

# MPDSAP 적응필터를 위한 MSE의 통계적 해석

김영민\* · 최 훈\*

\*동의대학교 전자공학과

## Statistical Analysis of the MSE for the MDPSAP Adaptive Filter

Young-min Kim\* · Hun Choi\*

\*Dong-eui University

E-mail : hchoi@deu.ac.kr

### 요 약

본 논문은 AR(P) 입력에 대해 MPDSAP 알고리즘의 적응과정의 MSE의 통계적 분석을 제시한다. 부밴드 구조에서 인접투사 알고리즘은 적응필터에 다위상 분해와 노블아이덴티티를 적용함으로써 NLMS 알고리즘으로 변환된다. 또한, P차의 Autoregressive(AR) 입력은 정규직교 분해필터에 의해 사전에 백색화 될 수 있다. 부밴드 구조에서 AR(P) 입력의 사전-백색화(pre-whitening)는 SAP 적응필터의 MSE 행동의 통계적 해석을 위한 간단하고 유효한 근사화를 제공한다.

### ABSTRACT

This paper presents a statistical analysis of the MSE of adaptation for the MPDSAP (Maximally polyphase decomposed Subband Affine Projection) algorithm for the an autoregressive (AR) inputs with P order. In subband structure, the Affine Projection (AP) algorithm is transformed to the Normalized Least Mean Square (NLMS) algorithm by applying the polyphase decomposition and the noble identity to the adaptive filter. And also, AR input can be pre-whitened by subband filtering with the Orthonormal Analysis Filters(OAF). In the subband structure, the pre-whitening of the AR(P) inputs provides simple and valid approximations for a statistical analysis of the MSE behaviors for the SAP adaptive filter.

### 키워드

Subband Affine Projection Algorithm, Adaptive Filter, Autoregressive, MSE, Statistical Analysis

## 1. 서 론

음향반향제거, 채널등화, 시스템 식별 등 다양한 통신시스템 응용분야에서 NLMS(Normalized Least Mean Square) 알고리즘은 간단함과 안정성으로 널리 사용된다[1]. 이러한 NLMS 알고리즘의 수렴속도와 정상상태오차는 적응이득 파라미터(adaptive gain parameter)의 크기에 의존하며 상관도가 없는 가우시안 입력(Gaussian inputs)에 대한 수렴성능 해석이 많은 연구자들에 의해 이루어졌다. 최근 NLMS 알고리즘의 일반형인 인접투사(Affine Projection : AP) 알고리즘에서 상관도가 높은 AR(P) 프로세서를 입력으로 하고 단위 적응이득을 사용할 때 적응필터의 수렴성능에 대한 통계적 해석이 발표되었다[2]. 그러나 실제 응용에 있어서 통계적 경사형 알고리즘의 수렴속도(convergence

speed) 및 정상상태오차(steady-state error)는 적응필터 길이와 입력신호 상관도에 의존하는 자기상관행렬 (autocorrelation matrix)의 통계적 특성에 따라 영향을 받는다. 높은 입력 상관도와 긴 길이의 적응필터의 사용은 자기상관행렬의 행렬계수 (rank) 증가를 증가시키며 고유치 (eigen value)들을 넓게 분포하게 하여 자기상관행렬의 조건수 (condition number)가 증가하게 된다. 이러한 조건수 증가 (ill condition)에 의해 NLMS 적응필터의 수렴성능은 저하된다. 따라서 적응 알고리즘에서 입력신호 자기상관행렬의 조건수에 의한 영향을 줄여주기 위해서 적응이득 파라미터를 사용해야 하며 적응이득 파라미터를 포함한 MSE의 해석이 필요하다.

본 논문에서는 AR(P) 입력을 사용하는 MPDSAP (Maximally Polyphase Decomposed Subband Affine

Projection) 알고리즘의 MSE에 대한 통계적 해석을 제시한다. 상관도가 높은 AR(P) 프로세서를 입력으로 하고 임의의 크기를 갖는 적응이득 파라미터를 고려한다. 부밴드 구조에서 정규 직교분해 필터의 사용으로 AR(P) 입력신호는 각 부밴드에서 백색화된 가우시안 입력으로 해석이 가능하다.

## II. MPDSAP Algorithm with AR(P) Processor

일반적인 적응 시스템 식별 모델에서 입력신호  $u(n)$ 이 0 (zero) 평균이며 wss (wide sense stationary)인 AR(P) 프로세서라 가정하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + f(n) \quad (1)$$

여기서  $a_i$ 는 AR 프로세서의 계수이고  $f(n)$ 은 분산이  $\sigma_f^2$ 인 wss 백색 프로세서이다.

그림 1은 음향반향제거를 위한 직교정규 분해 필터(Orthonormal Analysis Filters: OAF)를 사용하는 M-부밴드 구조의 적응시스템 식별 모델이다. 입력  $u(n)$ 과 원하는 신호  $d(n)$ 은 OAF에 의해 각각 부밴드 입력신호인  $\phi_i(n)$ 와 부밴드 원하는 신호  $d_i(n)$  (for  $i=1, 2, \dots, M-1$ )로 분해되며 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_i(n) = \mathbf{h}_i^T(n) \mathbf{u}(n) \quad (2)$$

$$d_i(n) = \mathbf{h}_i^T(n) [d(n) + \mathbf{z}(n)] \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{u}(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-L+1)]^T$ ,  $\mathbf{d}(n) = [d(n) \ d(n-1) \ \dots \ d(n-L+1)]^T$ ,  $\mathbf{z}(n) = [z(n) \ z(n-1) \ \dots \ z(n-L+1)]^T$ 이고  $L$ 은 OAF  $\mathbf{h}_i$ 의 길이이다. ( $\downarrow M$ )는  $M$ -fold 데시메이터(decimator)를 의미하며 노블아이엔티티와 다위상 분해 기법에 의해  $\phi_i(n)$ 과  $d_i(n)$ 는 각각 다음과 같이 다위상 성분으로 분해된다.

$$\phi_{ij}(k) = \phi_i(Mk-j) \quad (4)$$

$$d_i(k) = d_i(Mk) \quad (5)$$

여기서  $i$ 와  $j=0, 1, \dots, M-1$ 이고  $k=0, 1, \dots$ 이다. 이때 적응필터를 다위상 성분으로 표현하면  $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}_0(z^M) + z^{-1}\mathbf{S}_1(z^M) + \dots + z^{-M+1}\mathbf{S}_{M-1}(z^M)$ 와 같다. 각 부밴드에서 적응필터의 출력  $y_i(k)$ 은 적응 부필터(adaptive sub-filter)의 출력의 합으로  $y_i(k) = \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) \mathbf{s}_j(k)$ 와 같이 표현되며 부밴드 오차

신호는  $e_i(k) = d_i(k) - \sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k) \mathbf{s}_j(k)$ 와 같이 표현된다. 이때 적응필터는  $\mathbf{s}(k) = [\mathbf{s}_0^T(k) \ \mathbf{s}_1^T(k) \ \dots \ \mathbf{s}_{M-1}^T(k)]^T$ 와 같이 표현되고 부밴드 입력신호 벡터의 다위상 성분은  $\phi_{ij}(k) = [\phi_{ij}(k) \ \phi_{ij}(k-1) \ \dots \ \phi_{ij}(k-N_s+1)]^T$ 로 표현되는  $N_s \times 1$  벡터 ( $N_s = N/M$ )이다. 최대다위상 분해된 부밴드 인접투사 알고리즘

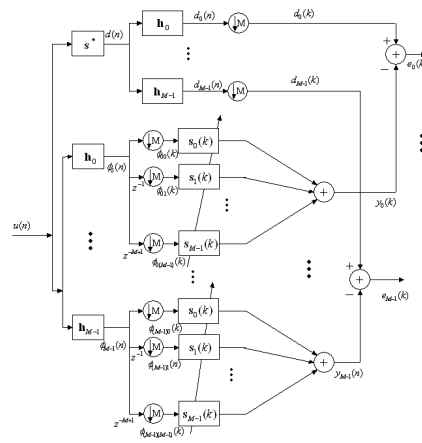


그림 1. 부밴드 적응시스템식별 모델

(MPDSAP)의 각 적응 부필터 계수갱신식은 NLMS 알고리즘의 계수갱신식과 유사하며 M-부밴드 경우 다음과 같이 쓸 수 있다[3].

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{s}(k) + \mu \Phi(k) [\Phi(k) \Phi^T(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) \quad (6)$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \phi_{00}(k) & \phi_{10}(k) & \dots & \phi_{(M-1)0}(k) \\ \phi_{01}(k) & \phi_{11}(k) & \dots & \phi_{(M-1)1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{0(M-1)}(k) & \phi_{1(M-1)}(k) & \dots & \phi_{(M-1)(M-1)}(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{e}(k) = [e_0(k), e_1(k), \dots, e_{M-1}(k)]^T \quad (8)$$

여기서  $\Phi(k)$ 는  $MN_s \times M$  크기의 행렬이고  $\mathbf{e}(k)$ 는  $M \times 1$  크기의 벡터이다.

식 (6)으로부터 MPDSAP 적응필터의 평균자승 오차를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{v}(k+1) = [\mathbf{I} - \mu \Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)] \mathbf{v}(k) + \mu \Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \mathbf{e}^* \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{v}(k) = \mathbf{s}(k) - \mathbf{s}^*$ ,  $\mathbf{e}^* = \mathbf{d}(k) - \Phi^T(k) \mathbf{s}^*$ ,  $\mathbf{d}(k) = [d_0(k), d_1(k), \dots, d_{M-1}(k)]^T$  그리고  $\mathbf{s}^* = [s_0^* \ s_1^* \ \dots \ s_{M-1}^*]^T$ 는 추정하고자 하는 미지시스템의  $N \times 1$  계수벡터이다.

## III. Statistical Analysis of the MSE

식 (9)는 닫힌 식(closed form)으로 MPDSAP의 수렴성능은 상관행렬  $E\{\Phi(k) [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\}$ 에 의존함을 알 수 있다. MPDSAP 적응필터의 수렴성능에 대한 통계적 해석을 위해 다음과 같이 대부분의 통계적 알고리즘의 해석에서 사용되는 독립 가정(independence assumption)과 유사한 가정을 사용한다.

### Assumption 1 :

AR(P) 프로세서인 입력  $u(n)$ 이 OAF에 의해 충분히 분해되었다고 가정하면 부밴드 입력신호의 sequence  $\{\phi_i(n)\}$ 와  $\{\phi_j(n)\}$ 는  $i \neq j$ 에 대해 확률적으로 직교(statistically orthogonal)인 백색 가우시안 랜덤 프로세서(white Gaussian random process)로서 평균은 zero이며 분

산은  $\sigma_i^2$ 이다.

가정 1로부터 OAF에 의해 부밴드 분해된 입력 신호  $\{\phi_i(n)\}$ 와 다위상 성분  $\{\phi_{ij}(k)\}$ 와  $\{\phi_{kl}(k)\}$ 는  $i \neq j$  or  $k \neq l$ 에 대해 확률적으로 직교(stochastically orthogonal)인 백색 가우시안 랜덤 프로세서로서 평균과 분산은 각각 zero와  $\sigma_{ij}^2 \approx \sigma_i^2$ 이다.

위의 가정으로부터 식 (6)에서  $\Phi(k)$  또는  $\Phi^T(k)$ 의 각 부밴드 입력벡터  $(\phi_{ij}(k))$ 들은  $[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}$ 의 성분들과 종속성(dependency)이 적으며 이러한 종속성은  $M$ 이 증가할수록 무시할 만큼 작아지므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \approx E\{\Phi(k)E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\}\Phi^T(k)\} \quad (10)$$

여기에서  $E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\}$ 는  $M \times M$  크기의 상관행렬로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\} \approx R_{\Phi}^{-1}(k) \quad (11)$$

식(11)에서  $R_{\Phi}^{-1}(k)$ 은 가정 1로부터 주대각 성분을 제외한 나머지 성분들은 모두 zero인 대각행렬이 되며  $i$ 번째 주대각 성분은 다음과 같다.

$$R_{\Phi}^{-1}(k) = E\left\{\left[\sum_{j=0}^{M-1} \phi_{ij}^T(k)\phi_{ij}(k)\right]^{-1}\right\} \approx \frac{1}{M\sigma_i^2} \quad (12)$$

따라서 식 (12)는 다음과 같이  $i$ 번째 주대각 성분들이 해당 부밴드 신호의 분산으로 구성된 대각행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$E\{[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\} = (1/M)\Lambda^{-1}(k) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 1/\sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_1^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sigma_{M-1}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (13)의 결과를 이용하여 식 (10)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} = \frac{1}{M} E\left\{\begin{bmatrix} G_0^{-1}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_1^{-1}(k) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_{M-1}^{-1}(k) \end{bmatrix}\right\} \quad (14)$$

여기서

$$E\{G_j^{-1}(k)\} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\} \approx M I_{N_s} \quad (15)$$

이때  $E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\} = R_{\phi_{ij}}(k)$ 은  $N_s \times N_s$  행렬로서  $R_{\phi_{ij}}(k) = \sigma_{ij}^2 I_{N_s} = \sigma_i^2 I_{N_s}$ 이다. 따라서 식 (10)은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} = I \quad (16)$$

식(9)의 평균자승오차 반복식이 수렴하기 위한 조건은 식 (16)의 결과로부터  $|1-\mu| < 1$ 이다.

MPDSAP 알고리즘에서 MSE는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J(k) &= E\{[e^* + e(k) - e^*]^2\} \\ &= E\{[e^*]^2\} + 2E\{e^*[e(k) - e^*]\} + E\{[e(k) - e^*]^2\} \\ &= J^* - 2E\{e^*\Phi^T(k)v(k)\} + E\{v^T(k)\Phi(k)v(k)\} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $J^*$ 는 계수벡터  $s^*$ 이 Wiener 해일 때 적응필터의 MSE 이다.

#### Assumption 2 :

부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력행렬  $\Phi(n)$ 와 적응필터 계수벡터  $s(k)$ 는 통계적으로 독립이다.

가정 2는  $\Phi(k)$ 와 계수오차벡터  $v(k)$ 가 통계적으로 독립임을 의미하므로 식 (17)의 두 번째 항  $2E\{e^*\Phi^T(k)v(k)\} = 2e^*E\{\Phi^T(k)\}E\{v(k)\}$ 은 가정 1에 의해  $E\{\Phi^T(k)\} = 0$ 이므로 제거될 수 있다. 따라서 식 (17)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$J(k) = J^* + E\{v^T(k)\Phi(k)\Phi^T(k)v(k)\} \quad (18)$$

식 (10) ~ 식(15)에서 사용했던 유사한 방법에 의해 식 (18)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} J(k) &\approx J^* + E\{v^T(k)E\{\Phi(k)\Phi^T(k)\}v(k)\} \\ &= J^* + \text{tr}\{R_{\Phi\Phi}(k)K(k)\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $K(k) = E\{v(k)v^T(k)\}$ 이다.

가정 1로부터 식 (19)에서  $R_{\Phi\Phi}(k)$ 은 주대각 성분을 제외한 나머지 성분들이 모두 zero인 대각행렬이며,  $j$ 번째 주대각 성분  $R_{\phi_{ij}}(k)$ 은 식 (15)의 결과를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{\phi_{ij}}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} E\{\phi_{ij}(k)\phi_{ij}^T(k)\} = \sum_{i=0}^{M-1} R_{\phi_{ij}\phi_{ij}}(k) = \sigma_u^2 I_{N_s} \quad (20)$$

여기서  $\sigma_u^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_{M-1}^2$ .

식 (20)으로부터  $R_{\Phi\Phi}(k) = \sigma_u^2 I$ 이므로 식 (19)의 MSE는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J(k) = J^* + N\sigma_u^2 \text{tr}\{K(k)\} \quad (21)$$

$\text{tr}\{K(k)\}$ 을 찾기 위하여 식 (9)로부터 계수오차벡터의 상관행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{v(k+1)v^T(k+1)\} &= E\{(I - \mu\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)) \\ &\quad v(k)v^T(k)(I - \mu\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k))\} \\ &\quad + \mu E\{(I - \mu\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)) \\ &\quad \quad v(k)e^*T[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ &\quad + \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}e^*v^T(k) \\ &\quad \quad (I - \mu\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k))\} \\ &\quad + \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}e^*e^*T[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (22)$$

#### Assumption 3 :

부밴드 분해된 입력신호들로 구성되는 입력행렬  $\Phi(k)$ 와  $e^*$ 는 통계적으로 독립이다.

가정 3으로부터 식 (22)의 네 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}e^*e^*T[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \\ = \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}E\{e^*e^*T\}[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1}\Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (23)$$

#### Assumption 4 :

$e_i^*$ 와  $e_j^*$ 는  $i \neq j$ 에 대해 확률적으로 직교이고 각 부밴드에서의 MSE  $J_i^* = J_j^*$  (여기서  $J_i^* = J^*$ )가 같다.

가정 4로부터  $E\{e^*e^*T\}$ 는 대각성분을 제외하고

모두 zero가 되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E\{\mathbf{e}^* \mathbf{e}^T\} = J^* \mathbf{I}_M \quad (24)$$

식 (16)과 식 (24)의 결과를 사용하여 식 (22)의 네 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} E\{\mathbf{e}^* \mathbf{e}^T\} [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ &= \frac{\mu^2 J^*}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (22)의 두 번째 항과 세 번째 항은 가정 2와 가정 3을 적용하면  $E\{\Phi(k)\}$ 이 나타나게 되는데  $E\{\Phi(k)\}=0$ 이므로 모두 제거 가능하다. 그리고 (22)의 첫 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & E\{(\mathbf{I} - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ & \mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)(\mathbf{I} - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ &= E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} - \mu E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ & \quad - \mu E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} \\ & \quad + \mu^2 E\{\Phi(k)[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\Phi(k) \\ & \quad [\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \end{aligned} \quad (26)$$

위의 가정들과 결과들을 사용하고 [2]에서 고차의 통계적 특성을 갖는 랜덤 프로세서의 해석법을 적용하면 다음과 같이 정리 가능하다.

$$\begin{aligned} & E\{(\mathbf{I} - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ & \mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)(\mathbf{I} - \mu\Phi(k))[\Phi^T(k)\Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k)\} \\ &= E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} - 2\mu E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\} \\ & \quad + \mu^2 [(1/N)\text{tr}[\mathbf{K}(k)] + (1-1/N)E\{\mathbf{v}^T(k)\}E\{\mathbf{v}(k)\}] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (27)$$

위의 결과들로부터 식 (22)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \mathbf{K}(k) - 2\mu\mathbf{K}(k) \\ & \quad + \mu^2 [(1/N)\text{tr}[\mathbf{K}(k)] + (1-1/N)E\{\mathbf{v}^T(k)\}E\{\mathbf{v}(k)\}] \mathbf{I} \\ & \quad + \frac{\mu^2 J^*}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (28)$$

식 (9)의 양변에 expectation을 취하면 이 닫힌 식 (closed form)으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = (1-\mu)^k E\{\mathbf{v}(0)\} \approx (1-\mu)^k \mathbf{v}(0) \quad (29)$$

여기서  $\mathbf{v}(0)$ 는 결정적 양(deterministic quantity)이므로  $E\{\mathbf{v}(0)\} = \mathbf{v}(0)$ 이다.

식 (28)에 trace를 취하고 식 (29)의 결과를 사용하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{K}(k+1)] &= (1-2\mu + \mu^2 N\alpha)\text{tr}[\mathbf{K}(k)] \\ & \quad + \mu^2 N\beta(1-\mu)^k \text{tr}[\mathbf{K}(0)] + \mu^2 N\delta \end{aligned} \quad (30)$$

여기서  $\alpha = 1/N$ ,  $\beta = 1-1/N$ ,  $\delta = \frac{J^*}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2}$ ,

$\text{tr}[\mathbf{K}(0)] = \mathbf{v}^T(0)\mathbf{v}(0)$ 이다.

식 (30)은 닫힌 식으로서 간단한 조작으로  $\text{tr}[\mathbf{K}(k)]$ 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\text{tr}[\mathbf{K}(k)] = \left\{ (1-2\mu + \mu^2 N\alpha)^k + \mu^2 N\beta \sum_{l=0}^{k-1} \left\{ (1-2\mu + \mu^2 N\alpha)^l \right. \right.$$

$$\left. \left. (1-\mu)^{k-l+1} \right\} \right\} \text{tr}[\mathbf{K}(0)] + \mu^2 N\delta \sum_{l=0}^{k-1} (1-2\mu + \mu^2 N\alpha)^l \quad (31)$$

식 (31)에서  $\psi = 1-2\mu + \mu^2 N\alpha$ 라 하고 식 (19)에 위 식 (31)의 결과를 대입함으로써 MPDSAP 적응필터의 MSE를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(k) &= N\sigma_u^2 \left\{ \psi^k + \mu^2 N\beta \sum_{l=0}^{k-1} \left\{ \psi^l (1-\mu)^{k-l+1} \right\} \right\} \text{tr}[\mathbf{K}(0)] \\ & \quad + \mu^2 N^2 \sigma_u^2 \delta \sum_{l=0}^{k-1} \psi^l + J^* \end{aligned} \quad (32)$$

식 (28) ~ 식 (32) 결과와  $k \rightarrow \infty$ 일 때의 극한 개념을 도입하여  $\text{tr}[\mathbf{K}_\infty]$ 을 구하여 식 (21)에 대입하여 MPDSAP 적응필터의 정상상태에서의 MSE를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} J(k) &= N\sigma_u^2 \text{tr}[\mathbf{K}_\infty] + J^* \\ &= \left( 1 + \frac{\mu N^2 \sigma_u^2}{M^2 \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \right) J^* \end{aligned} \quad (33)$$

식 (32)가 수렴할 조건은  $|\psi| < 1$ 이며 이때 적응이득 파라미터의 범위는  $0 < \mu < 2$ 이다. 식 (32)로부터 부밴드 수  $M$ 이 증가할수록 MSE는 작아지며  $N$ 이 클 수록 증가하게 된다. 또한  $\mu$ 가 1에 가까울수록 MSE는 빠르게 감소하며 식 (33)으로부터 적응필터가 수렴하였을 때  $\mu$ 가 작을수록 MSE는 최소자승오차  $J^*$ 에 접근하게 됨을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

본 논문은 AR(P) 입력과 적응이득 파라미터를 고려한 MPDSAP 알고리즘에서 MSE의 벡터 및 행렬 기반의 통계적 해석을 하였다. 상관도가 높은 입력신호와 긴 길이의 적응필터가 적용되는 응용을 위해 임의의 값을 갖는 적응이득 파라미터가 고려되었다. 해석 결과로부터 MPDSAP 알고리즘의 MSE는 부밴드 수가 증가함에 따라 감소함을 알 수 있으며 또한 적응이득 파라미터의 범위가  $0 < \mu < 2$ 이며 수렴성능 향상을 위해 수렴상태에 따른  $\mu$ 의 조정이 필요함을 유추할 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th Ed., NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [2] S. M. Almeida, and et. al., "A statistical analysis of the affine projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs," IEEE Trans. on Circuits and Systems I, vol. 52. no. 7, July 2005.
- [3] H. Choi and H. D. Bae, "Subband affine projection algorithm for acoustic echo cancellation system," *Eurasip Jour. on ASP*, vol. 2007, Article

ID 75621, doi: 10.1155/2007/75621, 2007.