영역/경계 분할법에 의한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화

Computational Efficiency of Thermo-Elasto-Viscoplastic Damage and Contact Analyses by Domain/Boundary Decomposition Method

신 의 섭* • 김 성 준** • 김 종 일*** • 서 영 수****
Shin, Eui Sup • Kim, Sung Jun • Kim, Jong-Il • Seo, Young Su

요 약

열탄성 부영역, 열탄점소성/손상 부영역, 공유면, 접촉 공유면에 기반을 둔 영역/경계 분할법을 적용하여 재료 비선형성을 갖는 열탄점소성 손상 문제와 경계 비선형성을 갖는 접촉 문제의 효율적인 해석을 제안하였다. 영역 및 경계 분할에 관련된 공유면 및 접촉 공유면에서의 연속 구속 조건을 처리하기 위하여 간단한 벌칙 함수 기법을 적용하였다. 결과적으로 재료 및 경계 비선형성은 소수의 부영역과 접촉 경계면에서 계산되는 유한요소 행렬들에 국한된다. 따라서 적절한 해석 알고리듬을 구성하면 대폭적인 효율성 향상이 가능하게 된다. 대변형과 같은 기하학적 비선형성은 고려하지 않았으며, 간단한 수치 실험을 통해서 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성에 관련된 기본적인 특성을 분석하였다.
keywords : 열탄점소성, 손상, 접촉, 영역/경계 분할법, 유한요소

1. 서 론

열탄점소성 손상과 같은 재료 비선형 문제는 운용 환경에 따라 재료 가공 과정이나 고성능 구조물의 운용 시에 수반 될 수 있다. 접촉 현상은 충격, 핀/볼트 접합 등이 대표적인 정적 또는 동적 경계 비선형 문제이다. 이와 같은 재료 및 경계 비선형성에 대하여 구조물의 안정성을 확보하고 거동을 예측하기 위해서는 정밀한 해석이 필요하다. 그러나 열탄점소성 손상과 접촉 문제를 취급하는 경우, 복잡한 형상에 따른 모델링 문제, 매우 큰 자유도에 따른 계산 시간의 증가 등의 어려움이 수반된다. 따라서 열탄점소성 손상 및 접촉 문제의 해석은 정확한 해석과 해석 과정의 효율화가 필요하다. 점소성 손상 이론 또는 해석 기법에 관해서는 연속체 손상 역학에 근거하여 다양한 소성 및 손상 연계 모델 등이 연구 되었다. 접촉 문제의 경우에는 라그랑지 승수법과 벌칙 함수법 등을 적용한 기법이 연구 되었다. 그러나 열탄점소성 손상 및 접촉에 따른 비선형성은 국부적인 영역 및 경계 일부에만 진전된다. 이러한 점을 고려할 때 영역/경계 분할법은 해석의 효율성을 높이는 유용한 기법이다. 지금까지 영역/경계 분할법을 적용한 다양한 해석 기법이 연구되어 왔다(김용언 등, 2007; Badea와 Gilormini, 1994).

본 논문에서는 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화를 위하여 영역/경계 분할법을 적용하였다. 정식화에 따른 병렬화된 알고리듬 설정과 수치 예제를 통하여, 제안된 기법의 효율성 향상에 대하여 분석하였다.

* 정회원 • 전북대학교 항공우주공학과 부교수 esshin@chonbuk.ac.kr
** 전북대학교 항공우주공학과 석사과정 diskgo@chonbuk.ac.kr
*** 전북대학교 항공우주공학과 석사과정 jikim@chonbuk.ac.kr
**** 전북대학교 항공우주공학과 석사과정 namewater@naver.com

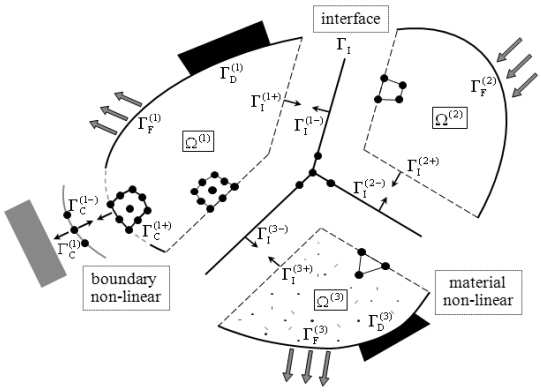

그림 1 Linear subdomains $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$; non-linear subdomain $\Omega^{(3)}$; interface Γ_{I}; and contact interface $\Gamma_{\mathrm{C}}^{(1-)}$

2. 영역/경계 분할법 및 해석 기법

전체 영역을 그림 1과 같이 비선형 영역과 경계를 독립적으로 분할한다. 분할된 접촉 공유면과 경계면의 연속 조건과 구속 조건은 벌칙 함수법을 적용한다. 재료 비선형성이 진전되는 부영역에서는 N형 재료 이론에 근거하여 자유 에너지 ϕ와 소산 퍼텐셜 ψ로부터 유도된 구성방정식을 적용하였다(Chung et al., 2002).

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{p} - \alpha_{kl} \theta_{+} \right) \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} = D_0 \frac{1}{2h\sqrt{\hat{J}_2}} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{\hat{J}_2} \right) \hat{\sigma}'_{ij} \tag{2}$$

여기서 C_{ijkl}는 초기 탄성 계수, D_0은 재료 상수, h는 내부 상태 변수에 대응하는 열역학적 공액력이다.

전체 영역에 대한 지배 방정식에 가상 변위를 도입하면, 지배 방정식의 약형을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{N_S+\tilde{N}_S} \delta \Pi_{\mathrm{D}}^{(k)} + \delta \Pi_{\mathrm{DI}} + \sum_{k=1}^{N_S+\tilde{N}_S} \delta \Pi_{\mathrm{C}}^{(k)} = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\mathrm{D}}^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho \ddot{u}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV - \int_{\Omega^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV - \int_{\Gamma_{\mathrm{F}}^{(k)}} \bar{t}_{\mathrm{F}i}^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS \\ & + \varepsilon_{\mathrm{DI}}^{(k)-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{I}}^{(k+)}} \left(u_i^{(k)} - v_i \right) \delta u_i^{(k)} dS + \varepsilon_{\mathrm{DC}}^{(k)-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{C}}^{(k+)}} \left(u_i^{(k)} - w_i^{(k)} \right) \delta u_i^{(k)} dS \end{aligned} \tag{4}$$

$$\delta \Pi_{\mathrm{DI}} = \sum_{k=1}^{N_S+\tilde{N}_S} \varepsilon_{\mathrm{DI}}^{(k)-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{I}}^{(k-)}} \left(v_i - u_i^{(k)} \right) \delta v_i dS \tag{5}$$

$$\delta \Pi_{\mathrm{C}}^{(k)} = \varepsilon_{\mathrm{DC}}^{(k)-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{C}}^{(k-)}} \left(w_i^{(k)} - u_i^{(k)} \right) \delta w_i^{(k)} dS + \varepsilon_{\mathrm{C}}^{(k)-1} \int_{\Gamma_{\mathrm{C}}^{(k)}} \left\langle w_j^{(k)} n_j^{(k)} - s^{(k)} \right\rangle^{+} n_i^{(k)} \delta w_i^{(k)} dS \tag{6}$$

유도된 변분 형태의 약형을 공간과 시간에 대하여 이산화하면, 블록 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|ccc} \hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{D}}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_{\mathrm{DI2}}^{(1)} & -\mathbf{P}_{\mathrm{DC2}}^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \mathbf{0} & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & {}^{t}\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{D}}^{(N_S+1)} & \cdots & -\mathbf{P}_{\mathrm{DI2}}^{(N_S+1)} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_{\mathrm{DC2}}^{(N_S+1)} & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline & & & & \mathbf{K}_{\mathrm{DI}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & & {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{DC}}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ & & sym. & & & & \ddots & \mathbf{0} & \cdots \\ & & & & & & & {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{DC}}^{(N_S+1)} & \cdots \\ & & & & & & & & \ddots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(N_S+1)} \\ \vdots \\ \hline {}^{t+\Delta t}\mathbf{v} \\ \hline {}^{t+\Delta t}\mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{w}^{(N_S+1)} \\ \vdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{D}}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{\hat{\mathbf{f}}}_{\mathrm{D}}^{(N_S+1)} \\ \vdots \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathrm{C2}}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{p}}_{\mathrm{C2}}^{(N_S+1)} \\ \vdots \end{array} \right\} \tag{7}$$

표 1 FLOPs results for solution algorithms, noDBD and w-v-u

Solution Algorithm	Domain/Boundary	(Range k)	FLOPs: Decomposition	FLOPs: Substitution
noDBD	Ω	-	$N_{TS}^{*}+\alpha \times f_3(D_u, B_u)$	$N_{IT} \times f_4(D_u, B_u)$
w-v-u	$\Omega^{(k)}$	$1,\cdots,N_S$	$1 \times f_3(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$	$D_v^{(k)}+D_w^{(k)}+N_{TS} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$
	$\Omega^{(k)}$	$N_S+1,\cdots,N_S+\tilde{N}_S$	$N_{TS}^{*} \times f_3(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$	$N_{TS}^{*}\times(D_v^{(k)}+D_w^{(k)})+N_{IT} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$
	Γ_I	-	$N_{TS}^{*} \times f_1(D_v)$	$N_{TS}^{*}\times D_w+N_{IT} \times f_2(D_v)$
	Γ_C	-	$N_{TS}^{*}+\alpha \times f_1(D_w)$	$N_{IT} \times f_2(D_w)$

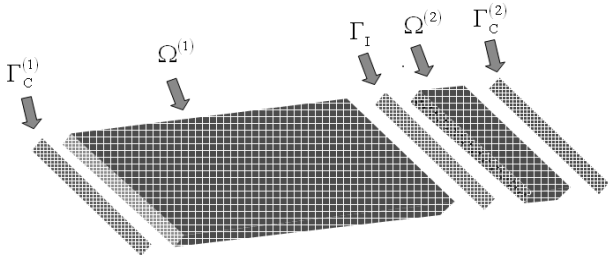

그림 2 Finite element model of 3D rectangular

여기서 $\mathbf{K}_D$, $\mathbf{K}_{DC}$, $\mathbf{K}_{DI}$는 강성행렬이며, **P**와 **p**는 각종 벌칙함수에서 기인하는 행렬이다. 특히, 비선형 부영역 $\Omega^{(k)}(k=N_S+1,\cdots N_S+\tilde{N}_S)$에서의 유효 강성 행렬과 하중 벡터는 손상 진전에 따라서 재계산 하게 된다.

모든 행렬의 조립과 계산 과정을 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기본 단위로 하는 병렬화된 알고리듬으로 처리하기 위하여, 공유면과 접촉 공유면의 변위 연속 조건을 벌칙함수로 처리 하였다. 따라서, 식 (7)를 구하는 미지수(변위) 순서를 기준으로 네 종류의 해석 알고리듬 **w-v-u**, **v-w-u**, **w-u**, **v-u**로 구성할 수 있다.

계산의 효율성을 측정하기 위해 해석 알고리듬 **w-v-u**에 소요되는 연산 횟수 FLOPs(Floating-Point OPerations)를 표 1에 정리하였다. 여기서 **noDBD**은 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. Gauss 소거법에 의한 전체 행렬의 삼각 분해 단계 $f_1(D)$와 대입 단계 $f_2(D)$, 대역 행렬에 대한 삼각 분해 단계 $f_3(D, B)$와 대입 단계 $f_4(D, B)$로 구분된다. 여기서 D는 총 자유도, B는 대역폭의 크기이다. $\alpha^{(k)}$는 k번째 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 횟수, N_{TS}는 총 시간 증분 횟수, N^{*}_{TS}는 손상 진전에 따른 재계산 횟수, N_{IT}는 총 반복 계산 횟수이다.

3. 수치 예제 해석 및 고찰

영역/경계 분할법을 적용한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성을 고찰하기 위하여, 그림 2에 도시되어 있는 육면체 요소(400×100×10)로 구성된 간단한 삼차원 직육면체 유한요소 모델을 수치 해석 하였다.

표 2는 N_{TS}=10,000, N^{*}_{TS}=5,000, $\alpha^{(k)}$=20,000, N_{IT}=40,000, $\Omega^{(1)}$:$\Omega^{(2)}$=0.94:0.06일 때 각각의 해석 알고리듬에 대한 FLOPs 산출 내역의 예시이다. 재료 비선형성에 관련된 반복 계산 대부분을 부영역 $\Omega^{(2)}$에서 수행함을 확인할 수 있다. 그림 3은 $\Gamma_C^{(1-)}$ 요소 1개, $\Gamma_C^{(2-)}$ 요소 1개 조건에서 시간 증분 횟수 N_{TS}에 따른 FLOPs 결과이다. 알고리듬 **w-v-u**의 계산량이 최대 2.90%로 가장 효율적이며, 이는 열탄점소성 손상 및 접촉 거동에 대한 반복 계산을 일부 영역과 접촉 공유면에서만 수행하기 때문이다.

그림 4는 접촉 상태 변화(α/N_{TS}=0.1~4)에 따른 FLOPs 결과이다. 접촉 경계면을 분할한 **w-v-u, v-w-u, w-u**의 경우에는 계산량이 최대 1.62%로 감소하나, 분할하지 않은 **v-u**의 경우에는 계산량이 증가한다.

표 2 FLOPs results for 3D rectangular model

Solution Algorithm	Domain/ Boundary	Domain Type	Contact Boundary	Nodes	Elements	Size of Matrix		No. of Calculations		Total GFLOPs			
						D.O.F.	H.B.W.	Decomp.	Substi.	Decomp.	Substi.	Total	Percent.
u(noDBD)	Ω	TEPD	○	445,511	400,000	1,336,533	3,372	25,000	40,000	379,170,934.89	540,025.77	379,710,960.66	100.0000
w-v-u	$\Omega^{(1)}$	TE	△	401,071	360,000	1,203,213	3,372	1	13,345	13,651.39	162,171.72	175,823.11	0.0463
	$\Omega^{(2)}$	TEPD	△	45,551	40,000	136,653	1,392	5,000	16,765,000	1,314,005.81	9,513,889.61	10,827,895.43	2.8516
	Γ_I			1,111	1,000	3,333		5,000	160,000	61,709.87	2,665.87	64,375.74	0.0170
	Γ_C		○	8	2	24		25,000	40,000	0.12	0.03	0.15	0.0000
	Total	—	—	447,741	401,002	—	—	—	—	1,389,367.19	9,678,727.23	11,068,094.42	2.9149
v-w-u	$\Omega^{(1)}$	TE	△	401,071	360,000	1,203,213	3,372	1	13,345	13,651.39	162,171.72	175,823.11	0.0463
	$\Omega^{(2)}$	TEPD	△	45,551	40,000	136,653	1,392	5,000	16,765,000	1,314,005.81	9,513,889.61	10,827,895.43	2.8516
	Γ_I			1,111	1,000	3,333		25,000	40,000	308,549.36	666.47	309,215.83	0.0814
	$\Gamma_C^{(1)}$		○	4	1	12		20,001	66,693,333	0.01	14.01	14.02	0.0000
	$\Gamma_C^{(2)}$		○	4	1	12		25,000	83,365,000	0.01	17.51	17.52	0.0000
	Total	—	—	447,741	401,002	—	—	—	—	1,636,206.59	9,676,759.31	11,312,965.90	2.9794
w-u	Ω	TEPD	△	445,511	400,000	1,336,533	3,372	5,000	160,000	75,834,186.98	2,160,103.08	77,994,290.06	20.5404
	Γ_C		○	8	2	24		25,000	40,000	0.12	0.03	0.15	0.0000
	Total	—	—	445,519	400,002	—	—	—	—	75,834,187.09	2,160,103.11	77,994,290.21	20.5404
v-u	$\Omega^{(1)}$	TE	○	401,071	360,000	1,203,213	3,372	20,001	66,693,333	273,041,398.50	810,473,773.44	1,083,515,171.94	285.3526
	$\Omega^{(2)}$	TEPD	○	45,551	40,000	136,653	1,392	25,000	83,365,000	6,570,029.07	47,308,404.87	53,878,433.93	14.1893
	Γ_I			1,111	1,000	3,333		25,000	40,000	308,549.36	666.47	309,215.83	0.0814
	Total	—	—	447,733	401,000	—	—	—	—	279,919,976.93	857,782,844.77	1,137,702,821.70	299.6234

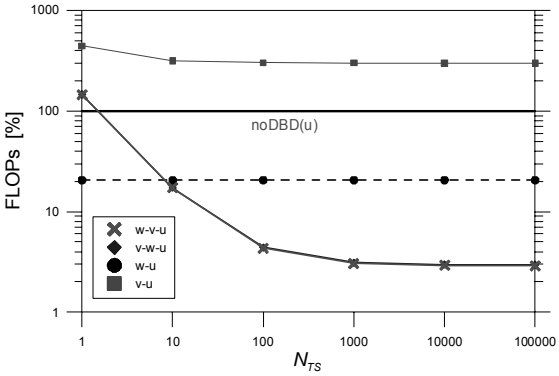

그림 3 FLOPs vs. time step

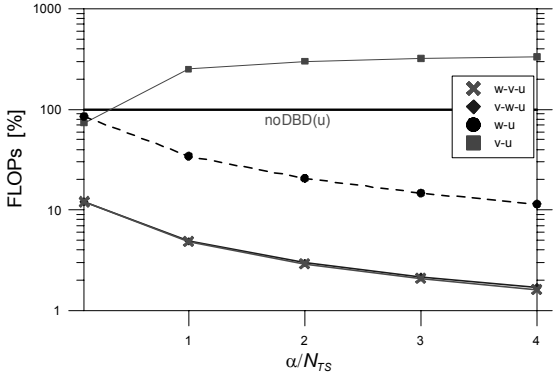

그림 4 FLOPs vs. no. of contact state changes

4. 결론

본 논문에서는 영역/경계 분할법을 적용한 유한요소 정식화 기법을 통하여 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성 향상을 분석하였다. 영역/경계 분할을 적용함으로써 열탄점소성 손상 및 접촉과 같은 국부적인 비선형성을 일부 부영역 및 공유면에 할당할 수 있다. 최종 지배 방정식의 블록 행렬 형태에 따른 다양한 알고리듬을 분석한 결과 계산량이 최대 1.6%~12.1%까지 감소함을 확인하였다.

참고문헌

김용언, 류한열, 신의섭 (2007) 영역/경계 분할 정식화에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 검토, **한국전산구조공학회 논문집**, 20(4), pp. 469-476

Badea, L., Gilormini, P. (1994) Application of a Domain Decomposition Method to Elastoplastic Problems, *Int. J. Solids and Structures,* 31(5), pp. 643-656

Chung, S.W., Kim, S.J., Kim, J.H. (2002) Finite Element Simulation of Metal Forming and In-Plane Crack Propagation using Ductile Continuum Damage Model, *Computers & Structures*, 80(23), pp. 1771-1788