

# 동질성 및 이질성 모집단의 가설검정과 구간추정의 비교

## - Comparison of Hypothesis Tests and Interval Estimations for Homogeneous and Heterogeneous Populations -

최 성 운\*

Sungwoon Choi\*

### Abstract

The present study proposes the various hypothesis tests and interval estimations for homogeneous and heterogeneous populations in the continuous and discrete process. These results can be used to complement the QC story 15 steps for quality improvement circle and DMAIC processes for six sigma innovation.

**Keywords :** Hypothesis Tests, Interval Estimation, Homogeneous, Heterogeneous Populations

### 1. 서론

품질개선 및 혁신활동을 위해 기업에서는 Bottom-up 과제의 품질분임조 활동과 Top-Down 프로젝트의 식스시그마 운동을 실시하고 있다. 품질분임조 활동에서는 QC 스토리 15단계를, 식스시그마 운동에서는 DMAIC 5단계의 개선프로세스를 활용한다.

QC 스토리 15단계는 특정 부서의 개선팀이 심도있는 기술업무과제를 다룰 수 있도록 회사소개, 분임조소개, 공정소개, 주제선정, 활동계획수립, 현상파악, 원인분석, 목표설정, 대책수립, 대책실시, 결과분석, 효과파악, 표준화, 사후관리, 반성 및 향후계획 등의 세부단계를 이용한다. 그러나 식스시그마는 CTQ의 프로젝트에 따른 다양한 부서의 개선팀이 구성되므로 개선단계를 Define, Measure, Analyze, Improve, Control의 5단계로 간소화하는 대신 통계적 기법과 MINITAB 분석을 공통 언어로 활용하고 있다.

---

\* 경원대학교 산업공학과

QC Story 15단계에서 대책실시, 결과분석, 사후관리 단계와 DMAIC 5단계의 Analyze, Improve 단계에서는 개선전후의 효과, 핵심인자의 선정, 최적조건의 설정을 위해 다양한 가설검정[1,5,6]과 구간추정[2-4,7]방법을 사용하고 있다. 이 중 2개 모집단 추정 방법은 개선전의 모집단에 관한 모수의 정보를 사전에 축적하지 않은 즉 품질관리 활동이 전혀 실시되지 않은 기업이나 또는 새로운 프로젝트를 수행하여 개선전의 모수에 관련된 정보가 불확실한 경우 사용되는 제한된 방법이다. 그러나 국가품질경영 대회에 출전하는 품질분임조, 식스시그마 팀 모두가 확일적으로 2개 모집단의 추정기법을 사용하고 있는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 개선전의 모집단에 관련한 모수의 정보를 사전에 축적할 수 없는 환경하의 기업에서 적용할 수 있는 동질성, 이질성 2개 모집단의 가설검정과 구간 추정 방법을 비교하고자 한다. 첫째 본 연구에서는 계량 연속형 모집단의 동질성 및 이질성 판정 방법을 고찰하고 계수이산형 공정에서도 사용할 수 있는 방법을 제시한다. 둘째 계량연속형 3개 모집단에서 샘플(표본, 시료)의 유형을 동일 샘플, 상이 샘플에 따른 추정기법의 선정방안을 제시하고 끝으로 이미 사용되고 있는 부적합품 이외에 부적합수, 단위당 부적합수의 이질성 2개 모집단의 추론방법을 제안한다.

## 2. 동질성 및 이질성 모집단 판정방법

### 2.1 계량연속형 판정방법

동질성 및 이질성의 판정방법으로 2개 모집단인 경우 양쪽검정의 F추론방법이 사용되고 있다. F검정은  $F_0 = MS_1 / MS_2$ 가 기각치  $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(DF_1, DF_2)$ 보다 크거나  $F_{\frac{\alpha}{2}}(DF_1, DF_2)$ 보다 작을 경우 이질성 모집단으로 판정된다. 양쪽검정은 두 모집단의 정보가 전혀 없을 경우 사용되는 방법이다.

3개 이상 모집단의 동질성(Equality of Variance)을 파악하는 방법으로 Levene 검정, Bartlett 검정, Hartley 검정, Cochran 검정, R, s 관리도 등이 있다.

Levene 검정은 모집단(A)의 수  $i=1, 2, \dots, l$ , 샘플의 수  $j=1, 2, \dots, m_i$ , 데이터  $y_{ij}$ , 각 모집단의 메디안  $\tilde{y}_i$ 일 경우  $Z_{ij} = |y_{ij} - \tilde{y}_i|$ 의 Robust 값이다. Total(T)=Error(E)+

$$\text{모집단 A에서 } SS_T = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} (Z_{ij} - \bar{Z})^2, \quad SS_E = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2,$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2, \quad DF_T = N (= \sum_{i=1}^l m_i) - 1, \quad DF_E = N - l, \quad DF_A = l - 1 \text{이다.}$$

$L = MS_A / MS_E$ 가  $F_{1-\alpha}(DF_A, DF_E)$ 보다 클 경우 이질성 모집단으로 판정된다.

Bartlett 검정은 가중산술평균 =  $\sum_{i=1}^l (m_i - 1)MS_i^2 / (\sum_{i=1}^l m_i - l)$ 과 가중기하평균 = [

$MS_1^{m_1-1} \cdot MS_2^{m_2-1} \dots MS_l^{m_l-1}]^{1/\sum_{i=1}^l (m_i-1)}$  에서  $D = (\sum_{i=1}^l m_i - l)[\log(\text{가중산술평균/가중기하평균})]$ ,  
 $E = 1 + \left\{ \left( \sum_{i=1}^l (m_i - 1)^{-1} \right) - \left( \sum_{i=1}^l m_i - l \right)^{-1} \right\} / 3(l-1)$  이다.  $B = \frac{D}{E}$  가  $\chi^2_{1-\alpha}(DF=l-1)$  보  
 다 클 경우 이질성 모집단으로 판정된다. Bartlett 검정은 다양한 확장형으로 사용되며  
 Hartley 검정은 MS의 최대값과 최소값을 비교하는 방법이다.[8]

## 2.2 계수이산형 판정방법

계수이산형은 부적합품인 경우 초기하분포, 이항분포, 포아송분포를 계산의 간략화  
 (Approximation) 관점에서 계산의 편의성을 고려하여 사용자가 선택 활용하며 부적합  
 은 설비고장, 대기행렬의 고객의 수와 같이 포아송 분포를 적용한다. 그러나 모부적합  
 품수, 모부적합수가 5를 초과할 정도로 샘플의 크기  $n$ 이 클 경우 정규분포로 근사하여  
 추론문제를 해결한다.

정규근사된 부적합품인 경우  $F_0 = (p_1(1-p_1)/n_1)/(p_2(1-p_2)/n_2)$ , 부적합수인 경우,  
 $F_0 = c_1/c_2$ , 단위당 부적합인 경우  $F_0 = (u_1/n_1)/(u_2/n_2)$ 가  $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(DF_1, DF_2)$ 보다 크  
 거나  $F_{\frac{\alpha}{2}}(DF_1, DF_2)$ 보다 작을 경우 이질성의 모집단으로 판정한다. 자유도  $DF_1,$   
 $DF_2$ 가 120 보다 클 경우 각각  $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\infty, \infty) = 1$ 이 되며  $n$ 이 클 경우 부표없이도  
 쉽게 판정이 가능하다.

## 3. 계량연속형 모집단의 비교

### 3.1 $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 기지 두 모평균차 추론

개선전과 개선후 두 모집단의 모분산을 알고 있으나 모평균의 정보를 추론하는 방  
 법은 작업자 또는 기술자의 정밀도 조건은 동일 조건으로 하고, 기술 파라미터의 정확  
 도 변화를 파악하려고 하는 경우 적용된다.

이질성 모집단인 경우 가설검정  $Z_0 = ((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2))/(\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)^{1/2}$ , 구간  
 추정  $\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)^{1/2}$ 이며 동질성 모집단인 경우 가설검

정  $Z_0 = ((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2))/\sigma(1/n_1 + 1/n_2)^{1/2}$ , 구간추정  $\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm$   
 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(1/n_1 + 1/n_2)^{1/2}$ 이다.

### 3.2 $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 미지 두 모평균차 추론

#### 3.2.1 동일 샘플인 경우

동일 샘플인 두 모집단이 2.1절의 방법에 의해 이질성 모집단으로 판정된 경우 가설검정  $t_0 = ((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)) / (MS_1/n_1 + MS_2/n_2)^{1/2}$ , 구간추정  $\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(DF^*)(MS_1/n_1 + MS_2/n_2)^{1/2}$ 이다.  $DF^*$ 는 Satterthwaite의 자유도로

$$DF^* = (MS_1/n_1 + MS_2/n_2)^2 / ((MS_1/n_1)^2/DF_1 + (MS_2/n_2)^2/DF_2)$$

동일 샘플인 동질성 모집단으로 2.1절의 방법에 의해 판정된 경우 가설검정  $t_0 = ((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)) / (MS(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$ , 구간추정  $\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$(DF = DF_1 + DF_2 = n_1 + n_2 - 2)(MS(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$ , 가중자유도의

$$MS = (DF_1 \times MS_1 + DF_2 \times MS_2) / (DF_1 + DF_2)$$

#### 3.2.2 상이 샘플인 경우

상이(Different) 샘플인 경우 개선전후 두모집단  $x_1, x_2$  데이터 쌍(Pair)간을 Block화 하여 차이(Difference)  $d = |x_1 - x_2|$ 이다. 가설검정  $t_0 = (\bar{d} - \delta) / (MS_d/n)^{1/2}$ , 구간추정은  $\delta = \bar{d} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(DF = n - 1)(MS_d/n)^{1/2}$ 이다.

## 4. 계수이산형 모집단의 비교

### 4.1 두 모부적합품률 차 추론

부적합품은 Unit 기준으로 세는 불량으로 1개 이상의 부적합(결점)이 모인 것이다. 두 모집단이 2.2절의 방법에 이질성 집단으로 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)) / (p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2)^{1/2}$ , 구간추정  $P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2)^{1/2}$ 이다.

두 모집단이 동질성 집단으로 2.2절의 방법에 의해 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)) / (p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$ , 구간추정  $P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}(p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$  가중부적합품률  $p = (n_1 p_1 + n_2 p_2) / (n_1 + n_2)$ 이다.

## 4.2 두 모부적합수 추론

부적합수는 샘플  $n$ 이 일정한 경우 개개의 스펙을 벗어나는 기준으로 카운트되는 결점으로  $n$ 에 영향을 받지 않는 추론방법을 적용한다.

두 모집단이 2.2절의 방법에 의해 이질성 집단으로 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((c_1 - c_2) - (C_1 - C_2)) / (c_1 + c_2)^{1/2}$ , 구간추정  $C_1 - C_2 = (c_1 - c_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} (c_1 + c_2)^{1/2}$ 이다.

두 모집단이 2.2절의 방법에 의해 동질성 집단으로 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((c_1 - c_2) - (C_1 - C_2)) / (c_1 + c_2)^{1/2}$ , 구간추정  $C_1 - C_2 = (c_1 - c_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} (2c)^{1/2}$ ,  $c = c_1 + c_2$ 이다.

## 4.3 두 모 단위당 부적합 추론

단위당 부적합수는 샘플  $n$ 이 일정하지 않는 경우 적용되는 계수이산형 결점 데이터이다.

두 모집단이 2.2절의 방법에 의해 이질성 집단으로 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((u_1 - u_2) - (U_1 - U_2)) / (u_1/n_1 + u_2/n_2)^{1/2}$ , 구간추정  $U_1 - U_2 = (u_1 - u_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} (u_1/n_1 + u_2/n_2)^{1/2}$ 이다.

두 모집단이 2.2절의 방법에 의해 동질성 집단으로 판정된 경우 가설검정  $Z_0 = ((u_1 - u_2) - (U_1 - U_2)) / (u(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$ , 구간추정  $U_1 - U_2 = (u_1 - u_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} (u(1/n_1 + 1/n_2))^{1/2}$ , 가중단위당 부적합수  $\nu = (n_1 u_1 + n_2 u_2) / (n_1 + n_2)$ 이다.

## 5. 결론

본 연구는 품질분임조 QC 스토리 15단계, 식스시그마 DMAIC 5단계를 개선전후 효과를 파악하는 대책실시, 결과분석, 사후관리, Improve 단계에서 적용되는 2개 모집단의 추론 방법을 동질성, 이질성 모집단으로 유형화하여 제시하였다. 연구 결과는 다음과 같다.

첫째 계량연속형 공정에서 동질성 모집단의 판정방법으로 F검정, Levene 검정, Bartlett 검정을 고찰하고 계수이산형 공정에서 동질성 모집단의 판정방법으로 정규근사 조건일 경우 F검정의 확장방안을 제안하였다. 둘째 계량연속형 공정인 경우 샘플의 형태가 동일한 경우, 상이한 경우의 2개 모집단 추론 방법을 구분, 비교하였고 끝으로 부적합수, 단위당 부적합수의 동질성 두 모집단에 관한 가설검정과 구간 추정 방법을 개발하였다.

## 6. 참 고 문 헌

- [1] 최성운, "샘플링오차에 의한 품질통계 모형의 해석", 대한안전경영과학회지, 10 (2) (2008) : 205-210.
- [2] 최성운, "부적합품률의 이항 신뢰구간 추정 및 응용", 대한안전경영과학회지, 9 (4) (2007) : 143-147.
- [3] Altman D., Machin D., Bryant T. and Gardner S., *Statistics with Confidence : Confidence Intervals and Statistical Guidelines*, 2nd Edition, BMJ Books, 2000.
- [4] Cox D.R., *Principles of Statistical Inference*, Cambridge University Press, 2006.
- [5] KSA 3251-1 : 2008 데이터의 통계적 해석 방법-제1부 : 데이터의 통계적 기술.
- [6] KSA 3251-2 : 2001 데이터의 통계적 해석 방법-제2부 : 평균 및 분산에 관한 검정, 방법 및 추정 방법.
- [7] Lehman E.L., and Casella G., *Theory of Point Estimation*, 2nd Edition, Springer, 2003.
- [8] Lim T.S., Loh W.Y., "A Comparison of Tests of Equality of Variances", *Computational Statistics & Data Analysis*, 22 (1996) : 287-301.