP)과 함께 곡률 효과(Curvature Effect)를 추정할 수 있다. 2차 RSM $y_i = \beta_o + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_{11}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2 + \beta_{12}x_1x_2$ 로 3^q 요인 배치법을 실시할 수 있으나 실험횟수를 절약하기 위한 방법으로 2^q 요인 배치법의 실험점(Factorial Point : FP, 꼭지점 Corner, Extreme Point)에 중심점 CP개와 함께 회전성을 갖는 축점(Axial Point : AP, Star Point) AP개에 의한 중심합성계획(Central Composite Design : CCD)을 사용한다. CCD는 실험점 FP 2^q 개 블럭, 중심점 CP 블럭, 축점 AP 블럭 등 직교 블럭으로 구성되게 실험설계되어 축차실험(Sequential Design)이 가능하며 회전성에 의해 동일 분산을 구성한다. 축점 AP를 실험점 EP 2^q 의 면(Face)의 중심에 이동한 무회전성의 내접설계를 FCD(Faced Composite Design)이라 하며 실험점 EP의 극단적인 높고, 낮은 꼭지점의 인자수준을 피하는 BIBD(Balanced Incomplete Block Design) 방법으로 Box-Behnken 실험계획이 있다.

이렇듯 직교블럭화의 좌표가 Run으로 자동생성되고 1차, 2차 인자관계 함수식으로 추정된 $\hat{\beta}$ 계수에 의한 특성값 \hat{y} 는 스펙(Specification)의 유형 USL(Upper Specification Limit), LSL(Lower Specification Limit)에 따라 최대값 또는 최소값의 최적(Optimal) 인자 수준조건인 x^* 와 y^* 를 찾는다. 1차 RSM인 경우 최대경사법(Method of Steepest Ascent)을 사용하며 2차 RSM인 경우 Spectral Decomposition된 Eigen Value 또는 추정 특성값 \hat{y} 의 표면도(Surface Plot), 등고선도(Contour Plot)을 사용한다. Eigen Value가 모두 음수, 3차원 산의 표면도 모양, 2차원 가운데 최대 동심원 등고선도인 경우 y^* 는 최대값을 가지며 반대인 경우 최소값, 혼합된 경우 안장점(Saddle, Inflection Point)을 찾는다.

RSM은 1개 스펙에 대한 특성값으로 2개 이상의 스펙을 고려한 여러 개($p=1, 2, \dots, r$)의 특성값이 고려되는 경우 다중 반응표면분석(Multiple Response Surface Analysis : MRSA, MRA)[3,4]이라 한다. RSM의 첫 번째 최적화 방법은 겹쳐진 등고선도(Overlaid Contour Plot)에 의한 여러 추정 특성값들 간의 타협점(Compromise Area)을 시각적으로 찾는 그래프 방법이다. 두 번째 방법은 하나의 스펙 특성값을 제약조건으로 또 다른 스펙 특성값을 목적함수식으로 찾는 쌍대반응최적화(Dual Response Optimization)의 우선순위 방법이다. 세 번째는 만족도(Desirability)함수 방법

[7]으로 SN비(Signal-To-Nose Ratio) 또는 이의 역수인 CV(Coefficient of Variation)의 가중 조화, 기하 평균의 종합만족도 함수의 연구[6]가 있다. 또 다른 방법으로 손실함수에 의한 다구치 방법, 스펙과 데이터의 상대적 비를 고려한 공정능력지수에 의한 방법, 다변량 정규분포를 이용한 확률적 방법, Fuzzy, Neural Network, Data Mining의 인공지능 방법, 대화식(Interactive) 방법 등이 있다.

이러한 MRA 연구는 상관계수[5,8], 특정 특성값의 개별 만족도에 대한 가중치[2], 여러 특성값 간의 상대적 중요도[1], 예측특성값, 평균과 분산의 동시사용 등의 고려여부에 따라 유형화될 수 있다.[3,4]

따라서 본 연구에서는 기존의 MRA 만족도 함수 연구에서 고려하지 못했던 추정 특성값의 등차수열, 등비수열, 조화수열 등의 수치 형태와 계측기에 의한 측정단위가 치수 cm 와 같이 1개인 경우, 같은 측정단위를 나눈 무단위의 성분비 같은 비율(Ratio) 단위의 경우, 서로 다른 두 측정단위를 나눈 속도 km/hr , 압력 kg/mm^2 같은 레이트(Rate) 단위의 경우의 유형에 따른 종합 만족도를 산출하는 세가지 방법에 따른 MAR 최적화 단계를 제시하였다.

2. 규격별 개별 만족도(Individual Desirability)

2.1. STB(Smaller - The - Better)

규격이 LSL인 경우 Max Target을 가지며 스펙 Bound는 도표1과 같다. $\hat{y} \leq LSL$ 인 경우 $d=0$, $\hat{y} \geq Max Target$ 인 경우 $d=1$, $LSL \leq \hat{y} \leq Max Target$ 인 경우 $((\hat{y} - LSL)/(Max Target - LSL))^t$ 이며 t 는 형상모수(Shape Parameter)로 0.1~10의 조정(Adjustment) 가중치이다. 가중치가 10인 경우 개별 만족도 함수는 직선분포로 분산이 Zero이며 $t=1$ 인 경우 삼각분포, $t=0.1$ 인 경우 사각분포로 분산이 최대가 된다.

스펙 Bound가 Tight해져 Max Target가 직선인 경우 가중치는 $t=10$ 최대값이며 Relax해져 LSL까지의 직사각형인 경우 가중치는 $t=0.1$ 최소값이 되며, 삼각형인 경우 가중치는 $t=1$ 이 된다. 가중치는 Max Target가 멀어질 경우의 손실에 대한 Penalty로 고려된다.

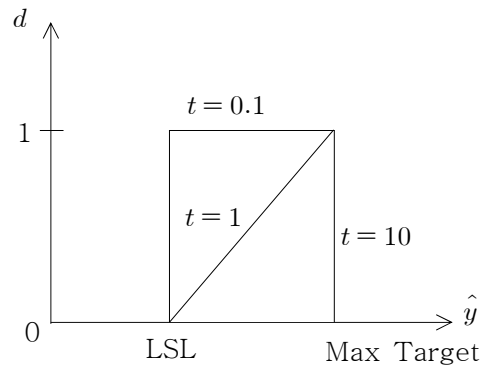


도표1. STB인 경우 개별 만족도

2.2. LTB(Larger - The - Better)

규격이 USL인 경우 Min Target을 갖는 경우 스펙 Bound는 도표2와 같다. $\hat{y} \leq \text{Min Target}$ 인 경우 $d = 1$, $\hat{y} \geq \text{USL}$ 인 경우 $d = 0$, $\text{Min Target} \leq \hat{y} \leq \text{USL}$ 인 경우 $d = ((\hat{y} - \text{USL}) / (\text{Min Target} - \text{USL}))^t$ 이며 가중치 개념은 2.1절의 STB와 같다.

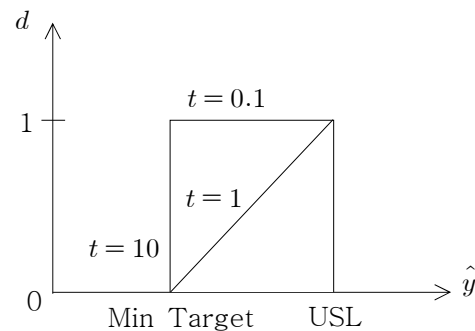


도표2. LTB인 경우 개별 만족도

2.3. NTB(Nominal - The - Better)

규격이 호칭치수(Nominal Size)±허용차의 공차(Tolerance) 스펙 Bound는 도표3과 같다. $\hat{y} \leq \text{LSL}$ 또는 $\hat{y} \geq \text{USL}$ 인 경우 $d = 0$, $\text{LSL} \leq \hat{y} \leq \text{Nominal Target}$ 인 경우 $((\hat{y} - \text{LSL}) / (\text{Nominal Target} - \text{LSL}))^w$, $\text{Nominal Target} \leq \hat{y} \leq \text{USL}$ 인 경우 $((\hat{y} - \text{USL}) / (\text{Nominal Target} - \text{USL}))^t$ 이며 w 와 t 는 0.1~10의 가중치로 조정되는 형상모수이다. 두 가중치에 의한 개별 만족도는 2.1절의 STB, 2.2절의 LTB의 두가지 경우에 해당된다.

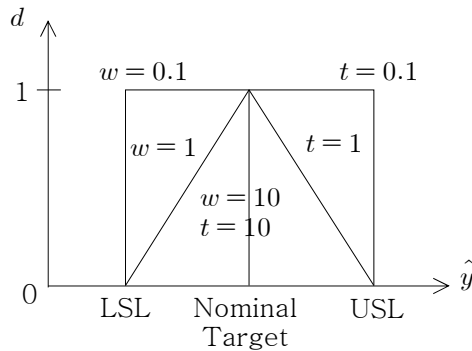


도표3. NTB인 경우 개별 만족도

3. 종합 만족도 산출 방법

3.1. 측정단위와 수치형태에 따른 평균의 종류

3.1.1. 산술평균(Arithmetic Mean : AM)

추정 특성값 \hat{y} 이 등차수열의 수치형태를 이룰 경우 등차(Common Difference)는 $\hat{y}_2 - \hat{y}_1 = \hat{y}_3 - \hat{y}_2$ 로 뺄셈의 산술(Arithmetic)식으로 표현된다. $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ 의 $AM = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3) / 3$ 으로 모든 특성값의 측정단위가 치수 cm 와 같이 동일하게 된 측정단위로 사용되는 경우 적용하며 계산, 이해하기가 쉬우며 아주 작거나 큰 특성값이 있는 경우 기하 평균보다 영향을 상대적으로 적게 받는다.

3.1.2. 기하평균(Geometric Mean : GM)

추정 특성값 \hat{y} 이 등비수열의 수치형태를 이룰 경우 등비(Common Ratio)가 배수로 증가하여 기하학적(Geometric) 패턴을 가진다. $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ 의 $GM = (\hat{y}_1 \cdot \hat{y}_2 \cdot \hat{y}_3)^{1/3}$ 로 같은 측정단위를 갖는 두 특성값의 비율(Ratio) 즉 혼합비 같은 무단위(Dimensionless)인 경우 적용되며 GM에서 곱셈의 형태로 아주 작은값과 큰 값이 GM의 값에 큰 영향을 준다. GM에서 루트(Root)는 등비적으로 증가하는 큰 값을 안정화시키는 역할을 해준다

3.1.3. 조화평균(Harmonic Mean : HM)

추정 특성값 \hat{y} 의 역수가 등차수열인 조화수열의 수치형태를 이룰 경우 $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}$ 의 $HM = 2y_1y_3 / (y_1 + y_3)$ 이다. 이는 등차수열의 관계식 $1/y_2 - 1/y_1 = 1/y_3 - 1/y_2$ 의 $2/y_2 = 1/y_1 + 1/y_3$ 에서 유도된다. HM은 서로 다른 측정단위를 갖는 두 특성값의 레이트(Rate) 즉, 압력 kg/m^2 , 속도 km/hr 와 같은 혼합측정단위인 경우 적용된다.

평균의 크기는 $AM \geq GM \geq HM$ 이며 이상을 정리하면 도표4와 같다.

측정단위 수치형태	원단위 (Original Unit)	무단위 비율 (Dimensionless)	이단위 레이트 (Unique Unit)
등차수열	산술평균		
등비수열		기하평균	
조화수열			조화평균

도표4. 수치형태와 측정단위에 따른 평균 용도

3.2. 측정단위와 수치형태에 따른 평균의 종류

MAR에서 추정 특성값들($p=1, 2, \dots, r$) 수치형태와 측정단위에 따른 3.1절의 결과를 적용한 종합 만족도(Composite, Combined, Overall Desirability) D 는 다음과 같다.

3.2.1. 산술평균을 이용한 종합 만족도

$$AD = (d_1 + d_2 + \dots + d_r) / r = \sum_{p=1}^r d_i / r$$

3.2.2. 기하평균을 이용한 종합 만족도

$$GD = (d_1 \times d_2 \times \dots \times d_r)^{1/r} = \left(\prod_{p=1}^r d_i \right)^{1/r}$$

3.2.3. 조화평균을 이용한 종합 만족도

$$HD = r / (1/d_1 + 1/d_2 + \dots + 1/d_r) = r / \sum_{p=1}^r (1/d_i)$$

3.3. 품질특성의 중요도를 고려한 종합 만족도

3.2절에서 스펙 특성값에 대한 개별 만족도의 중요도(Importance) w_i 를 고려한 경우 다음과 같은 3가지 종합 만족도의 산출 방법이 있다. MINITAB에서는 0.1~10의 중요도를 부여할 수 있으나 $\sum_{p=1}^r w_p = 1$ 로 정규화(Normalization) 할 수 있다. 스펙 특성값의 중요도는 ISO/TS 16949에서는 특별특성(Special Characteristics)으로 관리되며 조정형 샘플링 검사에서는 AQL(Acceptance Quality Limit, Acceptable Quality

Level)로 치명결점, 중결점, 경결점, 미결점의 등급으로 분류된다.

3.3.1. 산술평균을 이용한 종합 만족도

$$AID = (d_1^{w_1} + d_2^{w_2} + \dots + d_r^{w_r}) / \sum_{p=1}^r w_p$$

3.2.2. 기하평균을 이용한 종합 만족도

$$GID = (d_1^{w_1} \times d_2^{w_2} \times \dots \times d_r^{w_r})^{1/\sum_{p=1}^r w_p}$$

3.2.3. 조화평균을 이용한 종합 만족도

$$HID = \sum_{p=1}^r w_p / ((1/d_1)^{w_1} + (1/d_2)^{w_2} + \dots + (1/d_r)^{w_r})$$

4. 결 론

본 연구에서 제시한 다중반응표면분석(MRA)의 최적화 단계는 다음과 같다.

1. 다양한 스펙의 특성값(y_p)들간의 상관계수에 대한 검정을 통하여 무상관 귀무가설을 채택할 경우 본 연구에서 제시한 단계를 적용한다.

2. 개별 특성값의 스펙을 고려하여 LTB(LSL)인 경우 Max Target, UTB(USL)인 경우 Min Target, NTB(LSL~USL)인 경우 Nominal Target 등의 이탈에 따른 손실이 큰 경우 스펙 Bound의 Relaxation, Tightening에 따른 직선분포, 삼각분포, 사각분포의 형상조정(Shape Adjustment)에 의한 분산의 Penalty로 가중치를 0.1~10로 고려하는 만족도 함수를 산출한다.

3. 품질 특성의 중요도를 고려한 종합 만족도는 다음과 같은 조건을 고려한 산술평균(AM), 기하평균(GM), 조화평균(HM)을 이용하여 여러개의 시작점을 갖는 Reduced Gradient 알고리즘으로 최대 종합 만족도를 구한다.

3.1. 산술평균(AM)을 이용한 종합 만족도 : 추정 특성값이 등차수열의 수치형태를 이루거나 특성값들의 스펙 측정단위가 1개로 일치하는 경우 적용한다.

3.2. 기하평균(GM)을 이용한 종합 만족도 : 추정 특성값이 등비수열의 수치형태를 이루거나 두 특성값의 동일한 스펙단위로 나누는 비율(Ratio) 측정단위인 경우 적용한다.

3.3. 조화평균(HM)을 이용한 종합 만족도 : 측정 특성값이 조화수열의 수치형태를 이루거나 두 특성값의 서로 다른 스펙단위로 나누는 레이트(Rate) 측정 단위인 경우 적용한다.

5. 참 고 문 헌

- [1] 오석진, “만족도 함수를 이용한 평행류 열교환기 설계 인자 최적화”, 설비공학논문집, 17 (6) (2005) : 587-595.
- [2] 이우선, 김영주, “Desirability 함수기법에 의한 다중반응표면의 최적화 연구”, 응용통계, 12 (1997) : 81-105.
- [3] 정인준, 김광재, “다중반응표면 최적화 : 현황평가 및 추후 연구방향”, 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회 발표문집, (2005) : 730-739.
- [4] Boudaoud N., Cherfi Z., Troussier N., Omezzine B., “The Desirability Function in a Multiresponse Optimization Framework : A Case Study”, IMACS Multiconference on CESA, (2006) : 1267-1271.
- [5] Chiao C., Hamada M., “Analyzing Experiments with Correlated Multiple Responses”, Journal of Quality Technology, 33 (4) (2001) : 451-465.
- [6] Cho Y., Park S., "Optimization in Multiple Response Model with Modified Desirability Function", The Asian Journal on Quality, 7 (3) (2006) : 46-68.
- [7] Derringer G.C., "A Balancing Act : Optimizing a Product's Properties", Quality Progress, (June) (1994) : 51-58.
- [8] Wu F., "Optimization of Correlated Multiple Quality Characteristics Using Desirability Function", Quality Engineering, 17 (2005) : 119-126.