Krylov 부공간 축소기법을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석

Design Sensitivity Analysis of Frequency Response Using Krylov Subspace Based Model Reduction

한 정 삼*
Han, Jeong-Sam

요 약

Krylov 부공간 모델차수축소법은 초기 유한요소모델과 축소모델의 전달함수의 계수인 모멘트를 일치시키는 방법을 이용하는 축소기법으로 이미 대형 유한요소모델의 주파수응답 해석의 효율적인 계산에 많이 사용되고 있는 방법 중의 하나이다. 본 논문에서는 Krylov 부공간 축소기법을 이용한 관심 주파수영역에 대한 주파수응답 해석 및 이를 통하여 계산된 주파수응답의 여러 가지 설계변수에 대한 설계민감도 해석 방법을 제안하였다. 일반적으로 구조물의 주파수응답을 고려한 최적설계를 위해서는 설계변수에 대한 관심 주파수영역에서의 주파수응답 및 그의 민감도 정보가 요구되므로, 고려하는 유한요소모델이 대형일 경우에 관심 주파수영역에서의 반복적인 해석으로 인한 계산비용의 문제가 대두된다. 본 논문에서는 축소모델을 이용하여 주파수응답과 주파수응답의 설계민감도 해석을 수행하여 계산의 효율성을 극대화하였다. 민감도 계산에는 시간측면과 구현의 용이성 측면에서 장점이 있는 준해석적 방법을 이용하였다. 수치 예제를 통하여 축소기법을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석 결과를 유한차분법에 근거한 민감도 결과와 비교하였다. 본 논문에서 제안된 방법을 이용하는 경우, 주파수응답을 고려한 최적설계를 계산비용 측면에서 매우 효율적으로 수행할 수 있을 것이다.

keywords : Krylov 부공간 축소기법, 주파수응답해석, 설계민감도해석, 모멘트일치법, 최적설계

1. 서 론

일반적으로 구조물의 주파수응답을 고려하는 최적설계를 위해서는 여러 가지 설계변수에 대한 관심 주파수영역에서의 주파수응답 및 그의 민감도 정보가 요구되므로, 특히 고려하는 유한요소모델이 대형일 경우에는 관심 주파수영역에서의 반복적인 주파수응답 해석으로 인한 계산비용의 문제가 크게 대두된다. 따라서, 이러한 계산비용의 문제를 해결하기 위한 여러 가지 축소모델링기법 등이 제안되었다(한정삼, 2007, 2006; Han *et al*. 2005; Ko, 2008). 특별히 본 논문에서는 Krylov 부공간 축소기법을 이용한 관심 주파수영역에 대한 주파수응답 해석 및 이를 통하여 계산된 주파수응답의 설계변수에 대한 설계민감도 해석 방법을 제안하고, 수치 예제를 통하여 그 효율성을 보였다.

2. 주파수응답의 설계민감도 해석

* 정회원 • 안동대학교 기계공학부 조교수 jshan@andong.ac.kr

일반적인 구조물의 운동방정식을 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t) \tag{1}$$

이때 M, C, K 및 F(t)는 시스템의 질량, 감쇠, 강성 및 하중이며, x(t)는 상태변수벡터이다. 많은 경우에 식(1)의 시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답 $y \in R^m$은 y=Lx처럼 상태변수벡터의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 이 시스템에 대하여 하중의 가진주파수를 Ω로 할 때, 주파수응답함수는 $K_c x=F$의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(-\Omega^2\mathbf{M}+i\Omega\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{x}=\mathbf{F} \tag{2}$$

이때, 설계변수(b_j)에 대한 이 주파수응답의 설계민감도는 식(2)를 설계변수에 대하여 미분을 취함으로

$$(-\Omega^2\mathbf{M}+i\Omega\mathbf{C}+\mathbf{K})\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial b_j}=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial b_j}-\left(-\Omega^2\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial b_j}+i\Omega\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial b_j}+\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial b_j}\right)\mathbf{x} \tag{3}$$

을 얻을 수 있다. 시스템의 차수가 N인 경우, 식(3)을 통하여 N차의 연립방정식을 계산함으로써 각 가진주파수 및 설계변수에 대한 설계민감도 $\partial x/\partial b_j$를 구한다. 따라서, 큰 차수의 문제에서는 이러한 주파수응답의 설계민감도 해석 역시 계산비용 측면에서 문제가 될 수 있다. 시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답인 y의 설계민감도는 y=Lx의 관계에서 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial b_j}=\mathbf{L}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial b_j} \tag{4}$$

3. 모델차수축소법을 이용한 설계민감도 해석

3.1. 이차 시스템의 모델차수축소법

모델차수축소법은 다음 관계를 만족하는 변환행렬 $V \in R^{N\times n}$을 구하여 초기 시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터를 작은 자유도로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터로 근사화하는 방법이다.

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t)\in R^n,\ n<<N \tag{5}$$

따라서, 식(1)의 초기 시스템은 동일한 형태를 지닌 다음과 같은 이차 축소시스템으로 변환된다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_r\ddot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{C}_r\dot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{K}_r\mathbf{z}(t)=\mathbf{F}_r(t)\\&\mathbf{y}(t)=\mathbf{L}_r\mathbf{z}(t)\end{aligned} \tag{6}$$

여기서, 축소행렬은 각각 $M_r=V^TMV$, $C_r=V^TCV$, $K_r=V^TKV$, $F_r=V^TF$ 및 $L_r=LV$이 된다. Krylov 부공간에 근거한 모델차수축소법에 따르면 감쇠행렬이 비례감쇠로 표현되는 경우, 즉 C=αM+βK인 경우에 식(5)의 변환행렬 V의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형결합이 아래의 n차 Krylov 부공간을 구성(span)하면, 초기 시스템과 축소시스템의 첫 n번째까지의 모멘트는 서로 일치함이 알려져 있다.

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M},\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F})=\text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F},(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F},(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}\cdots,(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}\} \tag{7}$$

즉, 변환행렬 V를 구하는데 초기 시스템의 질량 및 강성행렬과 하중벡터만을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬은 수치적으로 아놀디과정(Arnoldi process)를 통하여 계산되며, 다음과 같은 정규직교성(orthonomality)을 가진다. 행렬 I_n은 n차의 단위행렬이다.

$$\begin{aligned}&\text{colspan}\{\mathbf{V}\}=\mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M},\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F})\\&\mathbf{V}^T\mathbf{V}=\mathbf{I}_n\end{aligned} \tag{8}$$

따라서 축소모델을 이용한 주파수응답 해석을 위하여 식(5)의 관계를 식(2)에 적용하고, 양변을 $\mathbf{V}^T$로 곱하면

$$(-\Omega^2\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}+i\Omega\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}+\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V})\mathbf{z}=\mathbf{V}^T\mathbf{F} \tag{9}$$

를 얻으며, 이렇게 n차로 축소된 축소시스템을 통하여 시스템의 주파수응답을 효율적으로 계산할 수 있다.

3.2. 축소모델을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석

축소모델을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석에서 아래와 같이 식(5)의 설계변수에 대한 미분이 필요하며, 이때 변환행렬 $\mathbf{V}$의 민감도가 상대적으로 작아 무시할 수 있다는 가정을 하면 민감도 해석이 단순화된다. 즉, $\partial\mathbf{V}/\partial b_j=0$로 가정하여 식(5)의 설계변수에 대한 미분을 다음과 같이 간단히 계산한다.

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial b_j}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial b_j}\mathbf{z}+\mathbf{V}\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial b_j}\rightarrow\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial b_j}=\mathbf{V}\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial b_j} \tag{10}$$

이 관계와 식(5)를 식(3)에 대입하고, 양변에 $\mathbf{V}^T$를 곱하면 다음과 같이 축소모델의 주파수응답의 설계민감도를 얻을 수 있다.

$$(-\Omega^2\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}+i\Omega\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}+\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V})\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial b_j}=\mathbf{V}^T\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial b_j}-\left(-\Omega^2\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial b_j}+i\Omega\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial b_j}+\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial b_j}\right)\mathbf{V}\mathbf{z}\right) \tag{11}$$

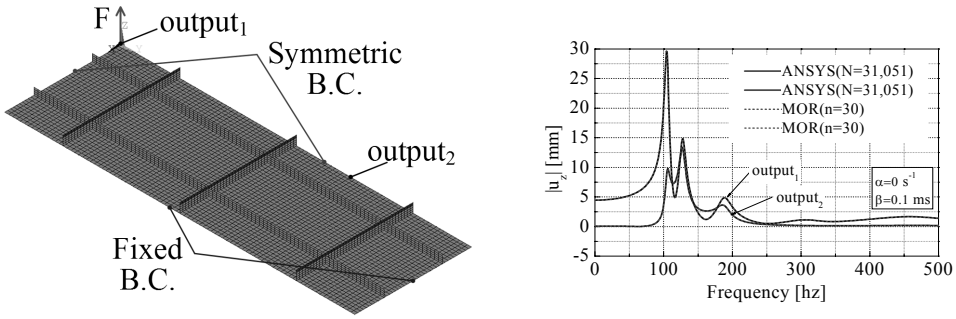
시스템에서 실제로 필요한 자유도의 출력응답인 $\mathbf{y}$의 설계민감도는 $\mathbf{y}=\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{z}$의 관계에서 아래와 같이 계산되며, 식(11)의 우변의 각 시스템 행렬의 미분은 유한차분법을 이용하여 계산하기 때문에 전체적으로는 준해석적 방법(semi-analytic method)로 민감도를 계산하게 된다.

$$\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial b_j}=\mathbf{L}\mathbf{V}\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial b_j} \tag{12}$$

주파수응답의 설계민감도인 식(3)과 식(11)을 서로 비교할 때, 초기모델(N)과 축소모델(n)을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석은 각각 N차 및 n차의 연립방정식을 관심 주파수영역에 대하여 반복적으로 풀어야 하고 많은 경우 n<<N이므로 계산비용 측면에서 축소모델을 이용하는 것이 매우 효율적이다.

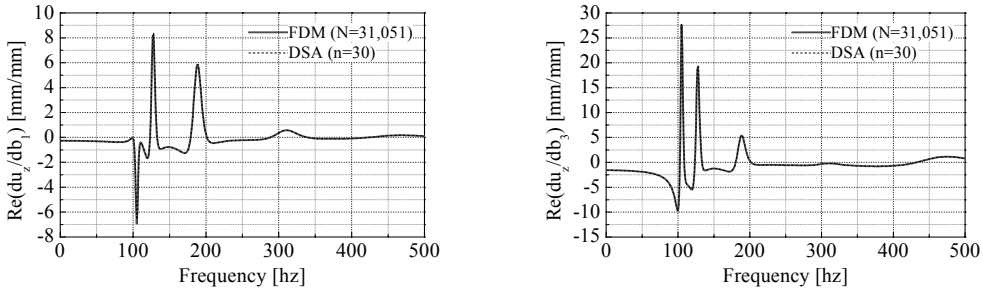
4. 반모노코크 평판의 주파수응답

예제로 고려한 반모노코크 평판의 1/4 유한요소모델은 총 31,051개의 자유도를 가지며 중앙 부분에 1 kN의 하중이 가해지고 가장자리는 고정 경계조건, 안쪽 모서리는 대칭 경계조건을 가진다(Fig. 1(a) 참조).



(a) Finite element model (b) Frequency responses

Figure 1 Semi-monocoque shell problem



(a) Thickness of the longer stiffeners (b) Thickness of the plate

Figure 2 Comparison of design sensitivities between FDM and DSA

Fig. 1(b)에는 두 출력점에서의 z방향 주파수응답을 초기 유한요소모델과 n=30의 축소모델로 각각 계산한 결과를 도시하였는데, 그래프 상에서 두 주파수응답의 차이를 확인할 수 없을 정도로 일치하였다. Fig. 2에는 식(11) 및 (12)를 통하여 계산한 긴 보강재의 두께(b_1) 및 평판의 두께(b_3)에 대한 첫째 출력점의 z방향 주파수응답의 민감도(실수 부분)를 도시하였다. 초기 유한요소모델에서 섭동량 0.1 %의 전방차분법으로 계산한 민감도와 비교하였을 때, n=30의 축소모델로 계산한 주파수응답의 민감도 결과는 서로 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 이렇듯 본 축소모델링기법을 통하여 초기 유한요소모델에서 축소모델을 생성하고, 이를 이용하여 주파수응답 및 민감도 해석을 수행하면 기존의 방법에 비하여 더욱 효율적으로 최적설계를 수행할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 Krylov 부공간에 근거한 축소모델링기법을 이용하여 주파수응답과 주파수응답의 설계민감도 해석을 수행하여 계산의 효율성을 극대화하였다. 민감도 해석에는 시간측면과 구현의 용이성 측면에서 장점이 있는 준해석적 방법을 이용하였다. 제안한 축소기법을 이용한 주파수응답의 설계민감도 해석 결과를 유한차분법에 근거한 민감도 결과와 비교하였을 때, 우수한 일치성을 보였다. 본 논문에서 제안된 방법을 이용한다면 주파수응답을 고려한 최적설계를 계산비용 측면에서 더욱 효율적으로 수행할 수 있을 것이다.

감사의 글

이 논문은 2008학년도 안동대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

한정삼 (2007) 축소된 유한요소모델을 이용한 하드디스크 구동부의 고유치 및 주파수응답 해석, **대한기계학회논문집 A권**, 31(5), pp.541~549.

한정삼 (2006) 모델차수축소법을 이용한 효율적인 진동해석, **대한기계학회논문집 A권**, 30(3), pp.310~317.

Han, J.S., Evgenii, E.B. and Korvink, J.G. (2005) Efficient Optimization of Transient Dynamic Problems in MEMS devices Using Model Order Reduction, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15, pp.822~832.

Ko, J.H., and Bai, Z. (2008) High-frequency response analysis via algebraic substructuring, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(3), pp.295~313.